Soluzione MQ. Luglio 09

I. il potenziale è

$$V = \frac{m\omega^2}{2}(x^2+y^2) + \frac{m\omega'^2}{2}z^2 - \varepsilon z$$

$$= \frac{m\omega^2}{2}(x^2+y^2) + \frac{m\omega'^2}{2}\left(z - \frac{\varepsilon}{m\omega'^2}\right)^2 - \frac{\varepsilon^2}{2m\omega'^2}$$

che è ancora un oscillatore armonico anisotropo, centrato in $z_0 = \varepsilon/m\omega'^2$ e con uno shift in energia

- $$E_{n_x n_y n_z} = \hbar\omega(n_x+n_y+1) + \hbar\omega'\left(n_z+\frac{1}{2}\right) - \frac{\varepsilon^2}{2m\omega'^2}$$

  con autofunzioni

  $$\psi_{\vec{n}}(x,y,z) = \phi_{n_x}(x;\omega)\,\phi_{n_y}(y;\omega)\,\phi_{n_z}(z-z_0;\omega')$$

  dove $\phi_n(t;\omega)$ sono le autofunzioni di un oscillatore armonico di frequenza ω $\left(N H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}t\right)e^{-\frac{m\omega t^2}{2\hbar}}\right)$

- Per un oscillatore nell'n-esimo stato eccitato

  $$\langle n|x|n\rangle = 0 \qquad \langle n|x^2|n\rangle = \frac{\hbar}{m\omega}\left(n+\frac{1}{2}\right)$$

  Lo stato fondamentale del sistema è $|000\rangle$

  $$\langle x\rangle = \langle 000|x|000\rangle = \underbrace{\langle 0|x|0\rangle}_{0}\,\underbrace{\langle 0|0\rangle}_{1}\,\underbrace{\langle 0|0\rangle}_{1} = 0$$

  $$\langle y\rangle = 0$$

  $$\langle z\rangle = \underbrace{\langle z-z_0\rangle}_{=0} + \langle z_0\rangle = \langle 000|z_0|000\rangle = z_0 = \frac{\varepsilon}{m\omega'^2}$$

  $$\langle r^2\rangle = \langle x^2\rangle + \langle y^2\rangle + \underbrace{\langle z^2\rangle}_{z=(z-z_0)+z_0} = \langle x^2\rangle + \langle y^2\rangle + \langle (z-z_0)^2\rangle + 2z_0\cancel{\langle z-z_0\rangle} + \langle z_0^2\rangle$$

  $$= \frac{\hbar}{2m\omega} + \frac{\hbar}{2m\omega} + \frac{\hbar}{2m\omega'} + \frac{\varepsilon^2}{m^2\omega'^4}$$

• $\varphi_0(t) = A e^{-\frac{m\omega}{\hbar}\frac{t^2}{2}}$ $\qquad \int |\varphi_0|^2 = |A|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{m\omega}{\hbar}t^2} = |A|^2 \sqrt{\frac{\pi\hbar}{m\omega}} = 1$

$$\boxed{\int_R e^{-\frac{\alpha}{2}t^2} = \sqrt{\frac{2\pi}{\alpha}}}$$

quindi $\varphi_0(t) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-\frac{m\omega}{\hbar}\frac{t^2}{2}}$

e $\quad \varphi_{0,0,0}(x,y,z) = \varphi_0(x,\omega)\,\varphi_0(y,\omega)\,\varphi_0(z-z_0,\omega')$

Se $\omega \to 2\omega$ il nuovo stato fondamentale sarà

[3 punti] $\quad \varphi'_{000}(x,y,z) = \varphi_0(x,2\omega)\,\varphi_0(y,2\omega)\,\varphi_0(z-z_0,\omega')$

e la probabilità richiesta

$$|\langle \varphi'_{000}|\varphi_{000}\rangle|^2 = \left|\left(\int \varphi_0^*(x,2\omega)\,\varphi_0(x,\omega)\,dx\right)\left(\int \varphi_0^*(y,2\omega)\,\varphi_0(y,\omega)\,dy\right)\underbrace{\left(\int |\varphi_0(z-z_0,\omega')|^2 dz\right)}_{1}\right|^2$$

sono uguali e pari a $\left(\frac{2m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}\int_R e^{-\frac{m\omega}{\hbar}\frac{x^2}{2}} e^{-\frac{2m\omega}{\hbar}\frac{x^2}{2}} =$

$$2^{1/4}\sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}} \int e^{-\frac{3m\omega}{\hbar}\frac{x^2}{2}}dx =$$

$$= 2^{1/4}\sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}}\sqrt{\frac{2\pi\hbar}{3m\omega}} = 2^{1/4}\sqrt{\frac{2}{3}}$$

quindi $|\langle \varphi'_{000}|\varphi_{000}\rangle|^2 = \frac{2}{3}\sqrt{2}\cdot\frac{2}{3}\sqrt{2} = \frac{8}{9}$

II. $\quad$ Le autofunzioni normalizzate di H sono:

$n \in \mathbb{Z} \qquad \psi_n(\phi) = \frac{e^{in\phi}}{\sqrt{2\pi}} \qquad E_n = \varepsilon(n^2+n)$

e $\psi_{t=0} = A\cos^2\phi = \frac{A}{4}\left(e^{2i\phi} + 2 + e^{-2i\phi}\right) \sim |2\rangle + 2|0\rangle + |-2\rangle$

e normalizzando $|\psi(0)\rangle = \frac{|2\rangle + 2|0\rangle + |-2\rangle}{\sqrt{6}}$

- $$|\psi(t)\rangle = \frac{e^{-\frac{i}{\hbar}6\varepsilon t}|2\rangle + 2|0\rangle + e^{-\frac{i}{\hbar}2\varepsilon t}|-2\rangle}{\sqrt{6}}$$

$$E_{n=2} = 6\varepsilon \qquad E_{n=0} = 0 \qquad E_{n=-2} = 2\varepsilon$$

- ψ_n sono autofunzioni sia di H che di $-i\frac{d}{d\phi}$:

$$P\left(-i\frac{d}{d\phi} = \pm 2\right) = \frac{1}{6} \qquad P(H = 6\varepsilon) = 1/6$$

$$P\left(-i\frac{d}{d\phi} = 0\right) = \frac{4}{6} \qquad P(H = 0) = 4/6$$

$$P(H = 2\varepsilon) = 1/6$$

$$\left\langle -i\frac{d}{d\phi}\right\rangle(t) = (2)\frac{1}{6} + (-2)\left(\frac{1}{6}\right) + 0\left(\frac{4}{6}\right) = 0$$

$$\langle H\rangle(t) = 6\varepsilon\frac{1}{6} + 0\cdot\frac{4}{6} + 2\varepsilon\frac{1}{6} = \frac{4}{3}\varepsilon$$

- Osserviamo che

[2 punti]

$$\psi_t(\phi) = \frac{1}{\sqrt{6}} e^{-\frac{6\varepsilon i t}{\hbar}} \frac{e^{2i\phi}}{\sqrt{2\pi}} + \frac{2}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{6}} e^{-\frac{2i\varepsilon t}{\hbar}} \frac{e^{-2i\phi}}{\sqrt{2\pi}}$$

contiene solo n pari, quindi è periodica di periodo π. Quindi

$$\int_0^{\pi} |\psi_t(\phi)|^2 d\phi = \frac{1}{2}\underbrace{\int_0^{2\pi} |\psi_t(\phi)|^2 d\phi}_{1} = \frac{1}{2}$$

(normalizzazione di ψ)

III. $\vec S_{TOT}=0$ significa stato di singoletto: (vedi libri/appunti)

$$|\psi(0)\rangle = \frac{|+-\rangle - |-+\rangle}{\sqrt{2}}$$

Gli stati $|\pm\pm\rangle$ sono autostati di $H=\mu(S_{1z}-S_{2z})$

$$|+-\rangle \rightarrow E=\mu\left(\tfrac{1}{2}-\left(-\tfrac{1}{2}\right)\right)\hbar=\mu\hbar$$

$$|-+\rangle \rightarrow E=\mu\left(-\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\right)\hbar=-\mu\hbar$$

Quindi
$$|\psi(t)\rangle = \frac{e^{-i\mu t}}{\sqrt{2}}|+-\rangle - \frac{e^{i\mu t}}{\sqrt{2}}|-+\rangle$$

- Gli stati di $\vec S_{TOT}=1$ sono il tripletto:

$$\begin{cases} |++\rangle & m=1 \\ \dfrac{|+-\rangle+|-+\rangle}{\sqrt{2}} & m=0 \\ |--\rangle & m=-1 \end{cases}$$

$m=\pm1$ sono ortogonali a $|\psi(t)\rangle$, mentre

$$\langle S=1, m=0|\psi(t)\rangle = \frac{\langle+-|+\langle-+|}{\sqrt{2}}\cdot\frac{e^{-i\mu t}|+-\rangle-e^{i\mu t}|-+\rangle}{\sqrt{2}}$$

$$=\frac{e^{-i\mu t}}{2}-\frac{e^{i\mu t}}{2}=-i\,\mathrm{sen}\,\mu t$$

Quindi
$$P(S_{TOT}=1)=\left|-i\,\mathrm{sen}\,\mu t\right|^2=\mathrm{sen}^2\mu t$$

- Gli autovettori di $\vec S\cdot\vec n$ con $\vec n=(\mathrm{sen}\,\theta\cos\varphi, \mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi, \cos\theta)$

[3punti] sono (vedi libri/appunti o calcolalo:)

$$\left|+\tfrac{\hbar}{2}\right\rangle_{\vec n}=\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta}{2}\,e^{-i\varphi/2}\\ \mathrm{sen}\frac{\theta}{2}\,e^{i\varphi/2}\end{pmatrix} \qquad \left|-\tfrac{\hbar}{2}\right\rangle_{\vec n}=\begin{pmatrix}-\mathrm{sen}\frac{\theta}{2}\,e^{-i\varphi/2}\\ \cos\frac{\theta}{2}\,e^{i\varphi/2}\end{pmatrix}$$

quindi per $\theta = \frac{\pi}{2}$ e $\varphi = \frac{\pi}{4}$

$$\left|\pm\frac{\hbar}{2}\right\rangle_{\vec{n}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \pm e^{-\frac{i\pi}{8}} \\ e^{\frac{i\pi}{8}} \end{pmatrix} = \pm\frac{e^{-\frac{i\pi}{8}}}{\sqrt{2}}|+\rangle + \frac{e^{\frac{i\pi}{8}}}{\sqrt{2}}|-\rangle$$

Lo stato finale richiesto è

$$\left|\frac{\hbar}{2}, -\frac{\hbar}{2}\right\rangle_{\vec{n}} \underset{\text{def}}{=} \underbrace{\left|\frac{\hbar}{2}\right\rangle_{\vec{n}}}_{\text{particella 1}} \otimes \underbrace{\left|-\frac{\hbar}{2}\right\rangle_{\vec{n}}}_{\text{particella 2}} = \frac{1}{2}\left[e^{-\frac{i\pi}{4}}|++\rangle + e^{\frac{i\pi}{4}}|--\rangle + |+-\rangle - |-+\rangle\right]$$

e la probabilità

$$P = \left|{}_{\vec{n}}\left\langle\frac{\hbar}{2}, -\frac{\hbar}{2}\right|\psi(t)\rangle\right|^2 = \left|\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{-i\mu t} + e^{i\mu t}\right)\right|^2 = \frac{1}{2}\cos^2\mu t$$