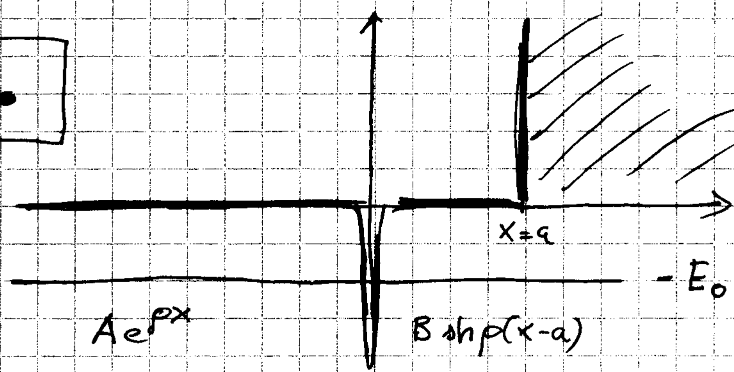
Soluzioni MQ Giugno 2009

Es I •



[10 punti]

- Potrei avere stati legati per $E<0$. In analogia col potenziale a delta, mi aspetto al più uno stato legato.

Le condizioni al contorno sono:

— integrabilità a $x\sim-\infty$ $\longrightarrow$ $\varphi(x) = A e^{\rho x}$ $\quad x<0$

$$\boxed{-\frac{\hbar^2\rho^2}{2m} = -E_0 \quad \rho>0}$$

— annullamento a $x=a$ $\longrightarrow$ $\varphi(x) = B\,sh\,\rho(x-a)$ $\quad 0<x<a$

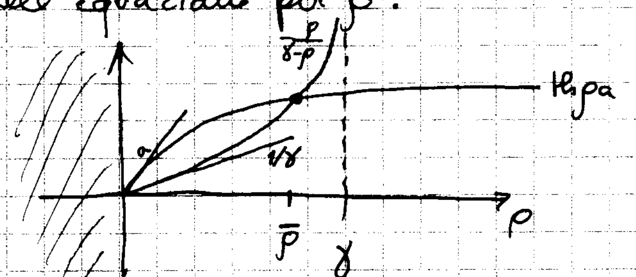
— $\begin{cases} \varphi(0+) = \varphi(0-) \\ \varphi'(0+) - \varphi'(0-) = -\gamma\varphi(0) \end{cases}$ in $x=0$ $\longrightarrow$ $\begin{cases} A = -B\,sh\,\rho a \\ B\rho\,ch\,\rho a - \rho A = -\gamma A \end{cases}$

— $\varphi(x) \equiv 0 \quad x>a$

$$\downarrow$$

$$\boxed{th\,\rho a = \frac{\rho}{\gamma-\rho}}$$

Studio grafico dell'equazione per ρ:



ci sarà una soluzione se la tangente in $\rho=0$ alla curva $\frac{\rho}{\gamma-\rho}$ è sotto la tangente a $th\,\rho a$

cioè $\frac{1}{\gamma} < a \Rightarrow \boxed{\gamma a \geq 1}$

Per $\gamma a \geq 1$ ci sarà un unico stato legato con energia $E_0 = \frac{\hbar^2\bar\rho^2}{2m}$ dove $\bar\rho$ è determinato dall'intersezione delle due curve.

[5 punti]

- Devo normalizzare la funzione d'onda dello stato legato

$$\varphi_{\bar\rho}(x) = \begin{cases} A e^{\bar\rho x} & x<0 \\ B\,sh\,\bar\rho(x-a) = -A\,\frac{sh\,\bar\rho(x-a)}{sh\,\bar\rho a} & 0<x<a \\ 0 & x>a \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi_{\bar{p}}(x)|^2 dx = A^2\left[\int_{-\infty}^{0} e^{2\bar{p}x}dx + \int_0^a \frac{sh^2\bar{p}(x-a)}{sh^2\bar{p}a}dx\right] =$$

$$A^2\left[\frac{1}{2\bar{p}} + \frac{1}{sh^2\bar{p}a}\int_0^a \frac{ch\,2\bar{p}(x-a)-1}{2}dx\right]$$

$$= A^2\left[\frac{1}{2\bar{p}} + \frac{1}{sh^2\bar{p}a}\left(-\frac{a}{2} + \frac{sh\,2\bar{p}a}{4\bar{p}}\right)\right] = 1$$

$$P(x\in[0,a]) = \int_0^a |\varphi_{\bar{p}}(x)|^2 dx = A^2\int_0^a \frac{sh^2\bar{p}(x-a)}{sh^2\bar{p}a}dx = \frac{\dfrac{sh\,2\bar{p}a - 2\bar{p}a}{4\bar{p}\,sh^2\bar{p}a}}{\dfrac{1}{2\bar{p}} + \dfrac{sh\,2\bar{p}a-2\bar{p}a}{4\bar{p}\,sh^2\bar{p}a}}$$

$$= \frac{(sh\,2\bar{p}a - 2\bar{p}a)}{2sh^2\bar{p}a + (sh\,2\bar{p}a - 2\bar{p}a)}$$

Es II. Poiché $Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$ e $Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta$, $\psi(\vec{x})$ si può riscrivere come

$$\psi(\vec{x}) = f(r)r\left[1+\cos\theta\right] = \sqrt{4\pi}f(r)r\left[Y_{00}(\theta,\varphi) + \frac{1}{\sqrt{3}}Y_{10}(\theta,\varphi)\right]$$

[10 punti]

Ai fini dello studio di grandezze che dipendono solo dal momento angolare $\vec{L}$, la dipendenza radiale di $\psi(\vec{x})$, che è moltiplicativa, non è importante: $\psi \sim Y_{00} + \frac{1}{\sqrt{3}}Y_{10}$. ψ va però correttamente normalizzato in modo che $\int|\psi|^2 \operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\varphi = 1$:

$$\psi(\theta,\varphi) = \frac{\sqrt{3}}{2}Y_{00}(\theta,\varphi) + \frac{1}{2}Y_{10}(\theta,\varphi)$$

o anche in forma astratta

$$|\psi\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}|00\rangle + \frac{1}{2}|10\rangle$$

una sovrapposizione di stati con $l=0$ e $l=1$. Consideriamo quindi lo spazio di Hilbert associato a $l=0$ e $l=1$ che consiste delle combinazioni lineari di $|00\rangle, |11\rangle, |10\rangle, |1,-1\rangle$ che decompaniamo naturalmente in

$$\mathcal{H} = \underset{\{|00\rangle\}}{\mathcal{H}_{l=0}} \oplus \underset{\{|11\rangle,|10\rangle,|1-1\rangle\}}{\mathcal{H}_{l=1}}$$

L'Hamiltoniana $H=\mu B L_y$ ~~è diagonale~~ lascia invariati $\mathcal{H}_{\ell=0}$ e $\mathcal{H}_{\ell=1}$ ed agisce come 0 su $\mathcal{H}_{\ell=0}$ e come la matrice (cfr testi)

$$\mu B L_y^{(\ell+1)} = \mu B \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0 & -i & 0\\ i & 0 & -i\\ 0 & i & 0\end{pmatrix} \quad \text{su } \mathcal{H}_{\ell=1}$$

Sappiamo che gli autovalori di L_y in $\mathcal{H}_{\ell=1}$ sono $\pm\hbar, 0$ (come quelli di qualunque componente del momento angolare per $\ell=1$) da cui è facile ricavare gli autovettori $|1m\rangle_y$

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \equiv |10\rangle_y \qquad \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\ \pm\sqrt{2}i\\ -1\end{pmatrix} = |1\pm1\rangle_y}$$

- $L_y=0$ $\qquad L_y\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=0 \qquad \begin{cases}-ib=0\\ ia-ic=0\\ ib=0\end{cases}$

- $L_y=\pm\hbar$ $\qquad L_y\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\pm\hbar\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} \qquad \begin{cases}-ib\frac{\hbar}{\sqrt{2}}=\pm\hbar a\\ i(a-c)\frac{\hbar}{\sqrt{2}}=\pm\hbar b\\ ib\frac{\hbar}{\sqrt{2}}=\pm\hbar c\end{cases}$

$$\Downarrow$$

$$a=-c, \quad \pm b=\sqrt{2}ia$$

Analogamente, gli autovettori di $L_x=\frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$ in $\mathcal{H}_{\ell=1}$ sono $|10\rangle_x=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$, $|1\pm1\rangle_x=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\ \pm\sqrt{2}\\ 1\end{pmatrix}$. Quelli di $L_z=\hbar\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$ sono ovviamente $|11\rangle=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $|10\rangle=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $|1-1\rangle=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

Con queste informazioni:

- $$|\psi(0)\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}|00\rangle+\frac{1}{2}|10\rangle \underset{\text{nella base di } L_y}{=} \frac{\sqrt{3}}{2}|00\rangle_y + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}i}\left(|11\rangle_y-|1-1\rangle_y\right)\right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}|00\rangle_y + \frac{|11\rangle_y}{2\sqrt{2}i} - \frac{|1-1\rangle_y}{2\sqrt{2}i}$$

e l'evoluto temporale

$$|\psi(t)\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}|00\rangle_y + \underbrace{\frac{e^{-i\mu Bt}}{2\sqrt{2}i}|11\rangle_y - \frac{e^{i\mu Bt}}{2\sqrt{2}i}|1-1\rangle_y}_{\text{come vettore in } \mathcal{H}_{\ell=1} \text{ si può riscrivere come}}$$

$$\begin{pmatrix}-\frac{\operatorname{sen}\mu Bt}{2\sqrt{2}}\\ \frac{\cos\mu Bt}{2}\\ \frac{\operatorname{sen}\mu Bt}{2\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

- $P(\vec{L}^2=0) = \frac{3}{4}$ $\longleftarrow$ da $|00\rangle$

[3 punti] $P(\vec{L}^2 = 2\hbar^2) = \frac{1}{8}+\frac{1}{8} = \frac{1}{4}$ $\longleftarrow$ da $|1\pm1\rangle_y$

$$P(L_z=0) = \frac{3}{4} + \frac{\cos^2\mu Bt}{4} \quad \longleftarrow \text{ da } |00\rangle \text{ e parte in } \mathcal{H}_{\ell=1}$$

$$P(L_z=\pm\hbar) = \frac{\operatorname{sen}^2\mu Bt}{8} \quad \longleftarrow \text{ da } \mathcal{H}_{\ell=1}$$

$$P(L_x=0) = \frac{3}{4} + \left| \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)\begin{pmatrix} -\operatorname{sen}\mu Bt/2\sqrt{2} \\ \cos\mu Bt/2 \\ \operatorname{sen}\mu Bt/2\sqrt{2} \end{pmatrix}\right|^2 = \frac{3}{4} + \frac{\operatorname{sen}^2\mu Bt}{4}$$

$$P(L_x=\pm\hbar) = \left| \frac{1}{2}(1,\pm\sqrt{2},1)\cdot\begin{pmatrix} -\operatorname{sen}\mu Bt/2\sqrt{2} \\ \cos\mu Bt/2 \\ \operatorname{sen}\mu Bt/2\sqrt{2} \end{pmatrix}\right|^2 = \frac{\cos^2\mu Bt}{8}$$

Tutte le probabilità sommano correttamente a 1.

- Con le probabilità, i valori medi si calcolano

[2 punti] con le formule $\langle L_z\rangle = \sum m\, P(L_z=m)$

e simile per $\langle L_x\rangle$:

$$\langle L_z\rangle = 0\cdot P(L_z=0) + \hbar P(L_z=\hbar) - \hbar P(L_z=-\hbar) = 0$$

$$\langle L_x\rangle = 0\cdot P(L_x=0) + \hbar P(L_x=\hbar) - \hbar P(L_x=-\hbar) = 0$$

$\boxed{\bullet\ \text{Es III}}$

[10 punti]

H si può anche riscrivere come

$$H = \hbar\mu\, \vec{n}\cdot\vec{\sigma} \quad \text{dove} \quad \vec{n} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

(rotazione di $-\frac{\pi}{4}$ in (xy))

$\vec{n}\cdot\vec{\sigma}$ ha autovalori ±1. Gli autovettori si calcolano con le formule generali (cfr testi) o direttamente:

$$\vec{n}\cdot\vec{\sigma}\begin{pmatrix} a \\ b\end{pmatrix} = \pm\begin{pmatrix} a \\ b\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & \frac{1+i}{\sqrt{2}} \\ \frac{1-i}{\sqrt{2}} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b\end{pmatrix} = \pm\begin{pmatrix} a \\ b\end{pmatrix} \rightarrow \pm a = \frac{1+i}{\sqrt{2}}\, b$$

Quindi $|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \frac{1+i}{\sqrt{2}} \\ 1\end{pmatrix}$ $\qquad |-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -\frac{1+i}{\sqrt{2}} \\ 1\end{pmatrix}$

[Ricordarsi di normalizzare!]

- $|\psi(0)\rangle = \frac{|+\rangle + |-\rangle}{\sqrt{2}}$ quindi $|\psi(t)\rangle = e^{-i\mu t}\frac{|+\rangle}{\sqrt{2}} + e^{i\mu t}\frac{|-\rangle}{\sqrt{2}}$

o anche $\begin{pmatrix} -\frac{(1+i)}{\sqrt{2}}\, i \operatorname{sen}\mu t \\ \cos\mu t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1-i}{\sqrt{2}} \operatorname{sen}\mu t \\ \cos\mu t \end{pmatrix}$

quindi Probabilità che a t sia in $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \doteq \operatorname{sen}^2\mu t$

[3 punti]

- C ha autovalori ± 1 con autovettori $|+\rangle_C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $|-\rangle_C = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$P(C=1) = \left| {}_C\langle + | \psi(t)\rangle \right|^2 = \operatorname{sen}^2\mu t$$

$$P(C=-1) = \left| {}_C\langle - | \psi(t)\rangle \right|^2 = \cos^2\mu t$$

$$\langle C \rangle = 1\, P(C=1) - 1\, P(C=-1) = \operatorname{sen}^2\mu t - \cos^2\mu t = -\cos 2\mu t$$

[2 punti]

- le teorema di Ehrenfest $\frac{d\langle C\rangle(t)}{dt} = \left\langle \frac{\partial C}{\partial t} \right\rangle + \frac{1}{i\hbar}\langle [C, H] \rangle$

$\frac{\partial C}{\partial t} = 0$ perché C non dipende esplicitamente da t

$$[C, H] = \hbar\mu\left[\sigma_3, \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sqrt{2}}\right] = \left(\frac{2i\,\sigma_2}{\sqrt{2}} + \frac{2i\,\sigma_1}{\sqrt{2}}\right)\hbar\mu = \sqrt{2}\, i\,(\sigma_1 + \sigma_2)\hbar\mu$$

$$\langle [C, H] \rangle = \langle \psi(t) | [C, H] | \psi(t) \rangle = \hbar\mu \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}} \operatorname{sen}\mu t, \cos\mu t \right) \sqrt{2}\, i \begin{pmatrix} 0 & 1-i \\ 1+i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1-i}{\sqrt{2}} \operatorname{sen}\mu t \\ \cos\mu t \end{pmatrix}$$

$$= \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}} \operatorname{sen}\mu t, \cos\mu t \right) \cdot \begin{pmatrix} (1-i)\cos\mu t \\ \operatorname{sen}\mu t\, \sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \sqrt{2}\, i\, \hbar\mu$$

$$= 4i \operatorname{sen}\mu t \cos\mu t\, \hbar\mu = 2i \operatorname{sen} 2\mu t \cdot \hbar\mu$$

$$\begin{cases} \frac{d\langle C\rangle}{dt} = \frac{d}{dt}\left(-\cos 2\mu t\right) = 2\mu \operatorname{sen} 2\mu t \\ \quad ||| \\ \frac{1}{i\hbar}\langle [C, H] \rangle = 2\mu \operatorname{sen} 2\mu t \end{cases}$$

Ehrenfest ok!