PROVA I — RISOLUZIONE DETTAGLIATA

ES I.

L'eq. di Schroedinger è

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\varphi'' - \frac{\hbar^2}{2m}\gamma\,\delta(x)\,\varphi = E\varphi$$

da risolvere con le condizioni di raccordo:

$$\begin{cases} \varphi(0+) = \varphi(0-) \\ \varphi'(0+) - \varphi'(0-) = -\gamma\varphi(0) \end{cases} \longleftarrow$$

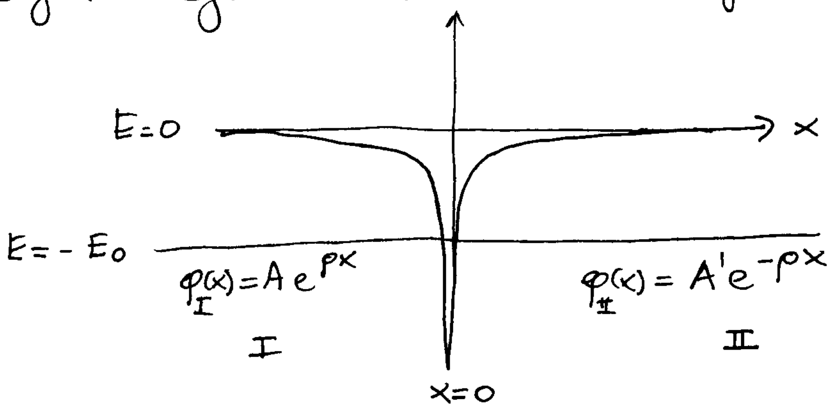
si ottiene integrando l'eq. di Schroedinger su un intervallo $(-\varepsilon, +\varepsilon)$: $-\frac{\hbar^2}{2m}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\varphi'' - \frac{\hbar^2}{2m}\gamma\varphi(0) = E\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\varphi$

e prendendo il limite $\varepsilon \to 0$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\varphi'(\varepsilon) - \varphi'(-\varepsilon)\right) - \frac{\hbar^2}{2m}\gamma\varphi(0) = E\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\varphi \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$$

$$\Rightarrow \Delta\varphi' + \gamma\varphi(0) = 0$$

- Un potenziale a delta ha di solito un solo stato legato con energia negativa $E = -E_0$. La funzione d'onda sarà



$$\varphi(x) = \begin{cases} Ae^{\rho x} & x<0 \\ A'e^{-\rho x} & x>0 \end{cases}$$

dove, nelle regioni I e II con $x \neq 0$, $\varphi(x)$ soddisfa l'eq. di una particella libera $-\frac{\hbar^2}{2m}\varphi'' = -E_0\varphi \Rightarrow \frac{\hbar^2\rho^2}{2m} = E_0$

Le condizioni di raccordo sono

$$\begin{cases} A = A' \\ \rho(-A'-A) = -\gamma A \end{cases} \Rightarrow \rho = \frac{\gamma}{2} \Rightarrow E_0 = \frac{\hbar^2\gamma^2}{8m}$$

Quindi $\quad \varphi(x) = A e^{-\rho|x|} = \sqrt{\rho}\, e^{-\rho|x|}$

[A si determina dalla condizione di normalizzazione:

$$1=\int_R |\varphi(x)|^2 dx = 2A^2\int_0^\infty e^{-2\rho x}dx = \frac{A^2}{\rho} \Rightarrow A=\sqrt{\rho} \quad]$$

- La probabilità che la particella si trovi nella regione $|x|<1/\gamma$ è data da

$$\int_{-1/\gamma}^{1/\gamma} |\varphi(x)|^2 dx = 2\rho\int_0^{1/\gamma} e^{-2\rho x}dx \underset{2\rho=\gamma}{=} \gamma\int_0^{1/\gamma} e^{-\gamma x}dx = 1-\frac{1}{e}$$

- Se γ viene raddoppiato il nuovo stato legato sarà

$\rho \to 2\rho \qquad \tilde{\varphi}(x) = \sqrt{2\rho}\, e^{-2\rho|x|}$

Se il raddoppio è istantaneo, la funzione d'onda del sistema rimane quella iniziale, e la probabilità che la particella si trovi nel nuovo stato fondamentale è

$$P = |\langle\tilde{\varphi}|\varphi\rangle|^2 = \left|\int_R \tilde{\varphi}^*(x)\varphi(x)\,dx\right|^2 = \left|\sqrt{\rho}\cdot\sqrt{2\rho}\int_R e^{-2\rho|x|}e^{-\rho|x|}dx\right|^2$$

$$= \left|2\sqrt{2}\rho\int_0^\infty e^{-3\rho x}dx\right|^2 = \left|\frac{2\sqrt{2}}{3}\right|^2 = \frac{8}{9}$$

$\boxed{\text{Es II} \bullet}$ L'elettrone è in uno stato che è sovrapposizione dello stato fondamentale $n=1$ con energia $E_1=-E_0$ e dello stato $n=2$ con momento angolare $\ell=1$, $m=\pm1,0$ ed energia $E_2=-\frac{E_0}{4}$. $E_0 = 13.6\,eV$

Tutti e quattro gli stati hanno uguale probabilità.

Poiché le $\psi_{n\ell m}$ sono ortonormali

$$1 = \int|\psi|^2 = N^2(1+1+1+1) \Rightarrow N=\frac{1}{2}$$

e $\qquad \psi = \frac{1}{2}(\psi_{100}+\psi_{211}+\psi_{210}+\psi_{21-1})$

La probabilità che la particella sia in uno dei quattro stati è $1/4$.

- $$\langle E\rangle = \sum \underset{\substack{\uparrow\\ -E_0,\ -\frac{E_0}{4}}}{E_n}\ \underset{\substack{\uparrow\\ 1/2^2}}{P(E_n)} = \frac{1}{4}(-E_0)+\frac{1}{4}\left(-\frac{E_0}{4}\right)+\frac{1}{4}\left(-\frac{E_0}{4}\right)+\frac{1}{4}\left(-\frac{E_0}{4}\right)$$

$$\langle E \rangle = -\frac{E_0}{4}\left(1+\frac{3}{4}\right) = -\frac{7}{16}E_0$$

- Indichiamo con $|nem\rangle$ gli stati ψ_{nem}. Il valore di n non giocherà alcun ruolo per lo studio di L_i. $|\psi_0\rangle$ è una combinazione di uno stato con $\ell=0$ e tre stati con $\ell=1$, $m=+1,0,-1$. L_x non è diagonale su questi stati, in generale, ma agisce sugli stati con momento angolare ℓ fissato, trasformandoli tra loro secondo le regole del momento angolare: $L_x|nem\rangle = \sum \alpha_{m'}|nem'\rangle$ è una combinazione lineare di stati con lo stesso valore di n e ℓ. L_x agirà perciò separatamente su $|100\rangle$ e sui tre stati $|21m\rangle$, trasformandoli tra loro.

Per calcolare le probabilità per una misura di L_x servono gli autostati di L_x.

– $|100\rangle$ è autostato di L_x con autovalore 0. Poiché $\ell=0$: $\quad L_i|100\rangle = 0$, $\quad L^2|100\rangle = 0$

– Restringiamoci al sottospazio generato da $|21m\rangle$. In questo sottospazio tridimensionale, corrispondente a $\ell=1$, le matrici del momento angolare nella base

$$|211\rangle \to \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \qquad |210\rangle \to \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \qquad |21{-1}\rangle \to \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

sono

$$L_z = \hbar\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix} \qquad L_x = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$$

[Si assume che voi sappiate ricavare queste espressioni a partire dall'algebra del momento angolare e che l'abbiate fatto almeno una volta nella vita; per risolvere gli esercizi, tuttavia, potete cercare l'espressione sui libri o su un vostro formulario personale]

Gli autovalori di L_x in questo spazio tridimensionale sono $\hbar, 0, -\hbar$, come per ogni componente del momento angolare L_i in uno stato con $\ell=1$. Gli autovettori sono [cfr testi o formulario] $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ con autovalore 0, $\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\\pm\sqrt{2}\\1\end{pmatrix}$ con autovalore $\pm\hbar$. In forma più astratta, indichiamo gli autostati con

$$\boxed{\ell=1} \quad \begin{aligned} L_x=\hbar \qquad & |211\rangle_x = \frac{1}{2}\left(|211\rangle + \sqrt{2}|210\rangle + |21{-1}\rangle\right) \\ L_x=0 \qquad & |210\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|211\rangle - |21{-1}\rangle\right) \\ L_x=-\hbar \qquad & |21{-1}\rangle_x = \frac{1}{2}\left(|211\rangle - \sqrt{2}|210\rangle + |21{-1}\rangle\right) \end{aligned}$$

$$\boxed{\ell=0} \quad |100\rangle_x = |100\rangle$$

L_x ha altri autostati per n e ℓ più grandi o diversi dai valori $(n=1, \ell=0)$ e $(n=2, \ell=1)$, ma i corrispondenti autovettori, combinazioni lineari di $|n\ell m\rangle$, sono ortogonali allo stato iniziale $|\psi(0)\rangle$ e non contribuiranno al calcolo delle probabilità.

Alla probabilità $L_x = \pm\hbar$ contribuisce solo $\ell=1$:

$$P(L_x=\pm\hbar) = \left|\langle \text{autostato}\, L_x=\pm\hbar \,|\, \psi(0)\rangle\right|^2 = \left|{}_x\langle 21\pm1 \,|\, \psi(0)\rangle\right|^2 =$$

$$= \left|\frac{1}{2}\left(\langle 211| \pm \sqrt{2}\langle 210| + \langle 21-1|\right)\left(\frac{|100\rangle}{2} + \frac{|211\rangle}{2} + \frac{|210\rangle}{2} + \frac{|21-1\rangle}{2}\right)\right|^2$$

$$\langle n\ell m | n'\ell' m'\rangle = \delta_{nn'}\delta_{\ell\ell'}\delta_{mm'} \quad \Rightarrow \quad = \left|\frac{1}{4}\left(1 \pm \sqrt{2} + 1\right)\right|^2 = \frac{|2\pm\sqrt{2}|^2}{16}$$

[Ovviamente per il calcolo di ${}_x\langle 21\pm1|\psi(0)\rangle$ si può anche usare una notazione vettoriale: $|\psi(0)\rangle$ ristretto allo spazio tridimensionale su cui sto proiettando diventa

$$|\psi(0)\rangle = \frac{|211\rangle + |210\rangle + |21-1\rangle}{2} \rightarrow \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \quad \text{e} \quad |21\pm1\rangle_x \longrightarrow \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\\pm\sqrt{2}\\1\end{pmatrix}$$

$${}_x\langle 21\pm1|\psi(0)\rangle = \frac{1}{2}(1, \pm\sqrt{2}, 1)\cdot\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \frac{1\pm\sqrt{2}+1}{4}$$

La componente proporzionale a $|100\rangle$ in $|\psi(0)\rangle$ non contribuisce quando si proietta sugli stati con $\ell=1$]

Alla probabilità $L_x=0$ contribuisce sia $\ell=0$ che $\ell=1$

$$P(L_x=0) = \sum_{\substack{\text{autostati}\\ L_x=0}} \left|\langle \text{autostato}\, L_x=0 \,|\, \psi(0)\rangle\right|^2 = \left|{}_x\langle 210|\psi(0)\rangle\right|^2 + \left|\langle 100|\psi(0)\rangle\right|^2$$

$$= \left|\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)\cdot\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right|^2 + \left|\langle 100|\left(\frac{|100\rangle + |211\rangle + |210\rangle + |21-1\rangle}{2}\right)\right|^2$$

$$= \quad 0 \quad + \quad \frac{1}{4}$$

Per controllo:

$$P(L_x=0) + P(L_x=\hbar) + P(L_x=-\hbar) = \frac{1}{4} + \frac{|2+\sqrt{2}|^2}{16} + \frac{|2-\sqrt{2}|^2}{16} = 1$$

- L'Hamiltoniano si ottiene dalla formula per l'accoppiamento in campo B costante

$$H = H_0 - \frac{q}{2m_e}\vec{B}\cdot\vec{L} + O(B^2)$$

e, trascurando i termini quadratici,

$$H = H_0 + \frac{|e|B}{2m_e}L_x$$

dove H_0 è l'Hamiltoniano dell'atomo di idrogeno. Gli autostati di H adesso saranno $|nem\rangle_x$, ottenuti scegliendo come direzione di quantizzazione del momento angolare l'asse x (H_0 è invariante per rotazioni; una scelta vale l'altra): $H|nem\rangle_x = \left(-\frac{E_0}{n^2} + \frac{|e|B}{2m_e}\hbar m\right)|nem\rangle_x$

Proiettando $|\psi(0)\rangle$ sulla base per H:

$$|\psi(0)\rangle = \frac{|100\rangle_x}{2} + \sum_{m=-1}^{1} |21m\rangle_x \; {}_x\langle 21m|\psi(0)\rangle =$$

$$\frac{|100\rangle_x}{2} + \frac{2+\sqrt{2}}{4}|211\rangle_x + \frac{2-\sqrt{2}}{4}|21-1\rangle_x$$

L'evoluzione temporale sarà

$$|\psi(t)\rangle = \frac{e^{+\frac{i}{\hbar}E_0 t}}{2}|100\rangle_x + \frac{2+\sqrt{2}}{4}e^{+\frac{i}{\hbar}\frac{E_0 t}{4} - i\frac{|e|B t}{2m_e}}|211\rangle_x + \frac{2-\sqrt{2}}{4}e^{\frac{i}{\hbar}\frac{E_0 t}{4} + i\frac{|e|B t}{2m_e}}|21-1\rangle_x$$

Le probabilità per una misura di L_z si ottengono proiettando sugli stati originari $|nem\rangle$.

La probabilità di ottenere zero avrà due contributi:

$$|\langle 100|\psi(t)\rangle|^2 = \frac{1}{4}$$

$$|\langle 210|\psi(t)\rangle|^2 = \left|\frac{e^{\frac{i}{\hbar}\frac{E_0 t}{4}}}{4}\left(e^{\frac{-|e|B t}{2m_e}}(2+\sqrt{2})\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\cdot\frac{(1,\sqrt{2},1)}{2} + e^{\frac{i|e|B t}{2m_e}}(2-\sqrt{2})\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\frac{(1,-\sqrt{2},1)}{2}\right)\right|^2$$

$$= \frac{1}{16}\left|\frac{\sqrt{2}}{2}\left((2+\sqrt{2})e^{-i\frac{|e|B}{2m_e}t} - (2-\sqrt{2})e^{i\frac{|e|B}{2m_e}t}\right)\right|^2$$

$$= \frac{1}{16}\left|2\cos\frac{|e|B}{2m_e}t - 2\sqrt{2}\, i \sin\frac{|e|B}{2m_e}t\right|^2$$

$$= \frac{1}{4}\left(\cos^2\frac{|e|B}{2m_e}t + 2\sin^2\frac{|e|B}{2m_e}t\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(1 + \sin^2\frac{|e|B}{2m_e}t\right)$$

$\boxed{\text{Es III.}}$ Il potenziale dovuto a un campo elettrico costante è $-\vec{E}\cdot\vec{x} = -dx$ e il potenziale complessivo è

$$V(x,y) = \frac{m\omega^2}{2}(x^2+y^2) - dx =$$

$$\frac{m\omega^2}{2}\left(x-\frac{d}{m\omega^2}\right)^2+\frac{m\omega^2}{2}y^2-\frac{d^2}{2m\omega^2}$$

che è ancora il potenziale di un oscillatore armonico isotropo, con centro traslato, ed energia a cui è stata sottratta una costante. Lo spettro è quindi

- $$E=\hbar\omega\,(n_x+n_y+1)-\frac{d^2}{2m\omega^2}\qquad n_x,n_y=0,1,2,\dots$$

- una misura $E=2\hbar\omega-\frac{d^2}{2m\omega^2}$ può corrispondere a $(n_x=1,n_y=0)$ oppure $(n_x=0,n_y=1)$. Il generico stato sarà una combinazione lineare

$$|\psi\rangle=\alpha\,|10\rangle+\beta\,|01\rangle\qquad \alpha,\beta\in\mathbb{C}$$

dove $|n_x n_y\rangle$ indica gli autostati di H. $|\psi\rangle$ sarà normalizzato se $|\alpha|^2+|\beta|^2=1$.

Introduciamo creatori e distruttori associati alle coordinate $\tilde{x}=x-\frac{d}{m\omega^2}$ e y

$$\tilde{x}\longrightarrow a_x,\,a_x^\dagger$$
$$y\longrightarrow a_y,\,a_y^\dagger$$

$$|n_x n_y\rangle=\frac{(a_x^\dagger)^{n_x}}{\sqrt{n_x!}}\frac{(a_y^\dagger)^{n_y}}{\sqrt{n_y!}}|00\rangle$$

Notare che il creatore $a_x^\dagger$ è associato alla coordinata traslata $\tilde{x}$ e riferito al punto di equilibrio dell'oscillatore.

~~se, per un~~

Ora $$\langle\psi|x|\psi\rangle=\langle\psi|\tilde{x}+\frac{d}{m\omega^2}|\psi\rangle=\langle\psi|\tilde{x}|\psi\rangle+\frac{d}{m\omega^2}$$

$$=\left(\alpha^*\langle10|+\beta^*\langle01|\right)\tilde{x}\left(\alpha|10\rangle+\beta|01\rangle\right)+\frac{d}{m\omega^2}$$
$$\equiv\frac{d}{m\omega^2}$$

[Tutti gli altri termini sono zero: $\langle n_x' n_y'|\tilde{x}|n_x n_y\rangle$, non avendo operatori legati a y implica che $n_y'=n_y$; avendo solo stati $|10\rangle$ e $|01\rangle$ questo implica $n_x'=n_x$; infine, ricordando il risultato per un oscillatore monodimensionale
$\langle n_x|\tilde{x}|n_x\rangle \cong \langle n_x|a_x+a_x^\dagger|n_x\rangle=0$]

Infine $\langle\psi|x^2|\psi\rangle = \langle\psi|\ \tilde{x}^2 + \frac{2d\tilde{x}}{m\omega^2} + \frac{d^2}{m^2\omega^4}\ |\psi\rangle =$

$$= \langle\psi|\tilde{x}^2|\psi\rangle + \frac{2d}{m\omega^2}\cancel{\langle\psi|\tilde{x}|\psi\rangle} + \frac{d^2}{m^2\omega^4}$$

$$= \left(\alpha^*\alpha\langle 10|\tilde{x}^2|10\rangle + \cancel{\alpha^*\beta\langle 10|\tilde{x}^2|01\rangle} + \cancel{\alpha\beta^*\langle 01|\tilde{x}^2|10\rangle} + \beta^*\beta\langle 01|\tilde{x}^2|01\rangle\right) + \frac{d^2}{m^2\omega^4}$$

ortogonali in n_y

$$= \left(|\alpha|^2\,\frac{3}{2}\frac{\hbar}{m\omega} + |\beta|^2\,\frac{1}{2}\frac{\hbar}{m\omega}\right) + \frac{d^2}{m^2\omega^4}$$

dove si è usato il risultato per l'oscillatore monodimensionale

$$\langle n_x|\tilde{x}^2|n_x\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega}\langle n_x|\,a^2 + \underbrace{a^\dagger a}_{\sqrt{n_x}\sqrt{n_x}} + \underbrace{a a^\dagger}_{\sqrt{n_x+1}\sqrt{n_x+1}} + a^{\dagger 2}\,|n_x\rangle = \frac{\hbar}{m\omega}\left(n_x + \frac{1}{2}\right)$$

$\boxed{\text{PUNTEGGIO:}}$ E per un controllo (approssimativo) di che voto avreste ricevuto

Es I:
- 5 punti
- 5 pt
- 5 pt

Es II:
- 5 pt
- 6 pt
- 5 pt

Es III:
- 5 pt
- 6 pt $\langle x\rangle$ e 4 pt $\langle x^2\rangle$

a cui potete sommare 1 o 2 punti di bonus

PROVA II

Es I. Parametrizzando $\vec{n} = (\mathrm{sen}\,\theta \cos\varphi, \mathrm{sen}\,\theta\, \mathrm{sen}\,\varphi, \cos\theta)$
ottengo $\vec{n} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ ponendo $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$.
Gli autovalori di $\vec{S}\cdot\vec{n}$ sono $\pm\frac{\hbar}{2}$ con autovettori
[vedere testi o formulari]

$$\vec{S}\cdot\vec{n} = \frac{\hbar}{2} \qquad |+\rangle_{\vec{n}} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2}\, e^{-\frac{i\varphi}{2}} \\ \mathrm{sen}\frac{\theta}{2}\, e^{\frac{i\varphi}{2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{-i\pi/8} \\ e^{i\pi/8} \end{pmatrix}$$

$$\vec{S}\cdot\vec{n} = -\frac{\hbar}{2} \qquad |-\rangle_{\vec{n}} = \begin{pmatrix} -\mathrm{sen}\,\theta/2\; e^{-i\varphi/2} \\ \cos\theta/2\; e^{i\varphi/2} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -e^{-i\pi/8} \\ +e^{i\pi/8} \end{pmatrix}$$

Quindi $|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{-i\pi/8} \\ e^{i\pi/8} \end{pmatrix} \equiv |+\rangle_{\vec{n}}$. L'Hamiltoniano sarà

$$H = -\mu\, \vec{B}\cdot\vec{S} = -\mu B S_x$$

S_x ha autostati $|\pm\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ \pm 1 \end{pmatrix}$ corrispondenti ad autovalori $\pm\frac{\hbar}{2}$
[vedere testo, formulari, o usare formule generale per $\vec{S}\cdot\vec{n}$ con $\theta = \pi/2$, $\varphi = 0$]

$$|\psi(0)\rangle = |+\rangle_x \underbrace{{}_x\langle +|\psi(0)\rangle}_{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} e^{-i\pi/8} \\ e^{i\pi/8}\end{pmatrix}} + |-\rangle_x \underbrace{{}_x\langle -|\psi(0)\rangle}_{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)\,\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} e^{-i\pi/8} \\ e^{i\pi/8}\end{pmatrix}} = \cos\frac{\pi}{8}|+\rangle_x - i\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{8}|-\rangle_x$$

$|\pm\rangle_x$ sono autostati di H con autovalore $\mp\mu B\frac{\hbar}{2}$.
L'evoluzione temporale è data da

$$|\psi(t)\rangle = \cos\frac{\pi}{8}\, e^{\frac{i\mu B}{2}t} |+\rangle_x - i\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{8}\, e^{-\frac{i\mu B}{2}t} |-\rangle_x$$

E la probabilità che al tempo t $\vec{S}\vec{n}$ valga $-\frac{\hbar}{2}$ sarà ottenuta proiettando su $|-\rangle_{\vec{n}}$

$$P = \left|{}_{\vec{n}}\langle -|\psi(t)\rangle\right|^2 = \left| \cos\frac{\pi}{8}\, e^{\frac{i\mu B t}{2}}\, {}_{\vec{n}}\langle -|+\rangle_x - i\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{8}\, e^{-\frac{i\mu B t}{2}}\, {}_{\vec{n}}\langle -|-\rangle_x \right|^2 =$$

$$= \left| \cos\frac{\pi}{8}\, e^{\frac{i\mu B t}{2}} \frac{\left(-2i\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{8}\right)}{2} - i\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{8}\, e^{-\frac{i\mu B t}{2}} \frac{\left(-2\cos\frac{\pi}{8}\right)}{2} \right|^2 = \left| -i\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}\left(e^{\frac{i\mu B t}{2}} - e^{-\frac{i\mu B t}{2}}\right)\right|^2$$

$$= \left| -i\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{4}\cdot i\,\mathrm{sen}\frac{\mu B}{2}t \right|^2 = \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}^2\frac{\mu B}{2}t$$

Es II. Ho un oscillatore armonico tridimensionale isotropo. Le funzioni d'onda sono

$$|n_x n_y n_z\rangle \longrightarrow \psi(x,y,z) \sim H_{n_x}(\sqrt{\alpha}x) H_{n_y}(\sqrt{\alpha}y) H_{n_z}(\sqrt{\alpha}z)\, e^{-\frac{\alpha}{2}(x^2+y^2+z^2)}, \quad \alpha = \frac{m\omega}{\hbar}$$

Ricordando che $H_1(\xi) = \xi$, ho che la $\psi(x,y,z)$ data corrisponde a

$$N'\left(|100\rangle + |010\rangle\right)$$

Poiché $\langle n n' n'' | m m' m'' \rangle = \delta_{nm}\delta_{n'm'}\delta_{n''m''}$ la costante di normalizzazione è $N' = 1/\sqrt{2}$

- Lo spettro è $E = \hbar\omega(n_x + n_y + n_z + \frac{3}{2})$, quindi $|100\rangle$ e $|010\rangle$ hanno entrambi energia fissata $E = \hbar\omega\frac{5}{2}$. $\psi(x,y,z)$ ha con probabilità 1 energia $\hbar\omega\frac{5}{2}$ quindi

$$\langle E \rangle = \frac{5}{2}\hbar\omega$$

- Ricordiamo che, per un oscillatore monodimensionale, $\langle n|x|n\rangle \cong \langle n|a+a^\dagger|n\rangle = 0$. In tutti i termini in $\langle\psi|\vec{x}|\psi\rangle$ ho espressioni della forma

$$\langle n_x n_y n_z | x | n'_x n'_y n'_z \rangle \qquad \text{(analogamente per } y \text{ e } z\text{)}$$

$$= \langle n_x|x|n'_x\rangle \langle n_y|n'_y\rangle \langle n_z|n'_z\rangle$$

che non si annullano solo se $n'_y = n_y$, $n'_z = n_z$. Avendo solo gli stati $|100\rangle$, $|010\rangle$ questo implica $n'_x = n_x$ e $\langle n_x|x|n_x\rangle = 0$. Quindi

$$\langle\psi|\vec{x}|\psi\rangle = 0$$

Lo stesso ragionamento si può fare con l'espressione esplicita di ψ

$$\langle\psi|\vec{x}|\psi\rangle = N^2 \int e^{-\alpha r^2}(x+y)^2\, \vec{x}\, d^3x = 0$$

poiché ogni termine nell'integrando è dispari in x, o in y, o in z.

- Si può calcolare $\langle\vec{L}\rangle = \int \psi^*(\vec{L}\psi)\, d^3x$ oppure, più semplicemente, ricordare l'espressione delle armoniche sferiche (cfr testi o formulari)

$$Y_{11} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{i\varphi} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}(x+iy) \qquad Y_{1-1} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{-i\varphi} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}}(x-iy)$$

$$x = \sqrt{\frac{8\pi}{3}}\,\frac{Y_{1-1} - Y_{11}}{2} \qquad y = \sqrt{\frac{8\pi}{3}}\,\frac{Y_{1-1} + Y_{11}}{-2i}$$

Quindi $$\psi(r,\theta,\varphi) = f(r)\left[\frac{Y_{1-1}}{2}(1+i) + \frac{Y_{11}}{2}(-1+i)\right]$$

Poiché le Y_{lm} sono ortonormali, $\int|\psi|^2=1$ se $\int|f(r)|^2 r^2 dr = 1$. La parte radiale (se normalizzata!) si elide nel calcolo di $\langle\vec{L}\rangle$ poiché $\vec{L}$ dipende solo da θ e φ.

Quindi $$\psi \sim Y_{11}\frac{1+i}{2} + Y_{11}\frac{(-1+i)}{2}$$ è correttamente normalizzata

$$\int|\psi|^2 \sim \left|\frac{1+i}{2}\right|^2 + \left|\frac{-1+i}{2}\right|^2 = 1$$

$\boxed{\text{MODO I}}$

Abbiamo stati con $l=1$. In notazione matriciale [cfr testi o formulari]

$$Y_{11} \to \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \qquad Y_{1-1} \to \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \qquad Y_{10} \to \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$L_z = \hbar\begin{pmatrix}1&&\\&0&\\&&-1\end{pmatrix} \qquad L_x = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix} \qquad L_y = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&-i&0\\i&0&-i\\0&i&0\end{pmatrix}$$

$$\psi \to \begin{pmatrix}\frac{1+i}{2}\\0\\\frac{-1+i}{2}\end{pmatrix}$$

$$\langle L_z\rangle = \left(\frac{1-i}{2}, 0, \frac{-1-i}{2}\right)\hbar\begin{pmatrix}1&&\\&0&\\&&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1+i}{2}\\0\\\frac{-1+i}{2}\end{pmatrix} = \hbar\left(\frac{2}{4}-\frac{2}{4}\right) = 0$$

$$\langle L_x\rangle = \left(\frac{1-i}{2}, 0, -\frac{1-i}{2}\right)\frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1+i}{2}\\0\\-\frac{1+i}{2}\end{pmatrix} = 0$$

$$\langle L_y\rangle = 0 \Rightarrow \boxed{\langle\psi|\vec{L}|\psi\rangle = 0}$$

$\boxed{\text{Modo II}}$

$$\langle\psi|L_z|\psi\rangle = \langle\psi|\left(\hbar\frac{1+i}{2}|11\rangle - \hbar\frac{(-1+i)}{2}|1-1\rangle\right) =$$

$$|\psi\rangle = \frac{1+i}{2}|11\rangle + \frac{-1+i}{2}|1-1\rangle$$

$$L_z|1\pm1\rangle = \pm\hbar|1\pm1\rangle$$

$$\hbar\left(\frac{1-i}{2}\langle 11| + \frac{-1-i}{2}\langle 1-1|\right)\left(\frac{1+i}{2}|11\rangle - \frac{(-1+i)}{2}|1-1\rangle\right)$$

$$= \hbar\frac{|1-i|^2}{4} - \hbar\frac{|-1+i|^2}{4} = 0$$

$$\langle\psi|L_x|\psi\rangle \cong \langle\psi|L^+ + L^-|\psi\rangle = 0$$

poiché $L^\pm$ trasformano $|1\pm1\rangle$ in 0 oppure in $|10\rangle$ che è ortogonale a $|1\pm1\rangle$

Analogamente $\langle\psi|L_y|\psi\rangle = 0$

Es III. Le funzioni d'onda del moto in campo centrale sono della forma

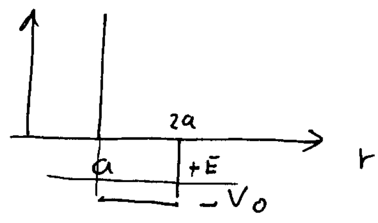
$$\psi(\vec{x}) = \frac{U_{nl}(r)}{r} Y_{lm}(\theta, \varphi)$$

Lo stato fondamentale avrà $l = 0$

$$\psi = \frac{U_{n0}(r)}{r} \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$$

dove $U_{n0}(r)$ risolve l'eq monodimensionale per $V(r)$ con $U_{n0}(0) = 0$ e $\int_0^\infty |U|^2 dr = 1$.

$V(r)$:



Poiché $V(r) = \infty$ per $r < a$ ~~se~~ ~~moto~~ la funzione d'onda $\psi(r)$ sarà zero per $r < a$ e $U(a) = 0$

Gli stati legati saranno della forma

$$U(r) = \begin{cases} 0 & r < a \\ A \operatorname{sen} k(r-a) & a < r < 2a \\ B e^{-\rho r} & r > 2a \end{cases}$$

dove ho imposto la condizione $U(a) = 0$ (barriera impenetrabile) e k e ρ si determinano dall'eq di Schroedinger $H\psi = +E\psi$

$E < 0$ $\qquad \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = V_0 + E \quad , \quad \frac{\hbar^2 \rho^2}{2m} = -E \quad \Longrightarrow \quad k^2 + \rho^2 = \frac{2mV_0}{\hbar^2} \equiv k_0^2$

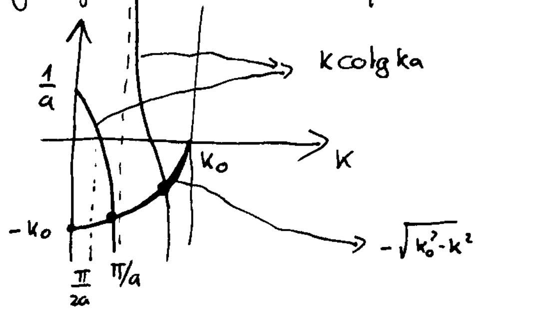
$k_0 = \sqrt{\frac{2mV_0}{\hbar^2}}$

Le condizioni di raccordo a $r = 2a$ sono la continuità di U e di U' :

$$\begin{cases} A \operatorname{sen} ka = B e^{-2a\rho} \\ kA \cos ka = -\rho B e^{-2\rho a} \end{cases} \Longrightarrow \boxed{k \operatorname{cotg} ka = -\rho}$$

Gli autovalori si ottengono risolvendo graficamente l'equazione

$$k \operatorname{cotg} ka = -\sqrt{k_0^2 - k^2}$$



Vediamo che non esistono stati legati se

$$\frac{\pi}{2a} > k_0$$

ovvero $\quad V_0 = \frac{\hbar^2 k_0^2}{2m} < \frac{\hbar^2 \pi^2}{8ma^2}$

Per $V_0 = \frac{\hbar^2\pi^2}{8ma^2}$ $\quad K = k_0$ e $\rho = 0$, l'autofunzione diventa

$$(A=B) \qquad \psi_0(x,y,z) = \begin{cases} 0 & r<a \\ \frac{A}{r}\,\text{sen}\,k_0(r-a) \equiv \frac{A}{r}\,\text{sen}\,\frac{\pi}{2a}(r-a), & a<r<2a \\ \frac{B}{r} \equiv \frac{A}{r} & r>2a \end{cases} \qquad \boxed{E=0}$$

che non è normalizzabile : $\int |\psi_0|^2 \cong \int_0^\infty \frac{1}{r^2} r^2 dr = +\infty$
(limite degli stati dello spettro continuo)

$\boxed{\text{PROVA III}}$

$\boxed{\text{Es I.}}$ Lo spazio di Hilbert è $L^2[0,2\pi]$. Lo spettro è discreto

$$H\psi = E\psi$$

$$-\frac{\hbar^2\psi''}{2m_p} = E\psi \quad \Longrightarrow \quad \psi = e^{\pm i\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}\phi}$$

poiché ϕ è un angolo $\psi(0) = \psi(2\pi)$
implica $\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} = m \in \mathbb{Z}$

Quindi autofunzioni e autovalori sono

$$|m\rangle \longrightarrow \psi_m(\phi) = \frac{e^{im\phi}}{\sqrt{2\pi}} \qquad \text{e} \qquad E_m = \frac{\hbar^2 m^2}{2m_p}$$

$$\int_0^{2\pi} |\psi_m|^2 d\phi = 1$$

A $t=0$ $\quad \psi(\phi) = N\cos^3\phi = \tilde{N}\left(\frac{e^{i\phi}+e^{-i\phi}}{2}\right)^3 = \tilde{N}\left(e^{3i\phi} + 3e^{i\phi} + 3e^{-i\phi} + e^{-3i\phi}\right)$

$$\int_0^{2\pi} |\psi|^2 d\phi = |\tilde{N}|^2 (1+3^2+3^2+1)\cdot 2\pi \equiv 1 \quad \Longrightarrow \quad \tilde{N} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{20}}$$

Quindi $\quad \psi(\phi) = \frac{1}{\sqrt{20}}\left(\psi_3 + 3\psi_1 + 3\psi_{-1} + \psi_{-3}\right)$

- Al tempo t

$$\psi_t(\phi) = \frac{1}{\sqrt{20}}\left(e^{-i\frac{9\hbar t}{2m_p}}\psi_3 + 3e^{-i\frac{\hbar t}{2m_p}}\psi_1 + 3e^{-i\frac{\hbar t}{2m_p}}\psi_{-1} + e^{-i\frac{9\hbar t}{2m_p}}\psi_{-3}\right)$$

- $$\langle \psi_t | -i\frac{d}{d\phi} | \psi_t \rangle = \sum_m P(m) \left(\text{valore di } -i\frac{d}{d\phi} \text{ su } m\right) = \frac{1}{20}\left(3 + 3^2(1) + 3^2(-1) - 3\right) = 0$$

poiché $-i\frac{d}{d\phi}\psi_m = m\,\psi_m$

$$\langle \psi_t | H | \psi_t \rangle = \sum_m P(m)\,E(m) = \frac{\hbar^2}{2m_p}\,\frac{1}{20}\left(3^2 + 3^2(1^2) + 3^2(-1)^2 + 3^2\right) = \frac{18\hbar^2}{20 m_p}$$

I valori medi non dipendono da t poiché $-i\frac{d}{d\phi}$ e H sono costanti del moto.

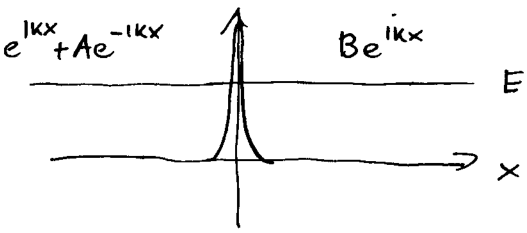
- $$P = |\langle \psi_f | \psi_t \rangle|^2 = \left| \left(\frac{\langle 3| + \langle -3|}{\sqrt{2}}\right) |\psi_t\rangle \right|^2 = \left| \frac{1}{\sqrt{40}}\left(e^{-i\frac{9\hbar t}{2m_p}} + e^{-i\frac{9\hbar t}{2m_p}}\right)\right|^2 = \frac{1}{10}$$

$$|\psi_f\rangle = \frac{e^{3i\phi} + e^{-3i\phi}}{2\sqrt{\pi}} = \frac{\psi_3 + \psi_{-3}}{\sqrt{2}}$$

(osservare che è normalizzata $\langle\psi_f|\psi_f\rangle = 1$)

$\boxed{\text{Es II.}}$

Risolviamo prima il problema stazionario.



$$\varphi_k(x) = \begin{cases} e^{ikx} + Ae^{-ikx} & x<0 \\ Be^{ikx} & x>0 \end{cases}$$

il raccordo dà (vedi testi o soluzione prova I)

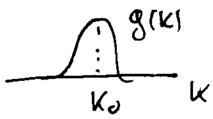
$$\begin{cases} \varphi(0+) = \varphi(0-) \\ \Delta\varphi' = \gamma\varphi(0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = 1 + A \\ \gamma B = ik(B - 1 + A) \end{cases}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{cases} B = \dfrac{2ik}{2ik-\gamma} = \dfrac{2k}{\sqrt{4k^2+\gamma^2}}\, e^{i\left(\operatorname{arctg}\frac{2k}{\gamma} + \frac{\pi}{2}\right)} \\ A = \dfrac{\gamma}{2ik-\gamma} = \dfrac{\gamma}{\sqrt{4k^2+\gamma^2}}\, e^{i\operatorname{arctg}\frac{2k}{\gamma}} \end{cases}$$

Formiamo ora un pacchetto con le soluzioni stazionarie

$$\psi(x,t) = \int g(k)\,\varphi_k(x)\,e^{-\frac{i}{\hbar}E(k)t}\,dk$$



dove per semplicità prendiamo $g(k)$ reale

$$\psi(x,t) = \begin{cases} \underbrace{\int dk\, g(k)\, e^{ikx - \frac{i}{\hbar}\frac{\hbar^2 k^2}{2m}t}}_{\mathrm{I}} + \underbrace{\int dk \frac{g(k)\gamma}{\sqrt{\gamma^2+4k^2}} e^{-ikx - \frac{i}{\hbar}\frac{\hbar^2 k^2}{2m}t + i\,\mathrm{arctg}\frac{2k}{\gamma}}}_{\mathrm{II}} & x<0 \\ \underbrace{\int dk\, g(k)\, e^{ikx - \frac{i}{\hbar}\frac{\hbar^2 k^2}{2m}t + i\,\mathrm{arctg}\frac{2k}{\gamma} + i\frac{\pi}{2}} \frac{2k}{\sqrt{\gamma^2+4k^2}}}_{\mathrm{III}} & x>0 \end{cases}$$

Il metodo della fase stazionaria consiste nel minimizzare rispetto a k la fase totale (che include le fasi di $A(k)$ e $B(k)$) ottenendo l'equazione per il moto del pacchetto

Dai tre termini in $\psi(x,t)$

$$\left.\frac{\partial\, \text{fase}}{\partial k}\right|_{k=k_0} = 0 \qquad\qquad \mathrm{I} \quad \left. x - \frac{\hbar k}{m}t \right|_{k_0} = 0 \implies x = \frac{p_0}{m}t$$

$$\mathrm{II} \quad \left. -x - \frac{\hbar k}{m}t + \frac{2/\gamma}{1+\frac{4k^2}{\gamma^2}} \right|_{k_0} = 0 \implies x = -\frac{p_0}{m}(t - \tau)$$

$$p_0 = \hbar k_0$$

$$\mathrm{III} \quad \left. x - \frac{\hbar k}{m}t + \frac{2/\gamma}{1+\frac{4k^2}{\gamma^2}} \right|_{k_0} = 0 \implies x = \frac{p_0}{m}(t-\tau)$$

dove $\tau = \frac{2/\gamma}{1+4k_0^2/\gamma^2}\frac{m}{p_0}$ è il ritardo temporale, le equazioni sono state valutate per $k\sim k_0$ (sul centro del pacchetto) e le espressioni per I e II sono valide se $x<0$ e III se $x>0$

Per tempi ~~negativi t<1~~ $t \ll 0$ esiste solo il pacchetto I, per tempi $t \gg 0$ esistono solo i pacchetti II e III (riflesso e trasmesso). Il pacchetto II (definito per $x<0$) esiste solo per $t > \tau$ considerando il pacchetto I arrivi sulla barriera a $t=0$. Il ritardo temporale nella riflessione è pertanto

$$\tau = \frac{2m/(p_0\gamma)}{1+4k_0^2/\gamma^2}$$

$\boxed{\text{Es III.}}$ Ogni particella è descritta da uno spazio di Hilbert con due stati $|\pm\rangle$ definiti come la base di S_z : $S_z|\pm\rangle = \pm\frac{\hbar}{2}|\pm\rangle$

Il sistema delle due particelle sarà descritto da un sistema a quattro stati che indichiamo con $|\pm\pm\rangle$

dove la prima entrata si riferisce alla particella 1 e la seconda alla particella 2.

A tempo zero il sistema è nello stato $|++\rangle$.

L'Hamiltoniana $H = -\mu B S_x^{(1)}$ agisce solo sulla prima particella e quindi solo sulla prima entrata in $|\pm\pm\rangle$.

Per la particella 1 S_x^1 ha autovettori $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ \pm 1\end{pmatrix}$ che in notazione di Dirac diventano

$$|\pm\rangle_x = \frac{|+\rangle \pm |-\rangle}{\sqrt{2}} \qquad H|\pm\rangle_x = \mp\frac{\mu B\hbar}{2}|\pm\rangle_x$$

Scriviamo $|\pm\pm\rangle = |\pm\rangle \otimes |\pm\rangle$ per ricordarci di agire solo sugli indici della particella 1

$$|\psi(0)\rangle = |+\rangle \otimes |+\rangle = \left(\frac{|+\rangle_x + |-\rangle_x}{\sqrt{2}}\right) \otimes |+\rangle$$

Quindi

$$|\psi(t)\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\frac{\mu B}{2}t}|+\rangle_x + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\frac{\mu B}{2}t}|-\rangle_x\right) \otimes |+\rangle$$

$$= \left(\cos\frac{\mu B}{2}t\,|+\rangle + i \,\mathrm{sen}\,\frac{\mu B}{2}t\,|-\rangle\right) \otimes |+\rangle$$

$$= \cos\frac{\mu B}{2}t\,|++\rangle + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\mu B}{2}t\,|-+\rangle$$

Ricordiamo ora [vedere testi o esercitazioni] che i quattro stati $|\pm\pm\rangle$ si organizzano come rappresentazioni del momento angolare TOTALE come

$$\vec{S} = \vec{S}_{(1)} + \vec{S}_{(2)} \qquad S=0 \qquad S=1$$

$$|S=0\rangle = \frac{|+-\rangle - |-+\rangle}{\sqrt{2}} \qquad |S=1, m\rangle = \left\{ |++\rangle,\ \frac{|+-\rangle + |-+\rangle}{\sqrt{2}},\ |--\rangle \right\}$$

(singoletto) (tripletto)

Quindi la probabilità richiesta si ottiene proiettando su $|S=0\rangle$

$$P = |\langle \underbrace{S=0}_{\text{singoletto}} | \psi(t)\rangle|^2 = \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}^2\frac{\mu B}{2}t$$

PROVA IV

Es I Le autofunzioni della buca doppia sono

$$|n_x n_y\rangle \longrightarrow \psi_{n_x}(x)\,\psi_{n_y}(y) \qquad \psi_n(t) = \sqrt{\frac{2}{a}}\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi t}{a}$$

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

con energia $E_{n_x n_y} = \dfrac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}\,(n_x^2 + n_y^2)$

Quindi $\psi(x,y) = N\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi x}{a}\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi y}{a} + N\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi x}{a}\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi y}{a} =$

$$= N'\big(|11\rangle + |21\rangle\big) = \frac{|11\rangle + |21\rangle}{\sqrt{2}} \longleftarrow \text{(normalizzazione)}$$

Quindi $\psi(x,y,t) = \dfrac{|11\rangle}{\sqrt{2}}\, e^{-i\frac{\pi^2\hbar}{2ma^2}t} + \dfrac{|21\rangle}{\sqrt{2}}\, e^{-i\frac{\pi^2\hbar}{ma^2}\frac{5}{2}t}$

- $\langle E\rangle$ non dipenderà da t:

$$\langle E\rangle = \sum P(E_n)\,E_n = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}\left(2\cdot\frac{1}{2} + 5\cdot\frac{1}{2}\right) = \frac{7\pi^2\hbar^2}{4ma^2}$$

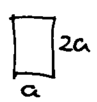
- $\frac{P_x^2}{2m}$ e $\frac{P_y^2}{2m}$ sono la parte di energia portata dalle componente x o y. Le autofunzioni corrispondenti sono $|n_x\rangle$ e $|n_y\rangle$ separatamente

  - $\frac{P_y^2}{2m}$ ha valore $\frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2}$ sia su $|11\rangle$ che $|21\rangle$ quindi il valore $\frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2}$ ha probabilità 1

  - $\frac{P_x^2}{2m}$ può valere $\frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2}$ su $|11\rangle$ con probabilità $\frac{1}{2}$

    e $\frac{2\hbar^2\pi^2}{ma^2}$ su $|21\rangle$ con probabilità $\frac{1}{2}$

Le probabilità non dipendono da t poiché gli operatori commutano con H.

- I livelli energetici della buca rettangolare 

sono

$$|n_x n_y\rangle^{RETT} \sim \sqrt{\frac{2}{a}}\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi n_x x}{a}\,\sqrt{\frac{2}{2a}}\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi n_y y}{2a} \qquad E^{RETT}_{n_x n_y} = \frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2}\left(n_x^2 + \frac{n_y^2}{4}\right)$$

poiché a è stato raddoppiato solo in y.

La degenerazione dello spettro viene rimossa

QUADRATA | RETTANGOLARE

$\varepsilon = \dfrac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2}$

$\vdots$

$|21\rangle, |12\rangle$ ——— $E = 5\varepsilon$ — doppiamente degenere — $|21\rangle^{RETT}$ ——— $E = \frac{17}{4}\varepsilon$

$|12\rangle^{RETT}$ ——— $E = 2\varepsilon$

$|11\rangle$ ——— $E = 2\varepsilon$ — $|11\rangle^{RETT}$ ——— $E = \frac{5}{4}\varepsilon$

La funzione d'onda rimane quella di prima se il raddoppio è istantaneo

$$\psi_{IN}(x,y) = \begin{cases} 0 & 0<x<a \quad a<y<2a \\ \dfrac{\psi_1(x)\psi_1(y)}{\sqrt{2}} e^{-\frac{i}{\hbar}E_{11}t} + \dfrac{\psi_2(x)\psi_1(y)}{\sqrt{2}} e^{-\frac{i}{\hbar}E_{21}t} & 0<x<a\,,\ 0<y<a \end{cases}$$

[poiché ψ era zero ~~...~~ come $a<y<2a$ e il raddoppio è istantaneo, il sistema non ha tempo di evolvere e ψ sarà zero per $a<y<2a$]

È utile pensare in termini delle vecchie funzioni d'onda poiché

$$P = \left|\int \psi_{FIN}^* \psi_{IN}\right|^2 = \left|\int_0^{2a} dy \int_0^a dx\ \psi_{FIN}^*(x,y)\,\psi_{IN}(x,y)\,dx\,dy\right|^2 =$$

$$= \left|\int_0^a dy \int_0^a dx\ \psi_{FIN}^*\psi_{IN}\right|^2$$

poiché $\psi_{IN} = 0$ per $y>a$

il primo stato eccitato del nuovo sistema è $|12\rangle^{RETT}$

$$\psi_{FIN}(x,y) = \sqrt{\frac{2}{a}}\,\underset{\substack{\uparrow \\ n_x=1}}{\operatorname{sen}\frac{\pi x}{a}}\ \sqrt{\frac{1}{a}}\ \underset{\substack{\uparrow \\ n_y=2}}{\operatorname{sen}\frac{\pi y}{a}} \underset{(y<a)}{\equiv} \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_1(x)\psi_1(y)$$

Quindi

$$P = \left|\langle \underset{\substack{\uparrow \\ \frac{\psi_1\psi_1}{\sqrt{2}}}}{\psi_{FIN}} | \underset{\substack{\uparrow \\ e^{-\frac{iE_{11}t}{\hbar}}\frac{\psi_1\psi_1}{\sqrt{2}} + \cancel{\frac{\psi_1\psi_2}{\sqrt{2}}}e^{-\frac{iE_{21}t}{\hbar}}}}{\psi_{IN}}\rangle\right|^2 = \frac{1}{4}$$

ortogonale

$\boxed{\text{Es II.}}$ Il formalismo è quello dell'esercizio III della prova III a cui rimandiamo per le notazioni.

Il trucco standard per trattare termini $\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2$ è scrivere
$2\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 = \underline{(\vec{S}_1+\vec{S}_2)}^2 - \vec{S}_1^{\,2} - \vec{S}_2^{\,2} = \underline{\vec{S}_T}^{\,2} - \vec{S}_1^{\,2} - \vec{S}_2^{\,2}$

e usare il fatto che ogni $\vec{S}^2 = \hbar^2 s(s+1)$ in ogni rappresentazione irriducibile del momento angolare.

Nel nostro caso $\vec{S}_1^{\,2} = \vec{S}_2^{\,2} = \hbar^2 \frac{3}{4}$ su ogni stato $|\pm\pm\rangle$ poiché entrambi gli spin sono 1/2.

Diverso la situazione per $\vec{S}^2$ poiché il momento angolare TOTALE può assumere valori $S=0$ e $S=1$

$$
\begin{array}{llll}
S=0 & \text{singoletto} & \vec{S}^2 = 0 & |00\rangle \\
S=1 & \text{tripletto} & \vec{S}^2 = \hbar^2 1\cdot(1+1) = 2\hbar^2 & |1M\rangle \; M=\pm1,0
\end{array}
$$

La base in cui H è diagonale è quella del momento angolare totale:

$$
H = \frac{\varepsilon}{\hbar}\left(\vec{S}^2 - \frac{3}{2}\hbar^2 I + \hbar S_z\right) = \begin{cases} |1M\rangle \ \text{tripletto} & E = \hbar\varepsilon\left(M+\frac{1}{2}\right) \\ |00\rangle \ \text{singoletto} & E = -\frac{3\varepsilon\hbar}{2} \end{cases}
$$

$$
E: \begin{array}{ll}
|++\rangle = |11\rangle & \frac{3}{2}\varepsilon\hbar \\
\frac{|+-\rangle+|-+\rangle}{\sqrt{2}} = |10\rangle & \frac{\varepsilon}{2}\hbar \\
|--\rangle = |1-1\rangle & -\frac{\varepsilon}{2}\hbar \\
\frac{|+-\rangle-|-+\rangle}{\sqrt{2}} = |00\rangle & -\frac{3}{2}\varepsilon\hbar
\end{array}
$$

Al tempo zero
$$|\psi(0)\rangle = |+-\rangle = \frac{|00\rangle + |10\rangle}{\sqrt{2}}$$

A tempo t
$$|\psi(t)\rangle = e^{i\frac{3}{2}\varepsilon t}\frac{|00\rangle}{\sqrt{2}} + e^{-i\frac{\varepsilon}{2}t}\frac{|10\rangle}{\sqrt{2}}$$

- $$P = |\langle -+|\psi(t)\rangle|^2 = \left|-\frac{1}{2}e^{i\frac{3}{2}\varepsilon t} + \frac{1}{2}e^{-i\frac{\varepsilon}{2}t}\right|^2 =$$
$$= \left| e^{\frac{i\varepsilon t}{2}}\left(\frac{-e^{+i\varepsilon t} + e^{-i\varepsilon t}}{2}\right)\right|^2 = \operatorname{sen}^2 \varepsilon t$$

$\underline{\vec{J} \equiv \vec{S}}$

- $P(S=0, S_z=0) = \left| \langle 00 | \psi(t) \rangle \right|^2 = \frac{1}{2}$

$$P(S=1, S_z=0) = \left| \langle 10 | \psi(t) \rangle \right|^2 = \frac{1}{2}$$

$$P(S=1, S_z=\pm\hbar) = 0$$

Quindi $P(S=0) = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $P(S_z = \pm\frac{\hbar}{2}) = 0$

$P(S=1) = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $P(S_z=0) = \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1$

$\boxed{\text{Es III.}}$ L'evoluzione temporale è data da

$$i\hbar\dot{\psi} = H\psi \qquad \text{dove} \qquad \psi = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Quindi
$$\begin{cases} i\hbar\dot{a} = \hbar h(t) a \\ i\hbar\dot{b} = 0 \\ i\hbar\dot{c} = -\hbar h(t) a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\dot{a}}{a} = -ih(t) \\ b = \text{costante} \\ \frac{\dot{c}}{c} = ih(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{d}{dt}\log a(t) = -ih(t) \\ \\ \frac{d}{dt}\log c(t) = +i\hbar c(t) \end{cases}$$

Integrando da 0 a t :
$$\begin{cases} \log\frac{a(t)}{a(0)} = -i\int_0^t h(\bar{t})d\bar{t} \\ \log\frac{c(t)}{c(0)} = i\int_0^t h(\bar{t})d\bar{t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a(t) = a(0)\, e^{-i\int_0^t h(\bar{t})d\bar{t}} \\ \dots \end{cases}$$

e infine
$$\psi(t) = \begin{pmatrix} a(0)\, e^{-i\int_0^t h(\bar{t})dt} \\ b(0) \\ c(0)\, e^{i\int_0^t h(\bar{t})d\bar{t}} \end{pmatrix} \equiv \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} e^{-i\int_0^t h(\bar{t})d\bar{t}} \\ 1 \\ e^{i\int_0^t h(\bar{t})d\bar{t}} \end{pmatrix}$$

perché $\psi(0) = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- $\psi(t)$ torna nello stato iniziale al tempo T per cui
$$e^{\pm i\int_0^T h(\bar{t})d\bar{t}} = 1 \Rightarrow \int_0^T h(\bar{t})\,d\bar{t} = 2\pi n$$

Torna per la prima volta quando
$$\int_0^T h(\bar{t})d\bar{t} = 2\pi$$

equazione che ho certamente soluzione perché $h(t)$ è positiva per ogni funzione con area tra 0 e ∞ maggiore di 2π.

- $$\langle B\rangle(t) = \langle\psi(t)|B|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt3}\left(e^{i\int_0^t h}, 1, e^{-i\int_0^t h}\right)\begin{pmatrix}1 & & \\ & -1 & \\ & & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{-i\int_0^t h}\\ 1\\ e^{i\int_0^t h}\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt3}$$
$$= \frac{1}{\sqrt3\sqrt3}(1-1) = 0$$

che non dipende da t poiché $[B,H]=0$ e B non dipende da t:
$$\frac{d\langle B\rangle}{dt} = \Big\langle \cancel{\frac{\partial B}{\partial t}} + \frac{1}{i\hbar}\underbrace{[B,H]}_{=0}\Big\rangle = 0$$

- $$\langle C\rangle = \frac{1}{\sqrt3}\left(e^{i\int_0^t h}, 1, e^{-i\int_0^t h}\right)\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{-i\int_0^t h}\\ 1\\ e^{i\int_0^t h}\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt3} =$$
$$= \frac{1}{3}\left(e^{i\int_0^t h(\bar t)d\bar t} + e^{-i\int_0^t h(\bar t)d\bar t}\right) = \frac{2}{3}\cos\int_0^t h(\bar t)d\bar t$$

Gli autovalori di C sono $\pm1, 0$ (C è non banale solo nel blocco 2×2 superiore dove coincide con σ_1) con autovettori
$$C=0 \quad \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \qquad C=\pm1 \quad \frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}1\\ \pm1\\ 0\end{pmatrix}$$

$$P(C=0) = \left|(0\,0\,1)\frac{1}{\sqrt3}\begin{pmatrix}e^{-i\int}\\1\\e^{i\int}\end{pmatrix}\right|^2 = \frac{1}{3}$$

$$P(C=\pm1) = \left|\frac{1}{\sqrt2}(1,\pm1,0)\begin{pmatrix}e^{-i\int_0^t h}\\1\\e^{i\int_0^t h}\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt3}\right|^2 = \left|\frac{1}{\sqrt6}\left(e^{-i\int_0^t h(\bar t)d\bar t}\pm1\right)\right|^2$$
$$= \left|\frac{e^{-\frac{i}{2}\int_0^t h(\bar t)d\bar t}}{\sqrt6}\left(e^{-\frac{i}{2}\int_0^t h(\bar t)d\bar t} \pm e^{\frac{i}{2}\int_0^t h(\bar t)d\bar t}\right)\right|^2$$
$$= \begin{cases}\frac{2}{3}\cos^2\frac{1}{2}\int_0^t h(\bar t)d\bar t & C=+1\\[2ex] \frac{2}{3}\sin^2\frac{1}{2}\int_0^t h(\bar t)d\bar t & C=-1\end{cases}$$

PROVA V

I) – Spettro $\hbar\omega\left(n_z+\frac{1}{2}\right) + 2\hbar\omega\left(n_x+\frac{1}{2}\right)+2\hbar\omega\left(n_y+\frac{1}{2}\right) = \hbar\omega\left(n_z+2n_x+2n_y+\frac{5}{2}\right)$

$|000\rangle \quad E = 5\hbar\omega/2$

$|001\rangle \quad E = 7\hbar\omega/2$

$|002\rangle \quad |100\rangle \quad |010\rangle \qquad E = 9\hbar\omega/2$

$|003\rangle \quad |101\rangle \quad |011\rangle \qquad E = 11\hbar\omega/2$

– Primo stato eccitato: $|001\rangle$. Per un oscillatore di frequenza $\tilde{\omega}$ si ha $\langle n|x^2|n\rangle = \frac{\hbar}{2m\tilde{\omega}}(2n+1)$. Quindi

$$\langle r^2\rangle = \underbrace{\langle 001|x^2|001\rangle}_{\substack{\tilde{\omega}=2\omega \\ \frac{\hbar}{2m(2\omega)} = \langle 0|x^2|0\rangle\langle 0|0\rangle\langle 1|1\rangle}} + \underbrace{\langle 001|y^2|001\rangle}_{\substack{\tilde{\omega}=2\omega \\ \frac{\hbar}{2m(2\omega)}}} + \underbrace{\langle 001|z^2|001\rangle}_{\substack{\tilde{\omega}=\omega \\ \frac{3\hbar}{2m\omega}}} = \frac{2\hbar}{m\omega}$$

$$\text{Poiché } |001\rangle \cong z\, e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}z^2 - \underbrace{\frac{m\omega}{\hbar}}_{\tilde{\omega}=2\omega}(x^2+y^2)} \sim r\cos\theta\, e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}r^2[\cos^2\theta + 2\,\mathrm{sen}^2\theta]}$$

$$\text{e} \quad L_z = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\phi} \Longrightarrow \langle 001|L_z|001\rangle = 0$$

$$L_z|001\rangle = 0$$

– Se aggiungo $V \to V - \xi z$ e'effetto è di traslare il centro delle oscillazioni in z e aggiungere un termine costante a E:

$$\frac{m\omega^2}{2}z^2 - \xi z = \frac{m\omega^2}{2}(z-z_0)^2 - \frac{2\xi^2}{m\omega^2} \; ; \qquad z_0 = \frac{2\xi}{m\omega^2}$$

~~Spettro~~ La degenerazione non cambia. In $\langle r^2\rangle$ e'unico cambiamento è

$$\langle 001|z^2|001\rangle = \langle 001|(z-z_0)^2|001\rangle + z_0^2$$

$$\langle 1|z|1\rangle = 0$$

e quindi $\langle r^2\rangle = \frac{2\hbar}{m\omega} + z_0^2$. E $\langle L_z\rangle = 0$.

II) $$H = \frac{\varepsilon}{\hbar}(\vec{S}^2 - \underbrace{\vec{S}_1^2}_{\frac{3}{4}\hbar^2 I} - \underbrace{\vec{S}_2^2}_{\frac{3}{4}\hbar^2 I}) + \rho S_z = \varepsilon\frac{\vec{S}^2}{\hbar} + \rho S_z - \frac{3}{2}\hbar\varepsilon$$

Nella base del momento angolare totale $|\psi(0)\rangle = |+-\rangle = \frac{|10\rangle + |00\rangle}{\sqrt{2}} \to |\psi(t)\rangle = e^{-i\rho t + \frac{3}{2}i\varepsilon t}\frac{|10\rangle}{\sqrt{2}} + e^{+\frac{3}{2}i\varepsilon t}\frac{|00\rangle}{\sqrt{2}}$

$$= e^{-it(\rho+\frac{\varepsilon}{2})}\frac{|10\rangle}{\sqrt{2}} + e^{\frac{3}{2}i\varepsilon t}\frac{|00\rangle}{\sqrt{2}}$$

$$\mathrm{Prob}(t; |-+\rangle) = |\langle -+|\psi(t)\rangle|^2$$

$$= \left| \frac{e^{-\frac{i\varepsilon t}{2}}}{2} - \frac{e^{\frac{3}{2}\varepsilon i t}}{2} \right|^2 = \mathrm{sen}^2\,\varepsilon t$$

Ora

$$|\psi(t)\rangle = e^{\frac{i\varepsilon t}{2}}\left[\cos\varepsilon t\,|+-\rangle \cancel{-}\, i\,\mathrm{sen}\,\varepsilon t\,|-+\rangle\right]$$

$$\langle\psi(t)|S_{1z}|\psi(t)\rangle = \frac{\hbar}{2}\left(\cos^2\varepsilon t - \mathrm{sen}^2\varepsilon t\right) = \frac{\hbar}{2}\cos 2\varepsilon t$$

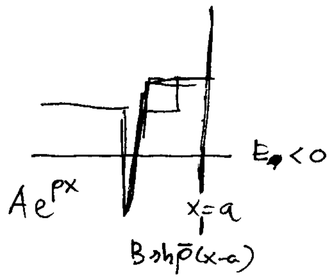
$$\langle\psi(t)|S_{1x}|\psi(t)\rangle = \langle\psi(t)|\frac{S_{1+}+S_{1-}}{2}|\psi(t)\rangle = \left(\cos\varepsilon t\,\langle +-| - i\,\mathrm{sen}\,\varepsilon t\,\langle -+|\right)\frac{\hbar}{2}\left(i\,\mathrm{sen}\,\varepsilon t\,|++\rangle + \cos\varepsilon t\,|--\rangle\right) = 0$$

$$\langle\psi(t)|S_{1y}|\psi(t)\rangle = \langle\psi(t)|\underbrace{\frac{S_{1+}-S_{1-}}{2i}|\psi(t)\rangle}_{|++\rangle\ |--\rangle} = 0$$

$$\langle\psi(t)|S_{2z}|\psi(t)\rangle = \frac{\hbar}{2}\left(\mathrm{sen}^2\varepsilon t - \cos^2\varepsilon t\right) = -\frac{\hbar}{2}\cos 2\varepsilon t \qquad \langle\psi(t)|S_{2xy}|\psi(t)\rangle = 0$$

NOTA: Infatti $\langle\vec S_{TOT}\rangle = 0$.

III)



• Stati legati:

$$\frac{\hbar^2\rho^2}{2m} = -E_0 \qquad \frac{\hbar^2\bar\rho^2}{2m} = -E_0 + V_0$$

$$\Downarrow$$

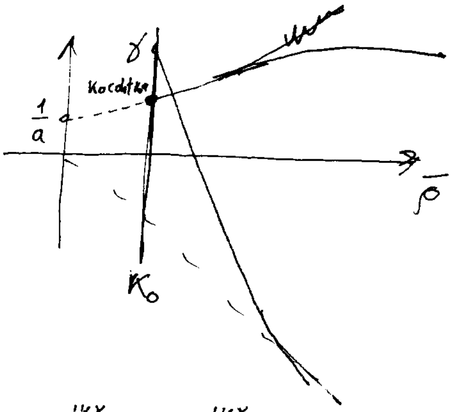
$$K_0 = \sqrt{\frac{2mV_0}{\hbar^2}} \qquad \bar\rho^2 = \rho^2 + K_0^2$$

raccordo $\begin{cases}\psi(a)=0\\ \psi(0^+)=\psi(0^-)\\ \psi'(0^+)=\psi'(0^-)-\gamma\psi(0)\end{cases}$

$$\begin{cases} A = -B\,sh\,\bar\rho a\\ \rho A - \gamma A = B\bar\rho\,ch\,\bar\rho a\end{cases} \Rightarrow th\,\bar\rho a = \frac{\bar\rho}{\gamma-\rho}$$

Quindi $\gamma - \sqrt{\bar\rho^2 - K_0^2} = \bar\rho\coth\bar\rho a$

uno stato legato se $\boxed{\gamma \geq K_0\coth K_0 a}$



• Energie $E>0$: Per $E>V_0$

$$\begin{cases} e^{ikx} + Ae^{-ikx} & x<0 & \frac{\hbar^2k^2}{2m} = E\\ B\,\mathrm{sen}\,\bar k(x-a) & 0\leq x\leq a & \frac{\hbar^2\bar k^2}{2m} = E - V_0\end{cases}$$

raccordo in $x=0$: $\begin{cases} 1+A = -B\,\mathrm{sen}\,\bar k a\\ ik(1-A) - \bar k B\cos\bar k a = \gamma(1+A)\end{cases}$ $\cancel{1+A = -B\,\mathrm{sen}\,\bar k a}$ $\cancel{1+A = \frac{\gamma B\,\mathrm{sen}\,\bar k a + \bar k B\cos\bar k a}{ik}}$

$$ik(1-A) + \bar k(1+A)\,\mathrm{cotg}\,\bar k a = \gamma(1+A) \Rightarrow A\left(\bar k\,\mathrm{cotg}\,\bar k a - ik - \gamma\right) = -\bar k\,\mathrm{cotg}\,\bar k a - ik + \gamma$$

$$\Rightarrow |A| = 1 \quad \text{e quindi} \quad R = |A|^2 = 1$$

Per $0<E<V_0$

$$\begin{cases} e^{ikx} + Ae^{-ikx} & x\leq 0 & \frac{\hbar^2k^2}{2m} = E\\ B\,sh\,\bar\rho(x-a) & 0\leq x\leq a & \frac{\hbar^2\bar\rho^2}{2m} = V_0 - E\end{cases}$$

raccordo in $x=0$

$$1+A = -B\,sh\,\bar\rho a$$
$$ik(1-A) - \bar\rho B\,ch\,\bar\rho a = \gamma(1+A) \Rightarrow ik(1-A) + \bar\rho(1+A)\coth\bar\rho a = \gamma(1+A)$$

uguale a prima con $\bar k\to\bar\rho$, $\mathrm{cotg}\to\coth$

quindi $|A|=1 \Rightarrow R=1$