Soluzione prova I (seconda parte)

1) $$H = \underbrace{\varepsilon\begin{pmatrix}1 & & \\ & 0 & \\ & & 1\end{pmatrix}}_{H_0} + \overbrace{\frac{\mu\hbar B}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}}^{V} = \begin{pmatrix}\varepsilon&\beta&0\\\beta&0&\beta\\0&\beta&\varepsilon\end{pmatrix} \qquad \text{con} \quad \beta = \frac{\mu\hbar B}{\sqrt{2}}$$

$$L_x = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$$

Se tratto V come perturbazione; i livelli imperturbati sono

ε —— $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ $\quad |1\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ $E=\varepsilon$

0 —— $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ $\quad |2\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ $E=0$

$\quad |3\rangle = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ $E=\varepsilon$

e gli elementi di matrice di V tra livelli imperturbati sono proprio le entrate della matrice

$|2\rangle$: $E=0$ è non degenere $\Rightarrow \langle 2|V|2\rangle = V_{22} = 0 \rightarrow \delta E^{(1)} = 0$

$|1\rangle|3\rangle$: $E=\varepsilon$ è degenere $\Rightarrow$ la matrice tra gli stati $|1\rangle$ e $|3\rangle$ è

$$\begin{pmatrix}V_{11} & V_{13}\\ V_{31} & V_{33}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} \rightarrow \delta E^{(1)} = 0$$

Devo andare al II ordine

Correzione a $|2\rangle$:
$$\sum_{\substack{m\\ m\neq 2}} \frac{|\langle 2|V|m\rangle|^2}{E_{|2\rangle} - E_{|m\rangle}} = \frac{|V_{21}|^2}{-\varepsilon} + \cancel{|V_{22}|^2}\ \frac{|V_{23}|^2}{-\varepsilon} = -\frac{2\beta^2}{\varepsilon}$$

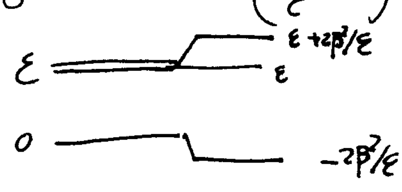
Correzione agli stati $|1\rangle$ e $|3\rangle$ si ottiene diagonalizzando

$$V_{\alpha\beta} = \sum_{m\neq|1\rangle|3\rangle} \frac{\langle\alpha|V|m\rangle\langle m|V|\beta\rangle}{E_{|1\rangle,|3\rangle} - E_m} \underset{\substack{m=|2\rangle\\ \text{solo}}}{=} \frac{V_{\alpha 2}V_{2\beta}}{\varepsilon}$$

$$V_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix}V_{11} & V_{13}\\ V_{31} & V_{33}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{\beta^2}{\varepsilon} & \frac{\beta^2}{\varepsilon}\\ \frac{\beta^2}{\varepsilon} & \frac{\beta^2}{\varepsilon}\end{pmatrix}$$

diagonalizzo: $\left(\frac{\beta^2}{\varepsilon} - \lambda\right)^2 = \frac{\beta^2}{\varepsilon} \rightarrow \lambda = 0, \lambda = \frac{2\beta^2}{\varepsilon}$

Quindi al II ordine



Risultato esatto: diagonalizzo

$$H = \begin{pmatrix} \varepsilon & \beta & 0 \\ \beta & 0 & \beta \\ 0 & \beta & \varepsilon \end{pmatrix} \qquad \det \begin{pmatrix} \varepsilon-\lambda & \beta & 0 \\ \beta & -\lambda & \beta \\ 0 & \beta & \varepsilon-\lambda \end{pmatrix} = -\beta(\varepsilon-\lambda)\beta + (\varepsilon-\lambda)\left[-\lambda(\varepsilon-\lambda)-\beta^2\right]$$

$$= -(\varepsilon-\lambda)\left[\lambda(\varepsilon-\lambda) + 2\beta^2\right]$$

$$\lambda^2 - \varepsilon\lambda - 2\beta^2 = 0$$

$$\lambda = \varepsilon \qquad \lambda = \frac{1}{2}\left(\varepsilon \pm \sqrt{\varepsilon^2 + 8\beta^2}\right)$$

Per piccolo β $\quad \lambda = \frac{\varepsilon}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon^2 + 8\beta^2} =$

$$\frac{\varepsilon}{2}\left[1 \pm \sqrt{1 + \frac{8\beta^2}{\varepsilon^2}}\right]$$

$$= \frac{\varepsilon}{2}\left[1 \pm \left(1 + \frac{4\beta^2}{\varepsilon^2} + \dots\right)\right]$$

Autovalori per $\beta \ll 1$ $= \begin{cases} \varepsilon + 2\beta^2/\varepsilon \\ -2\beta^2/\varepsilon \\ \varepsilon \end{cases}$ che torna col conto precedente

2) L'Hamiltoniana di ogni singola particella è imperturbata

$$H_0 = -\frac{\hbar^2}{2mR^2}\frac{d^2}{d\phi^2} + i\beta\frac{d}{d\phi}$$

con autofunzioni $\quad ||n\rangle\rangle \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{in\phi} \qquad E_n = \frac{\hbar^2 n^2}{2mR^2} - n\beta$

β rompe la degenerazione $(n,-n)$ e tutti i livelli per β e R generici sono non degeneri. $||0\rangle\rangle$ ha energia $E=0$ e gli altri $||n\rangle\rangle$ hanno energia $E>0$ poiché $\beta < \hbar^2/2mR^2$.

Consideriamo ora due particelle identiche di spin 1/2.

Le variabili di spin si organizzeranno in stati dello spin totale:

$S = 1$ simmetrico nello spin $\quad \begin{cases} |++\rangle \\ \frac{|+-\rangle + |-+\rangle}{\sqrt{2}} \\ |--\rangle \end{cases} \equiv |1m\rangle$

$S = 0$ antisimmetrico nello spin $\quad \frac{|+-\rangle + |-+\rangle}{\sqrt{2}} \equiv |00\rangle$

Gli stati orbitali saranno $||n,m\rangle\rangle = \frac{1}{2\pi} e^{in\phi_1 + im\phi_2}$

Stato fondamentale: per particelle distinguibili sarebbe

$$\|0,0\rangle\rangle$$

Poiché la funzione d'onda totale deve essere antisimmetrica lo stato fondamentale sarà

$$\underbrace{\|0,0\rangle\rangle}_{\text{orbitale}} \otimes \underbrace{|00\rangle}_{\text{spin } S=0}$$

I stato eccitato: $\|1\rangle\rangle$ ha energia più bassa di $\|-1\rangle\rangle$
$\frac{\hbar^2}{2mR^2}-\beta$ $\qquad$ $\frac{\hbar^2}{2mR^2}+\beta$

quindi avrò da combinare gli stati $\|1\rangle\rangle$ e $\|0\rangle\rangle$.

Le possibilità sono:

$S=0$ $\qquad \dfrac{\|10\rangle\rangle + \|01\rangle\rangle}{\sqrt{2}} \otimes |00\rangle$ $\qquad E = \left(\dfrac{\hbar^2}{2mR^2} - \beta\right)$

$S=1$ $\qquad \dfrac{\|10\rangle\rangle - \|01\rangle\rangle}{\sqrt{2}} \otimes |1m\rangle$

Lo stato è 4 volte degenere.

Se ora aggiungo $V = \lambda\,\delta(\phi_1-\phi_2)$ al I ordine in λ

. Stato fondamentale $\qquad \langle 00|\langle\langle 0,0\| V \|0,0\rangle\rangle|00\rangle = \dfrac{1}{4\pi^2}\displaystyle\int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{2\pi} d\phi_1 d\phi_2\, \lambda\,\delta(\phi_1-\phi_2)$

$\|0,0\rangle\rangle = \dfrac{1}{2\pi}$ $\qquad = \dfrac{\lambda}{4\pi^2}\displaystyle\int_0^{2\pi} d\phi_1 = \dfrac{\lambda}{2\pi}$

$\langle 00|00\rangle = 1$

. I stato eccitato. Poiché V non dipende dallo spin, ha elementi di matrice diagonali: la parte di spin data sempre $\langle S m_s | S' m_s' \rangle = \delta_{SS'}\delta_{m_s m_s'}$

$S=0 \qquad \dfrac{\langle\langle 1,0\| + \langle\langle 0,1\|}{\sqrt{2}} \,|V|\, \dfrac{\|1,0\rangle\rangle + \|0,1\rangle\rangle}{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2}\Big[\langle\langle 1,0\|V\|1,0\rangle\rangle + \langle\langle 1,0\|V\|0,1\rangle\rangle$
$+ \langle\langle 0,1\|V\|0,1\rangle\rangle + \langle\langle 0,1\|V\|1,0\rangle\rangle\Big]$

uguali a coppie $\qquad = \underbrace{\langle\langle 1,0\|V\|1,0\rangle\rangle}_{I} + \underbrace{\langle\langle 1,0\|V\|0,1\rangle\rangle}_{K\ (\text{integrale di scambio})}$

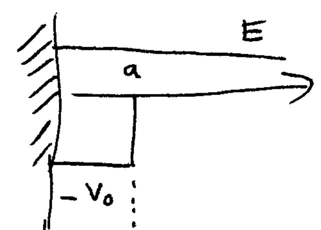
$$S=1 \qquad \frac{\langle\langle 1,0\| - \langle\langle 0,1\|}{\sqrt{2}} |V| \frac{\|1,0\rangle\rangle - \|0,1\rangle\rangle}{\sqrt{2}} = \underset{I}{\langle\langle 1,0\|V\|1,0\rangle\rangle} - \underset{K}{\langle\langle 1,0\|V\|0,1\rangle\rangle}$$

$$I = \langle\langle 1,0\|V\|1,0\rangle\rangle = \int_0^{2\pi} d\phi_1 \int_0^{2\pi} d\phi_2 \, \frac{e^{-i\phi_1}}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lambda\delta(\phi_1-\phi_2) \frac{e^{i\phi_1}}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} = \frac{\lambda}{4\pi^2}\int_0^{2\pi} d\phi_1 \cdot 1 = \frac{\lambda}{2\pi}$$

$$K = \langle\langle 1,0\|V\|0,1\rangle\rangle = \int_0^{2\pi} d\phi_1 \int_0^{2\pi} d\phi_2 \, \frac{e^{-i\phi_1}}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lambda\delta(\phi_1-\phi_2) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{i\phi_2}}{\sqrt{2\pi}} = \frac{\lambda}{4\pi^2}\int_0^{2\pi} d\phi_1 \cdot 1 = \frac{\lambda}{2\pi}$$

Quindi
$$\frac{\lambda}{\pi} = I + K \qquad S=0$$
$$0 = I - K \qquad S=1$$

3) buca sferica:



$U(r)$ $\quad A \,\mathrm{sen}\, \bar{k}r$, $\quad B\,\mathrm{sen}(kr+\delta_0)$

$\quad 0<r<a \qquad r>a$

$$\frac{\hbar^2\bar{k}^2}{2m} = E + V_0 \qquad \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = E$$

onde parziali. basse energie significa che posso tenere solo $\ell=0$

Condizioni di raccordo:

$$U(a+) = U(a-) \qquad A\,\mathrm{sen}\,\bar{k}a = B\,\mathrm{sen}(ka+\delta_0)$$
$$U'(a+) = U'(a-) \qquad \bar{k}A\cos\bar{k}a = kB\cos(ka+\delta_0)$$
$$\Downarrow$$
$$k\,\mathrm{ctg}(ka+\delta_0) = \bar{k}\,\mathrm{ctg}\,\bar{k}a$$

per $k \ll 1$ $\quad \delta_0 \sim \alpha k \quad$ $\mathrm{ctg}\,x \sim \frac{1}{x}$ $\qquad \frac{k}{k(a+\alpha)} \sim k_0\,\mathrm{ctg}\,k_0 a$

$\bar{k} \to k_0$

$$\frac{\hbar^2 k_0^2}{2m} = V_0 \qquad\qquad \alpha + a = \frac{1}{k_0}\mathrm{tg}\,k_0 a$$

$$\alpha = \frac{\mathrm{sen}\,k_0 a - k_0 a\cos k_0 a}{k_0\cos k_0 a}$$

$$\sigma = 4\pi\frac{\mathrm{sen}^2\delta_0}{k^2} \sim 4\pi\frac{\delta_0^2}{k^2} = 4\pi\alpha^2 = 4\pi\left(\frac{\mathrm{sen}\,k_0 a - k_0 a\cos k_0 a}{k_0\cos k_0 a}\right)^2$$

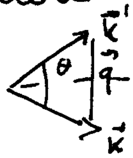
Nell'approssimazione di Born

$$f(\theta) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\int U(\vec{x})\,e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}}\,d\vec{x} = \frac{mV_0}{2\pi\hbar^2}\int_0^a r^2 dr \int \mathrm{sen}\,\theta\, d\theta\, d\phi \; e^{iq\cos\theta\, r}$$

$$= \frac{mV_0}{2\pi\hbar^2} 2\pi \int_0^a r\,dr \, \frac{e^{iqr}-e^{-iqr}}{iq} = \frac{2mV_0}{\hbar^2 q}\int_0^a r\,dr \sin qr = \frac{2mV_0}{\hbar^2 q}\left[-\frac{r\cos qr}{q}\Big|_0^a + \frac{1}{q}\int_0^a \cos qr\right]$$

$$= \frac{2mV_0}{\hbar^2 q^3}\left[\sin qa - qa\cos qa\right]$$

dove però $q = 2k\sin\frac{\theta}{2}$. Per basse energie $k\to 0$ e $q\to 0$



$$f(\theta) \to \frac{2mV_0}{\hbar^2 q^3}\left[qa - \frac{(qa)^3}{6} \cancel{+qa} - qa + \frac{(qa)^3}{2} + \dots\right]$$

$$\sim \frac{2mV_0a^3}{3\hbar^2}$$

$$\sigma = \int d\Omega |f(\theta)|^2 = \frac{16\pi m^2V_0^2a^6}{9\hbar^4}$$

Posso confrontarlo con l'altro risultato per $\frac{mV_0a^2}{\hbar^2} \ll 1$ cioè $K_0a \ll 1$

$$\sigma_{\text{onde parziali}} = 4\pi \frac{\left(k_0a - \frac{(k_0a)^3}{6} - k_0a + \frac{(k_0a)^3}{2} + \dots\right)^2}{k_0^2 + \dots} \sim \frac{16\pi}{9} k_0^4 a^6 = \frac{16\pi m^2V_0^2a^6}{9\hbar^2}$$

che è giusto

L'approssimazione di Born è corretta appunto quando il range del potenziale V_0 è minore di $V_0 \ll \frac{\hbar^2}{mr_0^2}$ dove r_0 è il raggio d'azione di $V(x)$ poiché le correzioni alla funzione d'onda incidente e^{ikz} è

$$\sim \frac{2\mu}{\hbar^2}\int \frac{V}{r} e^{i\vec{k}\vec{x}} \underset{k\ll 1}{\sim} \frac{\mu}{\hbar^2} r_0^2 V_0$$

quindi nel nostro caso ($r_0=a, \mu=m$) $e^{ikx}=1$

$$\frac{m}{\hbar^2}a^2V_0 = \frac{a^2k_0^2}{2} \ll 1 \Longrightarrow ak_0 \ll 1$$

Soluzione prova II (seconda parte)

1) $$H = A\vec{S}_e\cdot\vec{S}_p + \left(\frac{g_e q_e}{2m}B_z S_z^e + \frac{g_p q_p}{2m}B_z S_z^p\right) = A\vec{S}_e\cdot\vec{S}_p + \beta(S_z^e - S_z^p)$$

$g_e = g_p = 2$ $\qquad \beta = \frac{2|q|B}{2m} = \frac{|q|B}{m}$

L'Hamiltoniano iperfino è diagonalizzato nella base del momento angolare totale

$$A\vec{S}_e\cdot\vec{S}_p = A\hbar^2\,\frac{S(S+1)-\frac{3}{4}-\frac{3}{4}}{2} = \begin{cases} \frac{A\hbar^2}{4} & S=1 \quad \begin{cases}|++\rangle \\ \frac{|+-\rangle+|-+\rangle}{\sqrt2} \\ |--\rangle\end{cases} \\ -\frac{3A\hbar^2}{4} & S=0 \quad \frac{|+-\rangle-|-+\rangle}{\sqrt2}\end{cases}$$

Per $\beta \ll 1$ devo calcolare gli elementi di matrice di $\beta(S_z^e - S_z^p)$ nello stato $S=0$

$$(S_z^e - S_z^p)\underbrace{|00\rangle}_{=\frac{|+-\rangle-|-+\rangle}{\sqrt2}} = \left(\frac{\hbar}{2}+\frac{\hbar}{2}\right)\frac{|+-\rangle+|-+\rangle}{\sqrt2} = \hbar|10\rangle \Rightarrow \langle 10|V|00\rangle = \hbar\beta$$

e quindi $\langle 00|V|00\rangle = 0$

e negli stati del tripletto $S=1$ dovrò diagonalizzare

$$\langle 1m|\beta(S_z^e - S_z^p)|1m'\rangle$$

Ora $\beta(S_z^e - S_z^p)\underset{|1-1\rangle}{|11\rangle} = 0$ e $\beta(S_z^e - S_z^p)\underbrace{|10\rangle}_{\frac{|+-\rangle+|-+\rangle}{\sqrt2}} = \hbar|00\rangle \Rightarrow \langle 00|V|10\rangle = \hbar\beta$

e quindi $\langle 1m|V|1m'\rangle = 0$

<u>Soluzione esatta</u>: nella base di S_{TOT} devo diagonalizzare $V = \beta(S_z^e - S_z^p)$. Ho già calcolato gli elementi di matrice non nulli $\langle 00|V|10\rangle = \langle 10|V|00\rangle = \hbar\beta$

Quindi la matrice di H è

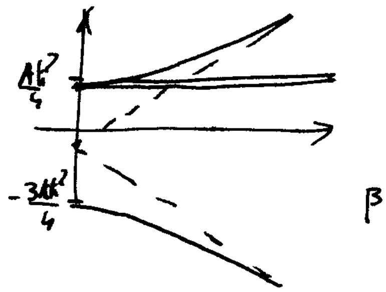
$$\begin{array}{c} |11\rangle \\ |1-1\rangle \\ |10\rangle \\ |00\rangle \end{array}\begin{pmatrix} \frac{A\hbar^2}{4} & & & \\ & \frac{A\hbar^2}{4} & & \\ & & \frac{A\hbar^2}{4} & \hbar\beta \\ & & \hbar\beta & -\frac{3}{4}A\hbar^2 \end{pmatrix}$$

autovalori blocco 2×2: $\left(\frac{A\hbar^2}{4}-\lambda\right)\left(-\frac{3}{4}A\hbar^2-\lambda\right) - \hbar^2\beta^2 = 0$

$$\lambda^2 + \frac{A\hbar^2}{2}\lambda - \hbar^2\beta^2 - \frac{3}{16}A\hbar^2 = 0$$

$$\lambda = -\frac{A\hbar^2}{4} \pm \sqrt{\left(\frac{A\hbar^2}{4}\right)^2 + \frac{3}{16}A\hbar^2 + \hbar^2\beta^2}$$

e quindi le energie sono $\quad \frac{A\hbar^2}{4},\ \frac{A\hbar^2}{4},\ -\frac{A\hbar^2}{4} \pm \sqrt{\left(\frac{A\hbar^2}{2}\right)^2 + \hbar^2\beta^2}$



e partono giustamente a ordine $O(\beta^2)$ per $\beta \ll 1$

2) La formula della probabilità della transizione $|i\rangle \to |f\rangle$ è

$$P_{if}(t) = \frac{1}{\hbar^2}\left|\int_0^t e^{i\omega_{fi}t'} V_{fi}\, dt'\right|^2$$

Se $|i\rangle = |n_x n_y n_z\rangle$, $n_x+n_y+n_z = n$ con $V \sim x,y$ lo stato finale avrà $n_x' = n_x \pm 1$ o $n_y' = n_y \pm 1$ e $\omega_{fi} = \frac{E_f - E_i}{\hbar} \equiv \pm\omega$

$$P_{n_x,n_x+1}(t) = \frac{1}{\hbar^2}\left|\int_0^t e^{i\omega t}(-qE)\cos t\, \underbrace{\langle n_x+1|x|n_x\rangle}_{\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\sqrt{n_x+1}}\right|^2$$

$$= \frac{n_x+1}{2m\hbar\omega}q^2E^2\left|\frac{e^{i(\omega+1)t}-1}{2i(\omega+1)} + \frac{e^{i(\omega-1)t}-1}{2i(\omega-1)}\right|^2$$

$$P_{n_y,n_y+1}(t) = \frac{n_y+1}{2m\hbar\omega}q^2E^2\left|\frac{e^{i(\omega+1)t}-1}{2(\omega+1)} - \frac{e^{i(\omega-1)t}-1}{2(\omega-1)}\right|^2$$

e $$P_{n\to n+1} = P_{n_x\to n_x+1} + P_{n_y\to n_y+1} \underset{n_x=n_y=0}{=} \frac{q^2E^2}{m\hbar\omega}\left[\left|\frac{e^{i(\omega+1)t}-1}{2(\omega+1)}\right|^2 + \left|\frac{e^{i(\omega-1)t}-1}{2(\omega-1)}\right|^2\right]$$

$$= \frac{q^2E^2}{m\hbar\omega}\left[\frac{\sin^2\frac{\omega+1}{2}t}{(\omega+1)^2} + \frac{\sin^2\frac{\omega-1}{2}t}{(\omega-1)^2}\right]$$

Per andare da $n=0 \to n=2$ devo andare al secondo ordine

$$b_f^{(2)}(t) = \frac{1}{i\hbar}\sum_m \int_0^t e^{i\omega_{fm}t}\, b_m^{(1)}(t)\, V_{fm}$$

$$b^{(1)}_{|100\rangle} = \frac{1}{i\hbar}\int_0^t e^{i\omega t}(-qE)\cos t\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}$$

$$b^{(1)}_{|010\rangle} = \frac{1}{i\hbar}\int_0^t e^{i\omega t}(-qE)\sin t\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}$$

$$\begin{array}{lll} & & |110\rangle \\ \cdot & \to |100\rangle & \\ & & |200\rangle \\ n=0 & \to |010\rangle & |110\rangle \\ |000\rangle & & |020\rangle \end{array}$$

$$b^{(2)}_{|200\rangle}(t) \underset{n_x=1\to n_x=2}{=} \frac{1}{i\hbar}\int_0^t e^{i\omega t}(-qE\cos t)\underbrace{\sqrt{\frac{2\hbar}{2m\omega}}}_{\substack{n_x=1\\ \sqrt{n_x+1}}}\, b^{(1)}_{|100\rangle} = -\frac{q^2E^2}{\sqrt{2}\,m\hbar\omega}\int_0^t dt'\, e^{i\omega t'}\cos t'\int_0^{t'} e^{i\omega t''}\cos t''\, dt''$$

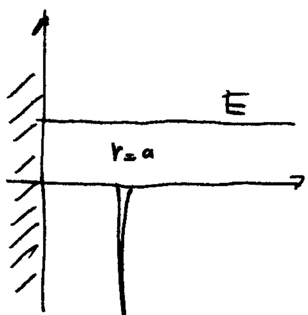
$$b^{(2)}_{|110\rangle}(t) \underset{\substack{n_y=0\to n_y=1\\ n_x=0\to n_x=1}}{=} \frac{1}{i\hbar}\int_0^t e^{i\omega t}(-qE\cos t)\underbrace{\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}}_{n_x=0}\, b^{(1)}_{|010\rangle} + \frac{1}{i\hbar}\int_0^t e^{i\omega t}(-qE\,\mathrm{sen}\, t)\underbrace{\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}}_{n_y=0}\, b^{(1)}_{|100\rangle}$$

$$= -\frac{q^2E^2}{2m\hbar\omega}\left[\int_0^t dt' e^{i\omega t'}\cos t'\int_0^{t'} e^{i\omega t''}\,\mathrm{sen}\, t''\, dt'' + \int_0^t dt' e^{i\omega t'}\,\mathrm{sen}\, t'\int_0^{t'} e^{i\omega t''}\cos t''\, dt''\right]$$

$$b^{(2)}_{|020\rangle}(t) = -\frac{q^2E^2}{\sqrt{2}\,m\hbar\omega}\int_0^t dt' e^{i\omega t'}\,\mathrm{sen}\, t'\int_0^{t'} e^{i\omega t''}\,\mathrm{sen}\, t''\, dt''$$

$$P_{n=0\to n=2} = |b_{|200\rangle}(t)|^2 + |b_{|110\rangle}(t)|^2 + |b_{|020\rangle}(t)|^2$$

3) Il problema monodimensionale associato è



$$\begin{cases} -\frac{\hbar^2}{2m}U'' - \lambda\delta(r-a)U = EU \\ U(0)=0 \end{cases}$$

onda $s \to \ell = 0$ niente termine $\frac{\ell(\ell+1)\hbar^2}{2mr^2}U$

e dobbiamo calcolare lo sfasamento δ_0:

$U(r) = \underset{0<r<a}{A\,\mathrm{sen}\, kr}\ ,\ \underset{r>a}{B\,\mathrm{sen}(kr+\delta_0)}$

$\frac{\hbar^2k^2}{2m} = E$

Condizioni di raccordo

$U(a+) = U(a-)$

$U'(a+) - U'(a-) = -\frac{2m\lambda}{\hbar^2}U(a)$

$$\begin{cases} A\,\mathrm{sen}\, ka = B\,\mathrm{sen}(ka+\delta_0) \\ kB\cos(ka+\delta_0) - Ak\cos ka = -\frac{2m\lambda}{\hbar^2}A\,\mathrm{sen}\, ka \end{cases}$$

$\Downarrow$

$k\,\mathrm{cotg}(ka+\delta_0) = k\,\mathrm{cotg}\, ka - \frac{2m\lambda}{\hbar^2}$

$\delta_0 = -ka + \mathrm{arcotg}\left[\mathrm{cotg}\, ka - \frac{2m\lambda}{\hbar^2 k}\right]$

$f_0 = \frac{e^{2i\delta_0}-1}{2ik}$

$\sigma_0 = |f_0|^2 = \frac{\mathrm{sen}^2\delta_0}{k^2} \Rightarrow \sigma_{TOT} = \frac{4\pi\,\mathrm{sen}^2\delta_0}{k^2}$

Per piccoli k so che $\delta_0 \sim \alpha k$ quindi

$\mathrm{cotg}(ka+\delta_0) \sim \frac{1}{k(a+\alpha)} = \mathrm{cotg}\, ka - \frac{2m\lambda}{\hbar^2 k} \sim \frac{1}{ka} - \frac{2m\lambda}{\hbar^2 k}$

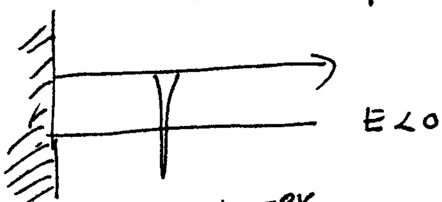
$\Rightarrow \frac{1}{a+\alpha} = \frac{1}{a} - \frac{2m\lambda}{\hbar^2}$

$\alpha = -a + \frac{1}{\frac{1}{a} - \frac{2m\lambda}{\hbar^2}} \Longrightarrow$

$k \ll 1$, $\delta_0 \ll 1$: $\sigma_{TOT} = 4\pi\frac{\delta_0^2}{k^2} = 4\pi\alpha^2$

quindi $\sigma_{TOT} \to \infty$ per $\frac{1}{a} - \frac{2m\lambda}{\hbar^2} = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{\hbar^2}{2ma}$

Dei stati legati del potenziale si trovano così:



$u(r) = \underset{0<r<a}{A\,\mathrm{sh}\,\rho r}\ ,\ \underset{r>a}{Be^{-\rho r}}$

$\frac{\hbar^2\rho^2}{2m} = -E$

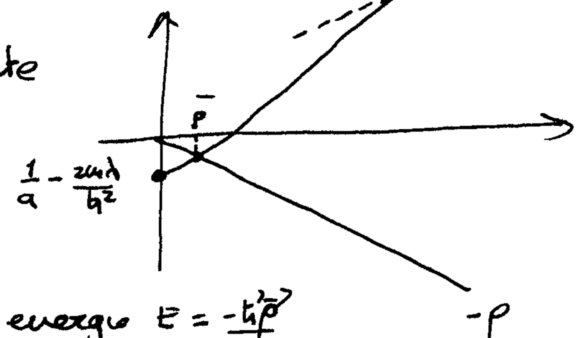
Raccordo: $A\,\mathrm{sh}\,\rho a = Be^{-\rho a}$

$$-\rho B e^{-\rho a} - \rho A\,\mathrm{ch}\,\rho a = -\frac{2m\lambda}{\hbar^2} A\,\mathrm{sh}\,\rho a$$

$$\Downarrow$$

$$-\rho = \rho \coth \rho a - \frac{2m\lambda}{\hbar^2}$$

da studiare graficamente



c'è uno stato legato con energia $E = -\frac{\hbar^2\bar\rho^2}{2m}$ solo se $\lambda \geq \frac{\hbar^2}{2ma^2}$ e per $\lambda \to \frac{\hbar^2}{2ma^2}$ infatti $\bar\rho \to 0$ e $E \to 0$.

Soluzione prova III (II parte)

1) $H = \frac{1}{2I} L^2 + E\cos\theta$; le autofunzioni di $\frac{1}{2I}L^2$ sono $Y_{em}(\theta,\varphi)$ con autovalori $\frac{\ell(\ell+1)\hbar^2}{2I}$ e con degenerazione $(2\ell+1)$: $m = -\ell, \dots, \ell$.

- I ordine: $V = \sqrt{\frac{4\pi}{3}}\, Y_{10} E$.

  - stato fondamentale: $\delta E = \langle 00|V|00\rangle = 0$ per parità.
  - stati eccitati: devo diagonalizzare

$$\langle \ell m|\sqrt{\tfrac{4\pi}{3}}\, Y_{10}\, |\ell m'\rangle = 0$$

  (Le regole di selezione (momento angolare e parità) richiedono $\Delta m = 0$ e $\Delta\ell = \pm 1$)

- $$E_n^{(2)} = \sum_{m\neq n} \frac{|\langle n|V|m\rangle|^2}{E_n - E_m} \qquad \text{se } |n\rangle \text{ è non degenere}$$

Con $|n\rangle = |00\rangle$ l'unico elemento di matrice non nullo è $\langle 00|\sqrt{\frac{4\pi}{3}}\, Y_{10}\,|10\rangle$ per conservazione momento angolare che vale

$$\int \underbrace{Y_{00}^*}_{1/\sqrt{4\pi}} \sqrt{\frac{4\pi}{3}}\, Y_{10}\, \underbrace{Y_{10}}_{\text{reale}}\, d\Omega = \frac{1}{\sqrt{3}} \int |Y_{10}|^2 d\Omega = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

quindi $$E^{(2)}_{|00\rangle} = + \frac{E^2}{3} \cdot \frac{1}{0 - \frac{2\hbar^2}{2I}} = -\frac{E^2}{3}\frac{I}{\hbar^2}$$ giustamente negativo per lo stato fondamentale

Per $|n\rangle = |1m\rangle$ in linea di principio dovremmo usare la teoria delle perturbazioni degenere e diagonalizzare la matrice

$$V_{m\tilde{m}} = \sum_{\substack{\ell' m' \neq 1m \\ \neq 1\tilde{m}}} \frac{\langle 1m|V|\ell' m'\rangle\langle \ell' m'|V|1\tilde{m}\rangle}{\frac{\hbar^2}{I} - \frac{\ell'(\ell'+1)\hbar^2}{2I}}$$

Tuttavia, conservazione di m e $V \sim Y_{10}$ implica $m = m' = \tilde{m}$ e quindi $V_{m\tilde{m}} \neq 0$ solo se $m = \tilde{m}$ ed è già diagonale. Gli elementi di matrice non nulli sono

$$\langle 1m|\sqrt{\tfrac{4\pi}{3}}\, Y_{10}\, |2m\rangle = A_m \quad m = 1,0,-1 \qquad \Delta\ell = \pm 1,\ \Delta m = 0$$

$$\langle 1m|\sqrt{\tfrac{4\pi}{3}}\, Y_{10}\, |00\rangle = B\,\delta_{m0}$$

$$V_{mm} = \frac{\varepsilon^2 I}{\hbar^2}\left[|B|^2 - \frac{|A_m|^2}{2} \right] \qquad m = -1, 0, 1$$

Gli $|A_m|^2$ dipenderanno da m e saranno diversi tra loro. Tuttavia

$$A_m^* = \left(\int Y_{1m}^* Y_{10} Y_{2m}\right)^* = \int Y_{1m} Y_{10}^* Y_{2m}^* = \int Y_{1-m}^* Y_{10} Y_{2-m} = A_{-m} \quad \text{poiché} \quad Y_{em}^* = Y_{e-m}(-1)^m$$

e quindi i livelli con m opposti saranno ancora degeneri.

FACOLTATIVO : anche se l'energia non è stata modificata a $O(\varepsilon)$ l'autofunzione lo è dalla formula

$$|00\rangle' = |00\rangle + \sum_{m \neq |00\rangle} \frac{|em\rangle \langle em|V|00\rangle}{E_0 - E_e}$$

e poiché solo $\langle 10|V|00\rangle = \varepsilon/\sqrt{3}$ è diverso da zero

$$= |00\rangle - \frac{\varepsilon}{\sqrt{3}} \frac{I}{\hbar^2} |10\rangle$$

Ora $\langle 00|L_z|00\rangle' = 0$ poiché $L_z|e0\rangle = 0$ e

$'\langle 00|L_x|00\rangle' = '\langle 00|\frac{L_+ + L_-}{2}|00\rangle' = 0$ poiché $L_\pm|00\rangle = 0$ e $L_\pm|10\rangle \cong |1,\pm1\rangle$ ortogonale a tutti i termini in $|00\rangle'$

analogamente $'\langle 00|L_y|00\rangle' = 0$

quindi $\langle 00|\vec{L}|00\rangle' = 0$

2) $$H = A\vec{S}_e\cdot\vec{S}_p - \frac{\overset{g=2}{2q}}{2m}\vec{B}\cdot\vec{S}_e = A\frac{\vec{S}^2 - \vec{S}_e^2 - \vec{S}_p^2}{2} + \frac{e}{m}BS_z^e$$

dove ho trascurato l'accoppiamento del protone a B: $\frac{q g_p}{2M} \ll 1$

I livelli energetici imperturbati dell'interazione iperfine sono quelli della base del momento angolare totale

$A\hbar^2 \frac{S(S+1) - \frac{3}{4} - \frac{3}{4}}{2}$

$S = 1$ $\quad \frac{A\hbar^2}{4}$ $\quad \begin{cases} |11\rangle = |++\rangle \\ |10\rangle = \frac{|+-\rangle + |-+\rangle}{\sqrt{2}} \\ |1-1\rangle = |--\rangle \end{cases}$

$S = 0$ $\quad -\frac{3}{4}A\hbar^2$ $\quad \frac{|+-\rangle - |-+\rangle}{\sqrt{2}}$

Il campo magnetico contribuirà per B piccolo attraverso il valor medio

$$\left\langle \frac{eB}{m} S_z^e \right\rangle$$

$S=0$ è non degenere

$S=1$ è degenere ma la matrice di S_z^e è diagonale in $S=1$ infatti $\Longrightarrow$

$$S_z^e|10\rangle = \frac{\frac{\hbar}{2}|+-\rangle + \left(-\frac{\hbar}{2}\right)|-+\rangle}{\sqrt{2}} = \frac{\hbar}{2}|00\rangle$$

etc ...

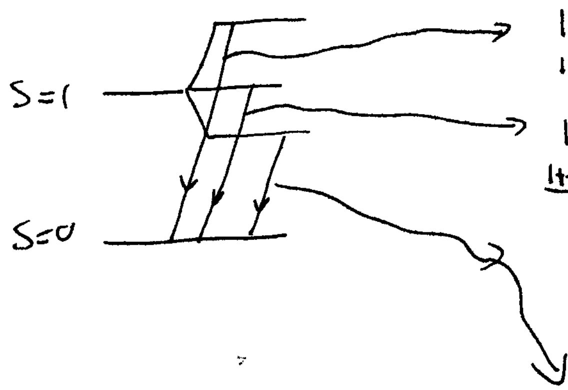
le correzioni ai livelli per $B \ll 1$ sono $\left(\beta = \frac{\hbar B e}{2m} \right)$

$S=1$, β	$\frac{A\hbar^2}{4}+\beta$	$\vert 11\rangle$
	$A\hbar^2/4$	$\vert 10\rangle$
$-\beta$	$A\hbar^2/4-\beta$	$\vert 1-1\rangle$
$S=0$	$-3A\hbar^2/4$	$\vert 00\rangle$

Le transizioni dovute alla radiazione sono di dipolo magnetico poiché, nello stato fondamentale $\langle \vec{x} \rangle = \langle x_i x_j \rangle = 0$ e sono dovute a $\vec{S}_e \cdot \vec{B}$ dove $\vec{B}$ dipende dalla polarizzazione della luce

$$\langle 1m | \vec{S}_e | \underbrace{00}_{\frac{|+-\rangle+|-+\rangle}{\sqrt{2}}} \rangle \neq$$

per qualche direzione di $\vec{S}_e$, che ruota lo spin della I particella soltanto. $|00\rangle$ contiene entrambi gli stati di spin della seconda e della prima



$|11\rangle \to |00\rangle$

$|++\rangle \to \frac{|+-\rangle - |-+\rangle}{\sqrt{2}}$

sarà polarizzata circolarmente $\langle 11 | S_e^+ | 00 \rangle = \mp\hbar/\sqrt{2}$

$|10\rangle \to |00\rangle$

$\frac{|+-\rangle + |-+\rangle}{\sqrt{2}}$

sarà polarizzato linearmente lungo z $\langle 10 | \underbrace{S_e^z |00\rangle}_{\frac{\hbar}{2}|10\rangle} = \hbar/2$

gli elementi di matrice $\langle 10 | S_e^{\pm} | 00 \rangle$ sono invece nulli

$|1-1\rangle \to |00\rangle$

$|--\rangle$

sarà polarizzato circolarmente $\langle 1-1 | S_e^- | 00 \rangle = \hbar/\sqrt{2}$

3) Born: $$f_{Born}(\theta) = \frac{m}{2\pi\hbar^2} \int V(\vec{x}) e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}} d\vec{x} = +\frac{mV_0}{2\pi\hbar^2} \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 \int_0^a dr\, r^2 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \operatorname{sen}\theta\, d\theta\, e^{iqr\cos\theta}$$

$$= +\frac{mV_0}{2\pi\hbar^2} \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 \, (2\pi) \int_0^a dr\, r^2 \, \frac{e^{iqr} - e^{-iqr}}{iqr} = +\frac{mV_0}{\hbar^2} \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 \, \frac{2}{q} \int_0^a r\, dr\, \operatorname{sen} qr$$

$q = 2k \operatorname{sen}\frac{\theta}{2}$

$$= +\frac{mV_0}{\hbar^2} \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 \, \frac{2}{q} \left[-\frac{r\cos qr}{q} \Big|_0^a + \frac{1}{q} \int_0^a \cos qr\, dr \right] = +\frac{mV_0}{\hbar^2} \frac{2}{q^3} \left[\operatorname{sen} qa - qa\cos qa \right] \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2$$

I neutroni sono particelle identiche con spin 1/2. $f(\theta)$ è in effetti una matrice $f_{\alpha\beta}(\theta)$ dove $\alpha = \pm$, $\beta = \pm$

Separiamo i gradi di libertà di spin $f_{\alpha\beta}(\theta) = (\vec{S}_1 \vec{S}_2)_{\alpha\beta}\, f(\theta)$ con $f(\theta) = \frac{2mV_0}{\hbar^2 q^3}(\operatorname{sen} qa - qa\cos qa)$

Nella base del momento angolare totale

$$\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 = \frac{S^2 - 3/2\hbar^2}{2} = \begin{cases} \hbar^2/4 & S=1 \\ -3\hbar^2/4 & S=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} f_{S=1} = \frac{\hbar^2}{4} f(\theta) \\ f_{S=0} = -\frac{3}{4}\hbar^2 f(\theta) \end{cases}$$

e le autofunzioni saranno

$\vec{k}$ • $\overleftarrow{-k}$

$$S=1 \rightarrow \frac{|\vec{k}\,-\vec{k}\rangle - |\vec{k}\,\vec{k}\rangle}{\sqrt{2}} \Longrightarrow$$ Fermioni: totale antisimmetrica

simmetrica — antisim

$$S=0 \rightarrow \frac{|\vec{k}\,-\vec{k}\rangle + |-\vec{k},\vec{k}\rangle}{\sqrt{2}}$$

antis

La sezione d'urto andrà riscritta, per quello che riguarda la parte orbitale:

$$f(\theta) = \langle \vec{k},-\vec{k}|W|\vec{k}',-\vec{k}'\rangle \longrightarrow \frac{\langle \vec{k},-\vec{k}| \pm \langle -\vec{k}\,\vec{k}|}{\sqrt{2}} \, |W| \, \frac{|\vec{k}',-\vec{k}'\rangle \pm |-\vec{k}',\vec{k}'\rangle}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\Big[\langle k,-k|W|k',-k'\rangle \pm \langle k,-k|W|-k',k'\rangle +$$
$$\langle -k,k|W|-k',+k'\rangle \pm \langle -k,k|W|k',-k'\rangle \Big]$$

uguali a due a due

$$= \langle k,-k|W|k',-k'\rangle \pm \langle k,-k|W|-k',k'\rangle$$

$$= f(\theta) \pm f(\theta)\Big|_{\vec{k}' \to -\vec{k}'}$$

$$= f(\theta) \pm f(\pi-\theta)$$

+ = BOSONI
− = FERMIONI

L'interazione è diagonale in S. Ci sono quattro stati disponibili $|\pm\pm\rangle$ o $\{|00\rangle$ e $|1m\rangle\}$.

- particelle non polarizzate: uso la base di S_{TOT}, sommo sugli stati finali e medio su quelli iniziali (4)

$$\sigma(\theta) = \frac{1}{4}\Big[|f_{S=0}|^2 + 3|f_{S=1}|^2\Big] = \frac{\hbar^4}{4\cdot 16}\Big[\,|f(\theta)+f(\pi-\theta)|^2 + 27\,|f(\theta)-f(\pi-\theta)|^2\Big]$$

- particelle in uno stato di tripletto $|1m\rangle$ con m fissato: lo stato finale sarà ~~solo S=1 sommato su tre stati~~ lo stesso:

$$\sigma(\theta) = |f_{S=1}|^2 = \frac{\hbar^4}{16}\cdot |f(\theta)-f(\pi-\theta)|^2$$