ES. A1 Destri, 28/02/2006, es.2 $\boxed{1}$

Particella in 3 dimensioni sottoposta a potenziale armonico isotropico con frequenza ω e <u>confinata nel semispazio $x \geq 0$.</u>

1) autovalori e autofunzioni di $\hat{H}$

2) Prob (L_z) se osservo $H = \frac{9}{2}\hbar\omega$ e $L_x = 2\hbar$. [DIFFICILE]

[IMPOSTARE SOLO IL CONTO PER Prob(L_z)]

ES. A2 Destri, 14/02/2007, es.2 $\boxed{8}$

Particella di massa m in 3 dimensioni, con potenziale armonico $V(\vec{x}) = \frac{m\omega^2}{2}(x^2+y^2)$

1) costanti del moto

2) Una misura contemporanea di p_z ed E dà i risultati

$$p_z = \bar{p}_z$$
$$E = 3\hbar\omega + \frac{\bar{p}_z^2}{2m}$$

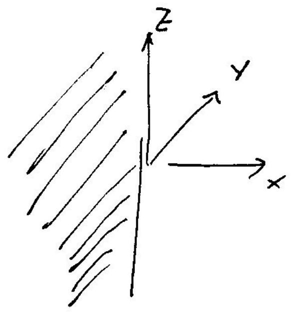
a) Scrivere il + generico stato compatibile con la misura

b) Quanto è degenere l'energia $E = 3\hbar\omega + \frac{\bar{p}_z^2}{2m}$?

c) Quali valori di L_z posso osservare ?

Es A1   Desbi 28/02/2006

Oscillatore armonico isotropo confinato in $x \geq 0$. trovare
1) autovalori e autofunzioni di H
2) Prob(L_z) se osservo $H = \frac{9}{2}\hbar\omega$ e $L_x = 2\hbar$



Il fatto che la particella sia confinata in $x \geq 0$ significa che

$$V(x,y,z) = \begin{cases} +\infty & x \leq 0 \\ \frac{m\omega^2}{2}(x^2+y^2+z^2) & x > 0 \end{cases}$$

Le autofunzioni dovranno soddisfare $\psi(x,y,z) \equiv 0$ per $x \leq 0$.
Per l'oscillatore ordinario le autofunzioni sono

$|n_x\, n_y\, n_z\rangle$ $\psi_{n_x n_y n_z} = U_{n_x}(x)\, U_{n_y}(y)\, U_{n_z}(z)$

$$U_n(t) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \frac{H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\, t\right)}{\sqrt{2^n n!}}\, e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}t^2}$$

$H_0(t) = 1 \quad H_1(t) = 2t \quad H_2(t) = 4t^2-2 \quad H_3(t) = 8t^3-12t$

1) Dovendo ψ annullarsi per $x=0$ solo i polinomi H_{n_x} dispari sopravviveranno
$\Rightarrow \boxed{n_x \text{ dispari}}$. Autostati e autovalori sono

$$\tilde{\psi}_{n_x n_y n_z} = \begin{cases} \sqrt{2}\, U_{n_x}(x) U_{n_y}(y) U_{n_z}(z) & x \geq 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases} ; \quad E = \hbar\omega\left(n_x + n_y + n_z + \frac{3}{2}\right) \quad \begin{cases} n_y, n_z \in \mathbb{N} \\ n_x \text{ dispari} \end{cases}$$

il fattore $\sqrt{2}$ è dovuto al fatto che $\int_{-\infty}^{+\infty} |U_{n_x}(x)|^2 dx = 1 \Rightarrow \int_0^{\infty} |U_{n_x}(x)|^2 dx = 1/2$ e noi dobbiamo integrare solo da 0 a ∞ in x per normalizzare $\tilde{\psi}$ poiché $\tilde{\psi} = 0$ per $x \leq 0$.

2) Poiché $H = \frac{9}{2}\hbar\omega \Rightarrow \begin{cases} n_x + n_y + n_z = 3 \\ n_x \text{ dispari} \end{cases} \Longrightarrow |300\rangle, |120\rangle, |111\rangle, |102\rangle$

Scegliendo coordinate polari nel piano (y,z): $y = \rho\cos\alpha$, $z = \rho\,\text{sen}\,\alpha$ ho che $L_x = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\alpha}$ (L_x: rotazioni attorno a asse x) e quindi gli autostati di L_x sono della forma $e^{im\alpha} \sim (y+iz)^m$. Poiché i 4 stati sono della forma

(proporzionali a:) $(8x^3-8x)\,e^{-\frac{\alpha x^2}{2}}$; $2x(4y^2-2)\,e^{-\frac{\alpha r^2}{2}}$; $8xyz\,e^{-\frac{\alpha r^2}{2}}$; $2x(4z^2-2)\,e^{-\frac{\alpha r^2}{2}}$ $\alpha = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}$

e sono polinomi cubici, l'unica combinazione proporzionale a $(y+iz)^2$ che posso costruire è

$$\boxed{N x (y+iz)^2 e^{-\frac{\alpha}{2}r^2}} \qquad L_x = 2\hbar$$

che è proporzionale a

$$c_1\underbrace{\left(|120\rangle - |102\rangle\right)} + c_2\,|111\rangle$$

notare che per simmetria $y \leftrightarrow z$ il termine lineare del polinomio H_2 cancella e i termini cubici riproducono $x(y^2-z^2)$
$|120\rangle$ e $|102\rangle$ hanno lo stesso coeff. di normalizzazione per simmetria

Usando ora coordinate sferiche standard con asse di riferimento z, L_z diventa $L_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi}$ e la funzione d'onda

$$\tilde{\psi}(x,y,z) = N \sin\theta \cos\varphi \left(\sin\theta \sin\varphi + i \cos\theta \right)^2 r^3 e^{-\frac{\kappa}{2} r^2}$$

Le autofunzioni di L_z sono $\frac{e^{im\varphi}}{\sqrt{2\pi}} = |m\rangle$ normalizzate con la misura $d\phi$ in $[0, 2\pi]$. Proiettando su $|m\rangle$ ottengo la probabilità che $L_z = m\hbar$ e contemporaneamente la particella sia in un punto descritto da (θ, r). Le probabilità per L_z si otterranno integrando la probabilità ottenuta in r e θ con la misura $r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta$

$$\text{Prob}\left(L_z = m\hbar \right) = \int_0^\infty r^2 dr \int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta \left| \langle m | \tilde{\psi} \rangle \right|^2$$

dove però $\langle m | \tilde{\psi} \rangle = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\phi \, \frac{e^{-im\phi}}{\sqrt{2\pi}} \tilde{\psi}(r,\theta,\varphi)$ è integrato solo sulla parte di spazio con $x \geq 0$. In generale questi integrali sono diversi da zero per ogni m (o quasi). La dipendenza da r è uguale per ogni m e scompare nella normalizzazione della probabilità. In θ invece occorrerà integrare ogni $|\langle m | \tilde{\psi} \rangle|^2$.

Particella di massa m in 3 dimensioni, con potenziale armonico $V(\vec{x}) = \frac{m\omega^2}{2}(x^2+y^2)$

1) costanti del moto

2) Una misura contemporanea di p_z ed E dà i risultati

$$p_z = \bar{p}_z$$
$$E = 3\hbar\omega + \frac{\bar{p}_z^2}{2m}$$

a) Scrivere il + generico stato compatibile con la misura

b) Quanto è degenere l'energia $E = 3\hbar\omega + \frac{\bar{p}_z^2}{2m}$?

c) Quali valori di L_z posso osservare ?

1) Le costanti del moto sono gli operatori commutanti con $\hat{H}$:

$[\hat{H},\hat{H}]=0$ [conservazione dell'energia]

$[\hat{H},\hat{p}_z]=0$ [H invariante per traslazioni lungo l'asse z]

$[\hat{H},\hat{L}_z]=0$ [H invariante per rotazioni attorno all'asse z]

dim $\hat{L}_z = xp_y - yp_x$

$$[p_x^2+p_y^2, xp_y-yp_x] = [p_x^2,x]p_y - [p_y^2,y]p_x =$$
$$= -2i\hbar p_x p_y + 2i\hbar p_y p_x = 0 \quad ([p_x,p_y]=0)$$
$$[x^2+y^2, xp_y-yp_x] = \quad \cdots \quad = 0$$

$[\hat{H},\hat{H}_{xy}]=0$ dove $H_{xy} = \frac{p_x^2+p_y^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}(x^2+y^2)$

dim $H = H_{xy} + \frac{p_z^2}{2m}$ e ovviamente $[H_{xy},H_{xy}]=0$

$[p_z^2, H_{xy}]=0$

Quindi sono costanti del moto $\{\hat{H},\hat{p}_z,\hat{L}_z,\hat{H}_{xy}\}$.

2) $[\hat{H},\hat{p}_z]=0$, quindi posso essere in un autostato simultaneo di H e p_z. Parto dal punto b)

b) Se $E = 3\hbar\omega + \frac{\bar{p}_z^2}{2m}$, lo stato generico compatibile è t.c. $\begin{cases} n_x+n_y=2 \\ p_z = \pm\bar{p}_z \end{cases}$

Quindi

n_x	n_y
2	0
1	1
0	2

$\rightarrow$ 3 possibilità

$p_z = \pm \bar{p}_z \rightarrow$ 2 possibilità

$\Rightarrow$ se $E = 3\hbar\omega + \frac{\bar{p}_z^2}{2m}$, la degenerazione è 6 e

lo stato + compatibile sarebbe

$$|\psi\rangle = |\bar{p}_z\rangle \otimes \left[a_{20}|2,0\rangle + a_{11}|1,1\rangle + a_{02}|0,2\rangle\right] +$$
$$|-\bar{p}_z\rangle \otimes \left[b_{20}|2,0\rangle + b_{11}|1,1\rangle + b_{02}|0,2\rangle\right]$$

con $\hat{p}_z|\bar{p}_z\rangle = \bar{p}_z|\bar{p}_z\rangle$

$$\hat{H}_{xy}|n_x,n_y\rangle = (n_x+n_y+1)\hbar\omega\,|n_x,n_y\rangle$$

$$\hat{H}\,|\bar{p}_z,n_x,n_y\rangle = (n_x+n_y+1)\hbar\omega + \frac{\bar{p}_z^2}{2m}$$

a) Se misuro anche $p_z = \bar{p}_z$, la degenerazione è diminuita $(6\rightarrow 3)$ e lo stato + generico compatibile rimane

$$|\psi\rangle = |\bar{p}_z\rangle \otimes \left[a_{20}|2,0\rangle + a_{11}|1,1\rangle + a_{02}|0,2\rangle\right]$$

Se lo voglio esprimere come funzione d'onda nello spazio delle coordinate (x,y,z), si ha:

$$\psi(\vec{x}) = \langle\vec{x}|\psi\rangle = \langle z|\bar{p}_z\rangle\cdot\left(a_{20}\langle x,y|2,0\rangle + a_{11}\langle x,y|1,1\rangle + a_{02}\langle x,y|0,2\rangle\right) =$$

$$= \frac{e^{i\bar{p}_z z/\hbar}}{\sqrt{2\pi\hbar}}\left[a_{20}\,\psi_{20}(x,y) + a_{11}\,\psi_{11}(x,y) + a_{02}\,\psi_{02}(x,y)\right]$$

prodotto autofunz. di oscillatore armonico in x e y.

c) Per stabilire i valori osservabili di $\hat{L}_z$, è rilevante solo la parte di funzione d'onda che dipende da x e y (infatti $\hat{L}_z f(z) g(x,y) = f(z)\,\hat{L}_z\, g(x,y)$)

Autostati di $\hat{L}_z$: $\langle\varphi|m\rangle = \Phi_m(\varphi) = \frac{e^{im\varphi}}{\sqrt{2\pi}}$ $\quad m = 0, \pm1, \pm2, \dots$ $\quad L_z|m\rangle = m\hbar|m\rangle$

Guardo quali autostati di L_z compaiono in Ψ; guardo solo le variabili (x,y):

$$\Rightarrow a_{20}\boxed{\Psi_{20}(x,y)} + a_{11}\boxed{\Psi_{11}(x,y)} + a_{02}\boxed{\Psi_{02}(x,y)}$$

polinomi presenti

$$\Psi_{20}(x,y) \propto 4x^2-2 \qquad \begin{cases} x^2 \propto \cos^2\varphi \propto \left(e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}\right)^2 = e^{2i\varphi}+e^{-2i\varphi}+2 & \Rightarrow m=0,\pm 2 \\ 1 & \Rightarrow m=0 \end{cases}$$

$$\Psi_{11}(x,y) \propto xy \qquad xy \propto \operatorname{sen}\varphi\cos\varphi \propto \operatorname{sen}2\varphi \propto e^{2i\varphi}-e^{-2i\varphi} \qquad \Rightarrow m=\pm 2$$

$$\Psi_{02}(x,y) \propto 4y^2-2 \qquad \begin{cases} y^2 \propto \operatorname{sen}^2\varphi \propto \left(e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}\right)^2 = e^{2i\varphi}+e^{-2i\varphi}-2 & \Rightarrow m=0,\pm 2 \\ 1 & \Rightarrow m=0 \end{cases}$$

Quindi i valori possibili di $\hat{L}_z$ sono $L_z=\{0, \pm 2\hbar\}$