

## Equazione di Schrödinger - problemi unidimensionali - Testi

**Esercizio 1.** (25Lug94) – Una particella di massa  $m$  si muove su una retta ed è soggetta al potenziale

$$V(x) = \begin{cases} 0, & \text{per } |x| > a, \quad a > 0, \\ -v, & \text{per } |x| < a, \quad v > 0. \end{cases}$$

a) Si trovi un'espressione esplicita (approssimata) per l'energia del livello fondamentale valida per  $v$  molto piccolo; b) usando la stessa approssimazione, si calcoli la probabilità che la particella si trovi nel segmento  $|x| < a$ .

**Esercizio 2.** (18Dic95) – Una particella è libera di muoversi su una retta ed al tempo  $t = 0$  è descritta dalla funzione d'onda

$$\psi(x) = \sqrt{a} \exp(-a|x|).$$

a) Si calcoli la funzione d'onda nello spazio dei momenti; b) si discuta la normalizzazione della funzione d'onda  $H\psi$  con  $H = \frac{p^2}{2m}$  sia nella rappresentazione della coordinata che in quella del momento; c) si calcoli il valore medio di  $H$  utilizzando le due rappresentazioni.

**Esercizio 3.** (23Lug96) – Una particella di massa  $m$ , vincolata a muoversi sulla semiretta  $x \geq 0$ , è sottoposta ad un potenziale  $V(x) = -v$  per  $x < a$  e  $V(x) = 0$  per  $x > a$  ( $v > 0$ ,  $a$  fissato). a) verificare che si hanno stati legati solo se  $v > v_0$  e determinare il valore di  $v_0$ ; b) verificare che esistono  $n$  stati legati se  $v_{n-1} < v \leq v_n$  e determinare il valore di  $v_n$ ; c) supponendo che  $v = v_n + \varepsilon$ , con  $0 < \varepsilon \ll v_n$  determinare (approssimativamente) l'energia dell' $n + 1$ -esimo livello eccitato.

**Esercizio 4.** (17Set98) – Una particella di massa  $m$  si muove sulla semiretta  $x \geq 0$  con barriera impenetrabile nell'origine ed è soggetta al potenziale

$$V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2x^2.$$

Trovare i livelli energetici e le loro funzioni d'onda. Mostrare che la densità di probabilità è periodica con periodo  $T = \pi/\omega$ .

## Equazione di Schrödinger - problemi unidimensionali - Soluzioni

**Soluzione 1** (25Lug94). – Riferimento: §1.

Sia  $E < 0$  l'energia dello stato fondamentale e poniamo  $k = \sqrt{2m|E|}/\hbar$ ,  $\alpha = \sqrt{2m(v - |E|)}/\hbar$ . Lo stato fondamentale  $\psi(x)$  è una funzione pari e dunque si ha

$$\psi(x) = \begin{cases} A \cos \alpha x, & |x| \leq a, \\ B e^{-k|x|}, & |x| \geq a. \end{cases}$$

Imponendo la continuità di  $\psi$  e  $\psi'$  otteniamo l'equazione per l'energia dello stato fondamentale

$$k = \alpha \tan \alpha a \quad \implies \quad k \sim \alpha a^2,$$

dove si è usato il fatto che sia  $k$  che  $\alpha$  sono piccoli. Risolvendo l'ultima equazione rispetto all'energia, all'ordine più basso si ha

$$E \sim -\frac{2ma^2v^2}{\hbar^2}.$$

Questo dimostra anche che esiste sempre almeno uno stato legato.

In questa approssimazione  $A \sim B$  e normalizzando si ricava  $2|A|^2 \sim 1/k \sim 2mav/\hbar^2$ , per cui

$$\mathcal{P}(|x| \leq a) = \int_{-a}^a |\psi|^2 dx \sim 2a|A|^2 = \frac{2ma^2v}{\hbar^2}.$$

**Soluzione 2** (18Dic95). – Riferimento: §3.

La funzione d'onda è già normalizzata. Nella rappresentazione degli impulsi abbiamo (in una dimensione)

$$\tilde{\psi}(k) = \sqrt{\frac{a}{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} e^{-a|x|} dx = \sqrt{\frac{a}{2\pi}} \frac{2a}{a^2 + k^2}.$$

Si vede subito che la funzione d'onda  $H\psi$  non è normalizzabile. Infatti, nella rappresentazione degli impulsi  $H = \hbar^2 k^2 / 2m$  è un operatore moltiplicativo e  $H\tilde{\psi}(k) \rightarrow \text{costante}$  per  $k \rightarrow \infty$ , mentre nella rappresentazione delle coordinate,  $H$  è un operatore differenziale e  $\psi(x)$  non è derivabile in  $x = 0$ . In senso generalizzato  $H\psi(x) = -\frac{\hbar^2}{2m}[a^2\psi(x) - 2a^{5/2}\delta(ax)]$  è una distribuzione singolare (il quadrato non è definito!). Il valore medio di  $H$  si ricava immediatamente nello spazio degli impulsi usando direttamente la definizione

$$\langle H \rangle = (\tilde{\psi}, H\tilde{\psi}) = \frac{a^3 \hbar^2}{m\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k^2 dk}{(a^2 + k^2)^2} = \frac{\hbar^2 a^2}{2m}.$$

Per calcolare il valore medio di  $H$  nello spazio delle coordinate osserviamo che  $\psi'(x)$  appartiene allo spazio di Hilbert del sistema (è soltanto una funzione discontinua in  $x = 0$ ), per cui possiamo scrivere

$$\langle H \rangle = \frac{1}{2m} (p\psi, p\psi) = \frac{\hbar^2}{2m} \int_0^{\infty} |\psi'(x)|^2 dx = \frac{\hbar^2 a^2}{2m}.$$

**Soluzione 3** (23Lug96). – Riferimento: §1.

Poichè siamo interessati a stati legati, poniamo  $E < 0$ ,  $\alpha = \sqrt{2m|E|}/\hbar$ ,  $k = \sqrt{2m(v - |E|)}/\hbar$ . La soluzione a quadrato sommabile e che si annulla nell'origine è data da

$$\psi(x) = \begin{cases} A \sin kx, & 0 \leq x \leq a \\ B e^{-\alpha x}, & x \geq a. \end{cases}$$

Imponendo la continuità della funzione e della derivata si ottiene la condizione

$$\eta = -\xi \cot \xi, \quad \eta^2 + \xi^2 = \frac{2mva^2}{\hbar^2}, \quad \xi = ka, \quad \eta = \alpha a.$$

Le soluzioni si ottengono graficamente dall'intersezione delle due curve precedenti. Si vede che si hanno soluzioni accettabili solo per  $\xi > \xi_0 = \pi/2$  e  $n$  soluzioni (quindi  $n$  stati legati) se  $\xi_{n-1} < \xi < \xi_n$ , con  $\xi_n = (2n + 1)\pi/2$ , a cui corrisponde  $v_n = \hbar^2 \xi_n^2 / 2ma^2$  ( $n \geq 0$ ).

Se a partire da  $v_n$ ,  $v$  cresce di una piccola quantità  $\varepsilon$ , anche  $\xi$  e  $\eta$  crescono proporzionalmente a  $\varepsilon$ , come si può vedere analizzando la soluzione grafica (ma non è necessario). Per trovare l'energia approssimata dell' $n + 1$ -esimo livello eccitato, poniamo  $\xi = \xi_n + \delta$ . Approssimando le equazioni sopra otteniamo

$$\eta \sim (\xi_n + \delta)\delta \sim \xi_n \delta, \quad \delta \sim \frac{ma^2}{\hbar^2 \xi_n} \varepsilon,$$

da cui  $E_{n+1} = -ma^2 \varepsilon^2 / 2\hbar^2$ .

**Soluzione 4** (17Set98). – Riferimento: §12, §1.

Gli autostati del sistema sono le funzioni di Hermite  $\phi_n(x)$ , con  $n$  dispari, che soddisfano l'equazione di Schrödinger e si annullano nell'origine. Quindi

$$\begin{aligned} \phi_n(x) &= A_n e^{-\alpha x^2/2} H(\sqrt{\alpha}x), & \alpha &= \frac{m\omega}{\hbar}, \\ E_n &= (n + \frac{1}{2})\hbar\omega, & n &= 1, 3, 5, \dots \end{aligned}$$

Dato uno stato qualunque  $\psi(x, t)$  si ha

$$\psi(x, t) = \sum_{n=1,3,5,\dots} c_n \phi_n(x) e^{-iE_n t/\hbar},$$

$$|\psi(x, t)|^2 = \sum_{n,k=1,3,5,\dots} c_n^* c_k \phi_n^*(x) \phi_k(x) e^{i(n-k)\omega t}.$$

Ogni termine della serie precedente dipende dal tempo mediante un esponenziale del tipo  $e^{ip\omega t}$  con  $p = 0, 2, 4, 6, \dots$ , e dunque è una funzione periodica di periodo  $T = \pi/\omega$

# Buche di potenziale - Testi

**Esercizio 1.** (7Gen94) – Una particella di massa  $m$  è libera di muoversi su un segmento di lunghezza  $a$  (barriere di potenziale impenetrabili agli estremi  $x = 0$  e  $x = a$ ). La particella si trova nello stato fondamentale con energia  $E_1$  quando la barriera in  $x = a$  viene istantaneamente spostata nel punto  $x = 2a$ . Calcolare la probabilità che in un istante successivo l'energia della particella sia ancora la stessa ( $E_1$ ).

**Esercizio 2.** (14Mar94) – Una particella di massa  $m$  è libera di muoversi su un segmento di lunghezza  $a$  (barriere di potenziale impenetrabili agli estremi  $x = 0$  e  $x = a$ ). La particella si trova in uno stato rappresentato dalla funzione d'onda

$$\psi(x) = \begin{cases} Ax(a-x), & 0 < x < a, \\ 0, & x < 0, \quad x > a. \end{cases}$$

a) Determinare il valore medio di  $H$ . Se si effettua una misura dell'energia, determinare b) quale è il valore più probabile, c) la probabilità di ottenere un valore pari a  $E = 9\hbar^2\pi^2/(2ma^2)$ .

Nell'istante  $t = 0$  vengono tolte le barriere agli estremi  $x = 0$  e  $x = a$ . Determinare d) quale è la probabilità di trovare la particella ancora nell'intervallo  $[0, a]$  dopo un tempo grande  $t \rightarrow \infty$ .

**Esercizio 3.** (23Giu94) – Una punto di massa  $m$  si muove sul segmento  $a \leq x \leq b$  ( $0 < a < b$ ) con barriere di potenziale impenetrabili alle estremità ed è soggetto al potenziale  $V(x) = -v/x^2$ . Si chiede: a) trovare tutti i valori  $v_n$  di  $v$  per i quali si ha uno stato legato di energia nulla; b) usando il metodo perturbativo al primo ordine in  $\epsilon$ , si trovi il livello energetico vicino a zero quando  $v = v_n + \epsilon$ . (Si suggerisce di cercare soluzioni del tipo  $\psi(x) = x^\alpha$ ).

**Esercizio 4.** (1Dic95) – Una particella di massa  $m$  si trova in una buca infinita di potenziale di larghezza  $a$  ( $|x| \leq a/2$ ). Al tempo  $t = 0$  si trova nello stato descritto dalla funzione d'onda

$$\Psi(x, t = 0) = \frac{1}{\sqrt{a}} \left[ 1 + 2 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \right] \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right).$$

Calcolare: a) l'evoluzione temporale dello stato della particella; b) il valore medio dell'energia; c) la probabilità di trovare la particella in  $x > 0$  al generico istante  $t$ .

**Esercizio 5.** (26Feb96) – Una particella di massa  $m$  è libera di muoversi su un segmento di lunghezza  $2a$  (barriere di potenziale impenetrabili agli estremi  $|x| = a$ ). La particella si trova in uno stato rappresentato dalla funzione d'onda

$$\psi(x) = \begin{cases} A(a^2 - x^2), & |x| < a, \\ 0, & |x| > a. \end{cases}$$

Determinare: a) il valore medio di  $H$ ; b) il valore più probabile se si effettua una misura dell'energia; c) il valore medio di  $H^2$ . d) Scrivere l'espressione della funzione d'onda del sistema in un generico istante  $t$  successivo.

**Esercizio 6.** (27Giu96) – Una particella di massa  $m$  si muove in una buca unidimensionale con potenziale

$$V(x) = \begin{cases} 0, & |x| < a, \\ v, & |x| > a. \end{cases}$$

Si consideri lo stato fondamentale e si trovi un'espressione approssimata esplicita per la funzione d'onda valida per  $v$  molto grande. Utilizzando questa approssimazione, si trovi il valore medio  $\langle V \rangle$  e la dispersione  $\Delta V$  del potenziale.

**Esercizio 7.** (4Mar97) – Una particella di massa  $m$  è libera di muoversi nel segmento  $0 \leq x \leq a$  (barriere di potenziale impenetrabili agli estremi). Il suo stato è descritto dalla funzione d'onda

$$\psi(x) = \begin{cases} Ax \sin \frac{\pi x}{a}, & 0 < x < a, \\ 0, & x \leq 0, \quad x \geq a. \end{cases}$$

Determinare: a) la costante di normalizzazione  $A$ ; b) il valore medio della hamiltoniana  $H$ ; c) i coefficienti dello sviluppo in autofunzioni di  $H$ ; d) il valore medio di  $H^2$ ; e) il valore medio di  $x$  al generico istante  $t$ .

**Esercizio 8.** (22Lug97) – Una particella di massa  $m$  è libera di muoversi su un segmento di lunghezza  $a$  (barriere di potenziale impenetrabili agli estremi  $x = 0$  e  $x = a$ ). Al tempo  $t = 0$  la particella si trova in uno stato stazionario  $\phi_n$  con energia  $E_n$  quando la barriera in  $x = a$  viene istantaneamente spostata nel punto  $x = 2a$ . Calcolare: a) il valore medio dell'energia in un generico istante successivo  $t > 0$ ; b) la probabilità che all'istante  $t$  l'energia della particella sia cambiata.

**Esercizio 9.** (23Feb99) – Una particella di massa  $m$  è libera di muoversi su un segmento di lunghezza  $a$  (barriere di potenziale impenetrabili agli estremi  $|x| = a/2$ ). La particella si trova in uno stato rappresentato dalla funzione d'onda

$$\psi(x) = \begin{cases} Ax(a^2 - 4x^2), & |x| < \frac{a}{2}, \\ 0, & |x| > \frac{a}{2}. \end{cases}$$

Determinare: a) il valore medio di  $H$ ; b) il valore più probabile se si effettua una misura dell'energia; c) il valore medio di  $H^2$ . d) la probabilità di trovare la particella in  $0 \leq x \leq a/2$  al generico istante  $t$ .

**Esercizio 10.** (8Giu99) – Una particella di massa  $m$  è vincolata a muoversi in un quadrato di lato  $a$  ( $0 \leq x \leq a$ ,  $0 \leq y \leq a$ ) e si trova in uno stato rappresentato dalla funzione

$$\psi(x, y) = \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{a} \left[ \alpha \cos \frac{\pi x}{a} + \beta \cos \frac{\pi y}{a} \right],$$

dove  $\alpha$  e  $\beta$  sono costanti. Determinare:

- il valore più probabile se si effettua una misura dell'energia e la probabilità di ottenerlo;
- la probabilità di trovare la particella nel rettangolo  $0 \leq x \leq a/2$  al generico istante  $t$ .

**Esercizio 11.** (8Mar00) – Una particella di massa  $m$  è vincolata a muoversi su un segmento di lunghezza  $a$  (barriere di potenziale impenetrabili in  $x = 0$  e  $x = a$ ). Al tempo  $t = 0$  si misura la sua energia e si trova il valore

$$E = \frac{8\pi^2 \hbar^2}{ma^2},$$

e rapidamente si sposta la barriera di destra nel punto  $x = 2a$ . Al generico istante  $t > 0$ , determinare:

- la funzione d'onda della particella;
- il valore più probabile se si misura nuovamente l'energia;
- la probabilità di trovare la particella ancora nell'intervallo  $(0, a)$ .

**Esercizio 12.** (14Mar01) – Una particella di massa  $m$  è libera di muoversi in un quadrato  $Q$  di lato  $a$  (barriere di potenziale impenetrabili sul bordo) e si trova in uno stato rappresentato dalla funzione d'onda

$$\psi(x, y) = \begin{cases} Axy(a-x)(a-y), & (x, y) \in Q, \\ 0, & (x, y) \notin Q. \end{cases}$$

Determinare:

- il valore medio di  $H$ ;
- il valore medio di  $H^2$ ;

Si misura l'energia della particella. Determinare:

- la probabilità di ottenere l'energia dello stato fondamentale;
- la probabilità di ottenere l'energia del primo livello eccitato.

**Esercizio 13.** (11Giu01) – Una particella di massa  $m$  si trova in una buca infinita di potenziale di larghezza  $a$  ( $0 \leq x \leq a$ ) e per  $t = 0$  si trova nello stato descritto dalla funzione d'onda

$$\psi(x) = A \sin \frac{\pi x}{a} \left( 1 + \cos \frac{\pi x}{a} \right),$$

dove  $A$  è una costante di normalizzazione.

Al generico istante  $t$  si chiede di calcolare:

- a) i possibili risultati in una misura dell'energia e la probabilità di ottenerli;  
 b) i valori medi di  $H$  e di  $H^2$ ;  
 c) la probabilità di trovare la particella in  $x < a/2$ .

**Esercizio 14.** (9Set03) – Una particella di massa  $m$  è vincolata a muoversi in un quadrato di lato  $a$  ( $Q \equiv [0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq a]$ ). Si misura la sua energia e si trova il valore  $E = 5(\pi\hbar/a)^2/2m$ .

- a) Scrivere la più generale funzione d'onda che rappresenta il sistema dopo la misura.  
 b) Calcolare la probabilità di trovare la particella nel quadrato

$$Q_1 \equiv [0 \leq x \leq a/2, 0 \leq y \leq a/2].$$

- c) Dire qual'è la probabilità di trovare la particella nelle tre regioni

$$Q_2 \equiv [0 \leq x \leq a/2, a/2 \leq y \leq a],$$

$$Q_3 \equiv [a/2 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq a/2],$$

$$Q_4 \equiv [a/2 \leq x \leq a, a/2 \leq y \leq a].$$

## Buche di potenziale - Soluzioni

**Soluzione 1** (7Gen94). – Riferimento: §2, §7.

La funzione d'onda all'istante  $t$  ha lo sviluppo del §2 dove le autofunzioni  $\psi_n(x)$  sono quelle corrispondenti alla particella libera nella buca di larghezza  $2a$  (Nota:  $0 \leq x \leq 2a$ ), mentre lo stato iniziale  $\phi(x)$  corrisponde allo stato fondamentale della particella nella buca di larghezza  $a$ . Si ha

$$\phi(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{\pi x}{a}, & 0 \leq x \leq a, \\ 0, & x < 0, x > a. \end{cases}$$

Si noti che l'energia iniziale della particella  $\mathcal{E}_1 = \hbar^2 \pi^2 / 2ma^2 = E_2$ , dove  $E_2$  è l'energia del primo livello eccitato del sistema. La probabilità cercata è dunque  $|c_2|^2 = 1/2$ , poichè

$$c_2 = (\phi, \psi_2) = \frac{\sqrt{2}}{a} \int_0^a \sin^2 \frac{\pi x}{a} dx = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

**Soluzione 2** (14Mar94). – Riferimento: §7.

Dalla normalizzazione otteniamo  $A = \sqrt{30/a^5}$ . Per ricavare il valore medio dell'energia conviene usare direttamente la definizione

$$\langle H \rangle_\psi = (\psi, H\psi) = \frac{5\hbar^2}{ma^2}.$$

Per ricavare il valore più probabile si deve sviluppare lo stato in autofunzioni. I coefficienti dello sviluppo sono dati da

$$c_n = (\psi_n, \psi) = A \sqrt{\frac{2}{a}} \int_0^a \sin \frac{n\pi x}{a} (a-x)x dx = \begin{cases} \frac{8\sqrt{15}}{n^3\pi^3}, & n = 1, 3, 5, \dots \\ 0, & n = 2, 4, 6, \dots \end{cases}$$

da cui si vede che il valore più probabile è l'energia dello stato fondamentale  $E_1 = \hbar^2 \pi^2 / 2ma^2$  con probabilità 0.998. Il valore  $E = 9\hbar^2 \pi^2 / 2ma^2$  corrisponde al secondo livello eccitato ( $n = 3$ ). La probabilità di ottenere tale valore è  $|c_3|^2 \approx 0.001$ .

Dopo la rimozione delle barriere la particella è libera e quindi la sua funzione d'onda al tempo  $t$  sarà data dal pacchetto d'onde

$$\Psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(k) e^{i(kx - \omega t)} dk,$$

dove  $\omega = \hbar k^2/2m = E/\hbar$  e  $f(k)$  è l'antitrasformata di Fourier di  $\Psi(x, 0) = \psi(x)$  (condizione iniziale, nell'istante in cui vengono tolte le barriere). Si ha

$$f(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^a Ax(a-x)e^{-ikx} dx = \frac{2Ae^{-iak/2}}{\sqrt{2\pi}k^3} \left( 2 \sin \frac{ka}{2} - ak \cos \frac{ka}{2} \right).$$

Si noti che  $f(0) = Aa^3/6\sqrt{2\pi}$ . La probabilità (al tempo  $t$ ) di trovare la particella in  $0 < x < a$  è data da

$$\mathcal{P}(0 < x < a, t) = \int_0^a |\Psi|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(k)f^*(k')e^{-i(\omega-\omega')t} \left[ \frac{e^{i(k-k')a} - 1}{i(k-k')} \right] dk dk'.$$

Poiché siamo interessati a grandi valori di  $t$ , facciamo il cambiamento di variabili  $k \rightarrow k/\sqrt{t}$ ,  $k' \rightarrow k'/\sqrt{t}$ . In tal modo si ottiene

$$\mathcal{P}(0 < x < a, t) \sim \frac{a|f(0)|^2}{2\pi t} \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\hbar k^2/2m} dk \right|^2 = \frac{ma|f(0)|^2}{\hbar t}.$$

Per la probabilità richiesta si ha infine  $\mathcal{P}(0 < x < a, t) \sim \frac{5ma^2}{12\pi\hbar t}$  valida per grandi valori di  $t$ .

**Soluzione 3** (23Giu94). – Riferimento: §1, §13.

L'equazione di Schrödinger per  $E = 0$  diventa  $\psi'' + \beta\psi/x^2 = 0$  ( $\beta = 2mv/\hbar^2$ ), che ha due soluzioni indipendenti della forma  $x^\alpha$  con  $\alpha(\alpha-1) + \beta = 0$ . La soluzione più generale è la sovrapposizione delle due e dunque

$$\psi(x) = A_1x^{\alpha_1} + A_2x^{\alpha_2}, \quad \alpha_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4\beta}}{2}.$$

Imponendo le condizioni al contorno  $\psi(a) = \psi(b) = 0$  si ottiene

$$\left(\frac{b}{a}\right)^{\alpha_1-\alpha_2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 - \alpha_2 = \frac{2\pi i n}{\log(b/a)}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

e  $A_2 = -A_1a^{\alpha_1-\alpha_2}$ . Vediamo dunque che ci sono infiniti valori  $v = v_n$  per i quali esiste uno stato legato con energia nulla. Si ha

$$v_n = \frac{\hbar^2}{8m} \left[ 1 + \left( \frac{2\pi i n}{\log \frac{b}{a}} \right)^2 \right].$$

La costante  $A_1$  si ricava dalla normalizzazione. Nell'eseguire il calcolo si osservi che

$$\psi = A \left[ \left(\frac{x}{a}\right)^{\alpha_1} - \left(\frac{x}{a}\right)^{\alpha_2} \right], \quad \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_1^* = \alpha_2 + \alpha_2^* = 1, \\ \alpha_1 + \alpha_2^* = \alpha_1 - \alpha_2, \end{cases}$$

Si ottiene così

$$|A|^2 = \frac{4 + |\alpha_1 - \alpha_2|^2}{a \left(\frac{b^2}{a^2} - 1\right)} = \frac{4}{a \left(\frac{b^2}{a^2} - 1\right)} \left[ 1 + \frac{\pi^2 n^2}{\left(\log \frac{b}{a}\right)^2} \right].$$

Se  $v = v_n + \varepsilon$ , allora  $V(x) = -(v_n + \varepsilon)/x^2$  e, al primo ordine perturbativo, l'energia del sistema diventa

$$E_{v_n} = \left( \psi, \frac{-\varepsilon}{x^2} \psi \right) = -\frac{8\varepsilon \left(\log \frac{b}{a}\right)^2}{a^2 \left(\frac{b^2}{a^2} - 1\right)} \left[ 1 + \frac{\pi^2 n^2}{\left(\log \frac{b}{a}\right)^2} \right].$$

**Soluzione 4** (1Dic95). – Riferimento: §8, §2.

Lo stato del sistema è già normalizzato ed è la sovrapposizione dello stato fondamentale e del primo livello eccitato. Infatti:

$$\Psi(x, t=0) = \frac{1}{\sqrt{a}} \left[ \cos \frac{\pi x}{a} + \sin \frac{2\pi x}{a} \right] = \frac{1}{\sqrt{2}} \psi_1(x) + \frac{1}{\sqrt{2}} \psi_2(x),$$

dove le  $\psi_n(x)$  sono le autofunzioni. Per determinare il valore medio dell'energia conviene usare la formula del paragrafo 2. Quindi

$$E = \frac{1}{2}E_1 + \frac{1}{2}E_2 = \frac{\hbar^2\pi^2}{2m} \frac{5}{2a^2}.$$

Al generico istante  $t$  si ha

$$\Psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ e^{-itE_1/\hbar} \psi_1(x) + e^{-itE_2/\hbar} \psi_2(x) \right].$$

La probabilità di trovare la particella in  $x > 0$  è perciò

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(x > 0, t) &= \int_0^{a/2} |\Psi(x, t)|^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \left[ \int_0^{a/2} |\psi_1(x)|^2 dx + \int_0^{a/2} |\psi_2(x)|^2 dx \right. \\ &\quad \left. + e^{it(E_2-E_1)/\hbar} \int_0^{a/2} \psi_2^*(x)\psi_1(x) dx + e^{-it(E_2-E_1)/\hbar} \int_0^{a/2} \psi_1^*(x)\psi_2(x) dx \right] \\ &= \frac{1}{2} + \frac{4}{3\pi} \cos\left(\frac{E_2-E_1}{\hbar} t\right). \end{aligned}$$

**Soluzione 5** (26Feb96). – Riferimento: §1, 2 e 4.

Dalla normalizzazione troviamo  $A = \sqrt{15/16a^5}$ . Il valore medio di  $H$  si ricava direttamente dalla definizione

$$\langle H \rangle = (\psi, H\psi) = \frac{A\hbar^2}{m} \int_{-a}^a \psi(x) dx = \frac{5\hbar^2}{4ma^2} \sim 1.01E_1,$$

dove  $E_1 = \hbar^2\pi^2/8ma^2$  è l'energia dello stato fondamentale. Vediamo che l'energia media è di poco superiore a quella dello stato fondamentale e quindi ci aspettiamo che il valore più probabile sia proprio  $E_1$ .

Per ricavare il valore medio di  $H^2$  si deve fare attenzione al fatto che  $H\psi$  non è nel dominio di  $H$  (è discontinua nei punti estremi). Si può procedere nel modo seguente

$$\langle H^2 \rangle = (H\psi, H\psi) = \|H\psi\|^2 = \frac{15\hbar^4}{8m^2a^4} \sim 1.23E_1^2.$$

Per determinare il valore più probabile in una misura dell'energia si deve espandere  $\psi$  in autofunzioni. Poiché  $\psi$  è una funzione pari, avrà solo componenti con parità positiva. Dunque

$$c_n = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-a}^a \psi(x) \cos \frac{n\pi x}{2a} = \frac{8\sqrt{15} \sin(n\pi/2)}{\pi^3 n^3}, & n = 1, 3, 5, \dots \\ 0, & n = 2, 4, 6, \dots \end{cases}$$

$$E_n = \frac{\hbar^2\pi^2 n^2}{8ma^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Vediamo che il valore più probabile è l'energia dello stato fondamentale  $E_1$  con probabilità  $|c_1|^2 = 960/\pi^6 \sim 0.998$ . Al generico istante  $t$ , la funzione d'onda è data da

$$\Psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \sum_{n \text{ dispari}} c_n \cos \frac{n\pi x}{2a} e^{-iE_n t/\hbar}.$$

**Soluzione 6** (27Giu96). – Riferimento: §1, §8, §4.

Lo funzione d'onda dello stato fondamentale è simmetrica e si può scegliere reale. Quindi

$$\psi(x) = \begin{cases} A \cos kx, & |x| < a, \\ B e^{-\alpha|x|}, & |x| > a, \end{cases}$$

dove  $A$  e  $B$  sono costanti,  $k = \sqrt{2mE}/\hbar$  e  $\alpha = \sqrt{2m(v-E)}/\hbar \sim \sqrt{2mv}/\hbar$ . Le condizioni di continuità danno

$$A \cos ka = B e^{-\alpha a}, \quad kA \sin ka = \alpha B e^{-\alpha a}, \quad \Rightarrow \quad \cot ka = \frac{k}{\alpha},$$

da cui segue una relazione fra  $A$  e  $B$ . Dall'ultima equazione è possibile ricavare un valore approssimato per l'energia (che non è richiesto). Infatti

$$ka \sim \frac{\pi}{2} - \frac{k}{\alpha} \sim \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{a\alpha}\right).$$

La costante  $A$  (e quindi  $B$ ) si ricava dalla normalizzazione

$$1 = A^2 \int_{-a}^a \cos^2 kx \, dx + 2B^2 \int_a^\infty e^{-2\alpha x} \, dx = A^2 \left( a + \frac{\sin 2ka}{2k} + \frac{\cos^2 ka}{\alpha} \right),$$

$$A = \left( a + \frac{1}{\alpha} \right)^{-1/2}.$$

Per i valori medi si ha

$$\langle V^n \rangle = 2v^n B^2 \int_a^\infty e^{-2\alpha x} \, dx = \frac{v^n A^2 k^2 \sin^2 ka}{\alpha^3}$$

$$\sim \frac{v^n \pi^2}{4a^3 \alpha^3} \sim \frac{\pi^2 \hbar^3}{4a^3 (2m)^{3/2}} v^{n-3/2},$$

da cui si vede che il valore medio di  $V$  tende a zero mentre il valore medio di  $V^2$  (e quindi  $\Delta V$ ) diverge nel limite  $v \rightarrow \infty$ .

**Soluzione 7** (4Mar97). – Riferimento: §7, §1.

Dalla condizione di normalizzazione  $\|\psi\|^2 = 1$  si ottiene

$$|A|^2 = \frac{12\pi^2}{(2\pi^2 - 3)a^3}.$$

Si può scegliere  $A \in \mathbb{R}$ . Osserviamo che  $\psi(x) = A\sqrt{\frac{a}{2}} x \phi_1(x)$  e dunque

$$H\psi = E_1\psi - \frac{A\hbar^2}{m} \sqrt{\frac{a}{2}} \phi_1',$$

$$\langle H \rangle = (\psi, H\psi) = E_1 + \frac{A^2 \hbar^2 a}{4m} = E_1 \left( 1 + \frac{6}{2\pi^2 - 3} \right).$$

I coefficienti dello sviluppo sono dati dagli integrali

$$c_n = (\phi_n, \psi) = A\sqrt{\frac{a}{2}} \int_0^a x \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{n\pi x}{a} \, dx,$$

da cui segue

$$c_1 = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{6}{2\pi^2 - 3}}, \quad c_n = 0, \quad n = 3, 5, 7, \dots$$

$$c_n = -\frac{8n}{\pi(n^2 - 1)^2} \sqrt{\frac{6}{2\pi^2 - 3}}, \quad n = 2, 4, 6, \dots$$

Si osservi che  $H\psi$  non è nel dominio di  $H$ . Il valore medio di  $H^2$  si deve dunque calcolare nel modo seguente:

$$\langle H^2 \rangle = (H\psi, H\psi) = \frac{A^2 \hbar^4 \pi^2}{48m^2 a} (33 + 2\pi^2) = E_1^2 \left( 1 + \frac{36}{2\pi^2 - 3} \right),$$

oppure sotto forma di serie

$$\langle H^2 \rangle = \sum_n |c_n|^2 E_n^2.$$

La funzione d'onda dipendente dal tempo è

$$\Psi(x, t) = \sum c_n \phi_n e^{-iE_n t/\hbar},$$

da cui si ottiene

$$\begin{aligned} \langle x \rangle = (\Psi, x\Psi) &= \sum_{ij} c_i^* c_j e^{i(E_i - E_j)t/\hbar} (\phi_i, x\phi_j) \\ &= \sum_n c_n^2 (\phi_n, x\phi_n) + \sum_{i \neq j} c_i c_j \cos \frac{(E_i - E_j)t}{\hbar} (\phi_i, x\phi_j). \end{aligned}$$

Nell'ultimo passaggio si è tenuto conto del fatto che il valore medio deve essere reale e che sia i  $c_n$  che le autofunzioni sono reali. L'ultima espressione si semplifica notevolmente, poiché tutti i termini con  $i \neq j$  sono nulli tranne nel caso in cui uno dei due indici è uguale a 1. Perciò

$$\langle x \rangle = \sum_n c_n^2 (\phi_n, x\phi_n) + 2c_1 \sum_{n \geq 2} c_n \cos \frac{(E_n - E_1)t}{\hbar} (\phi_n, x\phi_1).$$

Osserviamo infine che  $(\phi_n, (x - a/2)\phi_n) = 0$  (banalmente), quindi  $(\phi_n, x\phi_n) = a/2$  e inoltre  $c_1 x\phi_1 = \frac{a}{2}\psi$ . Segue dunque

$$\langle x \rangle = \frac{a}{2} \left[ 1 + 2 \sum_{n \geq 2} c_n^2 \cos \frac{(E_n - E_1)t}{\hbar} \right].$$

**Soluzione 8** (22Lug97). – Riferimento: §7, §2.

Al generico istante  $t > 0$  la particella si trova in una buca a pareti infinite di larghezza  $2a$ . La sua funzione d'onda è dunque della forma

$$\begin{aligned} \psi(x, t) &= \sum_{k=1}^{\infty} c_k \psi_k(x) e^{-i\mathcal{E}_k t/\hbar}, & \mathcal{E}_k &= \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m} \frac{k^2}{4a^2}, \\ \psi_k(x) &= \frac{1}{\sqrt{a}} \sin \frac{k\pi x}{2a}, & 0 \leq x \leq 2a, & & k = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

mentre all'istante  $t = 0$  la sua funzione d'onda è

$$\psi(x, 0) = \begin{cases} \phi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi x}{a}, & 0 \leq x \leq a, \\ 0, & x \geq a, \end{cases} \quad E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m} \frac{n^2}{a^2}.$$

da cui

$$c_k = (\phi_n, \psi_k) = \frac{\sqrt{2}}{a} \int_0^a \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{k\pi x}{2a} dx = \begin{cases} \frac{(-1)^{n+l} 4n\sqrt{2}}{\pi[(2l+1)^2 - 4n^2]}, & k = 2l + 1, \\ \frac{1}{\sqrt{2}}, & k = 2n, \\ 0, & k = 2l, l \neq n. \end{cases}$$

Per l'energia media si ottiene

$$\mathcal{E} = \sum_k |c_k|^2 \mathcal{E}_k = \frac{1}{2} \mathcal{E}_{2n} + \frac{4\hbar^2 n^2}{ma^2} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(2l+1)^2}{[(2l+1)^2 - 4n^2]^2}.$$

Poiché  $E_n = \mathcal{E}_{2n}$ , la probabilità che l'energia al tempo  $t$  sia la stessa che al tempo iniziale è  $1/2$  e dunque la probabilità che sia cambiata è ancora  $1/2$ .

**Soluzione 9** (23Feb99). – Riferimento: §8, §1.

Dalla normalizzazione  $\|\psi\| = 1$  si determina il valore di  $A$  a meno di un fattore di fase, vale a dire

$$|A| = \sqrt{\frac{105}{2a^7}}.$$

La funzione d'onda è continua e derivabile almeno due volte, quindi appartiene al dominio di  $H$ . Il valore medio si può dunque calcolare applicando direttamente la formula

$$\langle H \rangle = (\psi, H\psi) = \frac{12|A|^2\hbar^2}{m} \int_{-a/2}^{a/2} x(a^2 - 4x^2) dx = \frac{2a^5|A|^2\hbar^2}{5m} = \frac{21\hbar^2}{ma^2}.$$

Il valore medio di  $H^2$  non si può calcolare usando direttamente la definizione, perché  $H\psi$  non appartiene al dominio di  $H$  (non è continua agli estremi). Infatti

$$H\psi = \begin{cases} \frac{12A\hbar^2 x}{m}, & |x| < \frac{a}{2}, \\ 0, & |x| = \frac{a}{2}. \end{cases}$$

Il valore medio di  $H^2$  si può calcolare usando la formula

$$\langle H^2 \rangle = (H\psi, H\psi) = \|H\psi\|^2 = \frac{630\hbar^4}{m^2 a^4}.$$

Poiché la funzione d'onda ha simmetria definita (è una funzione dispari) la probabilità di trovare la particella in  $0 \leq x \leq a/2$  è uguale alla probabilità di trovare la particella in  $-a/2 \leq x \leq 0$  e dunque vale  $1/2$  in ogni istante. Per calcolare il valore più probabile dell'energia si deve sviluppare la funzione d'onda in serie di autofunzioni della hamiltoniana. Poiché la funzione è dispari, nello sviluppo compariranno soltanto seni. Dunque

$$\psi(x) = \sum_{n \geq 2, \text{pari}} c_n^- \psi_n^-, \quad \psi_n^- = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi x}{a}, \quad n = 2, 4, \dots$$

Posto  $n = 2k$ ,  $c_{2k}^- = b_k$  ( $k \geq 1$ ) si ha

$$\begin{aligned} b_k = (\psi_{2k}^-, \psi) &= \sqrt{\frac{2}{a}} A \int_{-a/2}^{a/2} x(a^2 - 4x^2) \sin \frac{2k\pi x}{a} dx \\ &= -(-1)^k \frac{3\sqrt{105}}{\pi^3 k^3}. \end{aligned}$$

Si vede che il valore più probabile dell'energia è  $E_2 = 2\hbar^2\pi^2/(ma^2)$ . La probabilità di trovare questo valore in una misura dell'energia è  $|b_1|^2 = 945/\pi^6 = 0.98$ .

**Nota:** Dalle formule

$$\langle H \rangle = \sum_n |c_n|^2 E_n, \quad \langle H^2 \rangle = \sum_n |c_n|^2 E_n^2,$$

si ricavano le somme delle serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Viceversa, supponendo note le serie numeriche precedenti, si ricavano rapidamente i valori medi di  $H$  e di  $H^2$ .

**Soluzione 10** (8Giu99). – Riferimento: §7.

E' immediato verificare che

$$\begin{aligned}\psi(x, y) &= \frac{\alpha}{2} \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{a} + \frac{\beta}{2} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{a} \\ &= \frac{a}{4} [\alpha \psi_{21}(x, y) + \beta \psi_{12}(x, y)] ,\end{aligned}$$

dove  $\psi_{mn}(x, y) = \phi_m(x)\phi_n(y)$  sono le autofunzioni di  $H$  e  $\phi_n$  le autofunzioni del caso unidimensionale. Normalizzando la funzione d'onda si ricava facilmente  $a^2(|\alpha|^2 + |\beta|^2)/16 = 1$ .

Si vede dunque che  $\psi$  è autofunzione di  $H$  corrispondente all'autovalore  $E_{12} = 5\hbar^2\pi^2/2ma^2$ . Questo è l'unico possibile risultato della misura dell'energia e si ottiene ovviamente con probabilità 1.

La particella si trova in uno stato stazionario e quindi le probabilità non dipendono dal tempo. La probabilità di trovare la particella nel rettangolo  $0 \leq x \leq a$  è data da

$$\mathcal{P} = \int_0^{a/2} dx \int_0^a dy |\psi|^2 = \frac{a^2}{16} \int_0^{a/2} dx [|\alpha|^2 |\phi_2(x)|^2 + |\beta|^2 |\phi_1(x)|^2] ,$$

dove si è usato il fatto che le  $\phi_n$  sono ortonormali nell'intervallo  $[0, a]$ . Poiché le autofunzioni  $\phi_n(x - a/2)$  sono pari o dispari, si ha banalmente

$$\int_0^{a/2} |\psi_n(x)|^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^a |\psi_n(x)|^2 dx = \frac{1}{2} .$$

Ricordando la condizione di normalizzazione si ha finalmente  $\mathcal{P} = 1/2$ .

**Soluzione 11** (8Mar00). – Riferimento: §2, §7.

L'energia misurata è quella del quarto livello  $\mathcal{E}_4 = 4^2\hbar^2\pi^2/(2ma^2)$  e quindi, dopo la misura il sistema si trova nello stato stazionario

$$\phi_4(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{4\pi x}{a} , & 0 \leq x \leq a , \\ 0 , & x \leq 0 , x \geq a . \end{cases}$$

Questo è anche lo stato iniziale della particella nella buca di potenziale di larghezza  $2a$ . Le autofunzioni e i corrispondenti autovalori dell'energia per tale particella sono

$$\psi_n = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{a}} \sin \frac{n\pi x}{2a} , & 0 \leq x \leq 2a , \\ 0 , & x \leq 0 , x \geq 2a . \end{cases}$$

$$E_n = \frac{\hbar^2\pi^2 n^2}{8ma^2}$$

e la funzione d'onda al generico istante  $t > 0$  ha lo sviluppo

$$\begin{aligned}\psi(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi_n(x) e^{-iE_n t/\hbar} , \\ c_n &= (\psi_n, \phi_4) = \frac{\sqrt{2}}{a} \int_0^a \sin \frac{4\pi x}{a} \sin \frac{n\pi x}{2a} dx .\end{aligned}$$

Eseguendo l'integrale si ricava

$$\begin{aligned}c_8 &= \frac{1}{\sqrt{2}} , \\ c_{2k+1} &= (-1)^k \frac{16\sqrt{2}}{[(2k+1)^2 - 64]\pi} , \quad k = 0, 1, 2, \dots\end{aligned}$$

Tutti gli altri coefficienti sono nulli. Si vede che  $|c_8|^2 > |c_n|^2$  ( $n \neq 8$ ) e quindi il valore più probabile in una misura dell'energia al tempo  $t$  è

$$E_8 = \frac{8\hbar^2\pi^2}{ma^2} ,$$

(che è anche il valore iniziale) e la probabilità di ottenerlo è  $|c_8|^2 = 1/2$ .  
La probabilità di trovare la particella nell'intervallo iniziale è

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= \int_0^a |\psi(x, t)|^2 dx \\ &= \sum_{n, k=1}^{\infty} c_n c_k \cos \frac{(E_n - E_k)t}{\hbar} \frac{1}{a} \int_0^a \sin \frac{n\pi x}{2a} \sin \frac{k\pi x}{2a} dx \\ &= \frac{1}{2} + \sum_{n \neq k} c_n c_k \cos \frac{(E_n - E_k)t}{\hbar} \left\{ \frac{\sin[(n-k)\pi/2]}{(n-k)\pi} - \frac{\sin[(n+k)\pi/2]}{(n+k)\pi} \right\}. \end{aligned}$$

Si è tenuto conto del fatto che tutti i  $c_n$  sono reali e la probabilità deve essere reale. Si vede che nella serie doppia contribuiscono solo i termini con  $n$  dispari e  $k$  pari o viceversa. Poiché tutti i  $c_n$  con  $n$  pari sono nulli tranne  $c_8$  si ottiene

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= \frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \frac{16\sqrt{2}}{[(2k+1)^2 - 64]\pi} \right]^2 \cos \frac{[(2k+1)^2 - 64]\pi^2 \hbar t}{8ma^2} \\ &= \sum_n |c_n|^2 \cos \frac{(n^2 - 64)\pi^2 \hbar t}{8ma^2}, \end{aligned}$$

dove l'ultima somma è estesa a tutti i  $c_n$ .

**Soluzione 12** (14Mar01). – Riferimento: §7, 1.

Senza perdere in generalità si può porre  $A = B^2$  e  $f(x) = Bx(a-x)$ . Si ha allora  $\psi(x, y) = f(x)f(y)$  e  $\|\psi\| = \|f\|^2$ .

Dalla normalizzazione

$$1 = \|f\|^2 = \int_0^a |f(x)|^2 dx = \frac{|B|^2 a^5}{30},$$

si ottiene  $|A| = 30/a^5$ . La funzione d'onda appartiene al dominio di  $H$  per cui si può calcolare il valore medio dell'energia mediante la definizione. Si osservi che  $H\psi = (\hbar^2 B/m)[f(x) + f(y)]$ , per cui

$$\begin{aligned} \langle H \rangle = (\psi, H\psi) &= \frac{\hbar^2 B}{m} \int \int_0^a [f(x)|f(y)|^2 + f(y)|f(x)|^2] dx dy = \frac{2\hbar^2 B}{m} \int f(x) dx \\ &= \frac{\hbar^2 |B|^2 a^3}{3m} = \frac{10\hbar^2}{ma^2}. \end{aligned}$$

Si osservi che l'energia media è di poco superiore all'energia dello stato fondamentale  $E_{11} = \pi^2 \hbar^2 / ma^2$ . Ci si aspetta quindi che il valore più probabile in una misura dell'energia sia proprio  $E_{11}$ . Per quanto concerne il valore medio di  $H^2$ , si deve osservare che  $H\psi$  non appartiene al dominio di  $H$  ( $H\psi$  non è nemmeno continua) per cui non è possibile calcolare il valore medio di  $H^2$  usando la definizione. Però si può usare la formula

$$\begin{aligned} \langle H^2 \rangle = (H\psi, H\psi) &= \left( \frac{\hbar^2 |B|}{m} \right)^2 \int \int_0^a |f(x) + f(y)|^2 dx dy \\ &= 2 \left( \frac{\hbar^2 |B|}{m} \right)^2 \int \int_0^a [|f(x)|^2 + f(x)f(y)] dx dy = \frac{110\hbar^2}{m^2 a^4}. \end{aligned}$$

Per trovare le probabilità nelle misure dell'energia è necessario sviluppare la funzione d'onda in autofunzioni di  $H$  e calcolare i coefficienti dello sviluppo  $c_{jk}$ . Si ha

$$c_{jk} = (\psi_{jk}, \psi) = c_j c_k, \quad c_j = (\phi_j, f) = \int_0^a \phi_j^*(x) f(x) dx,$$

dove  $\phi_j(x) = \sqrt{2/a} \sin(j\pi x/a)$  e  $\psi_{jk}(x, y) = \phi_j(x)\phi_k(y)$ . Effettuando l'integrale si ottiene

$$c_n = -\frac{4\sqrt{15}}{n^3 \pi^3} [-1 + (-1)^n].$$

Si vede dunque che  $c_n = 0$  se  $n$  è pari. Questo significa che  $c_{jk}$  è non nullo solo se  $j$  e  $k$  sono entrambi dispari; cioè

$$c_{jk} = \frac{4^3 \cdot 15}{j^3 k^3 \pi^6}, \quad j, k = 1, 3, 5, \dots$$

Le probabilità di ottenere l'energia dello stato fondamentale e del primo livello eccitato sono

$$\mathcal{P}_{E=E_{11}} = |c_{11}|^2 = \left(\frac{960}{\pi^6}\right)^2 \sim 0.997,$$

$$\mathcal{P}_{E=E_{12}=E_{21}} = |c_{12}|^2 + |c_{21}|^2 = 2|c_{12}|^2 = 0.$$

Il livello successivo con probabilità non nulla è  $E_{13} = E_{31}$  e si ha

$$\mathcal{P}_{E=E_{13}=E_{31}} = |c_{13}|^2 + |c_{31}|^2 = 2|c_{13}|^2 = 2 \left(\frac{320}{9\pi^6}\right)^2 \sim 0.003.$$

**Soluzione 13** (11Giu01). – Riferimento: §7, §1.

Autofunzioni e autovalori della hamiltoniana hanno la forma

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi x}{a}, \quad E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{2m a^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

La funzione d'onda della particella è la sovrapposizione dello stato fondamentale e del primo livello eccitato. Infatti

$$\psi(x) = A \sin \frac{\pi x}{a} \left(1 + \cos \frac{\pi x}{a}\right) = c_1 \psi_1 + c_2 \psi_2 = B \left[\psi_1 + \frac{1}{2} \psi_2\right].$$

Dalla normalizzazione si ottiene

$$\|\psi\|^2 = |B|^2 \left(1 + \frac{1}{4}\right) \implies |B| = \frac{2}{\sqrt{5}} \implies |c_1| = \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad |c_2| = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Al tempo  $t$  la funzione d'onda è

$$\Psi(x, t) = c_1 \psi_1(x) e^{-iE_1 t/\hbar} + c_2 \psi_2(x) e^{-iE_2 t/\hbar}.$$

I possibili risultati in una misura dell'energia sono  $E_1$  ed  $E_2$  con probabilità  $|c_1|^2 = 4/5$  e  $|c_2|^2 = 1/5$  rispettivamente.

I valori medi di  $H$  e di  $H^2$  si calcolano rapidamente mediante le formule

$$\langle H \rangle = |c_1|^2 E_1 + |c_2|^2 E_2 = \frac{8E_1}{5} = \frac{4\hbar^2 \pi^2}{5m a^2}.$$

$$\langle H^2 \rangle = |c_1|^2 E_1^2 + |c_2|^2 E_2^2 = 4E_1^2 = \left(\frac{\hbar^2 \pi^2}{m a^2}\right)^2.$$

La probabilità di trovare la particella in  $x < a/2$  è

$$\mathcal{P} = \int_0^{a/2} |\Psi(x, t)|^2 dx = \frac{1}{2} + \frac{16}{15\pi} \cos \frac{3E_1 t}{\hbar},$$

che oscilla fra 0.16 e 0.84.

**Soluzione 14** (9Set03). – Riferimento: §7, §1.

L'energia della particella è quella corrispondente al primo livello eccitato, che è due volte degenera. Le corrispondenti autofunzioni sono

$$\psi_{12}(x, y) = \frac{2}{a} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{a}, \quad \psi_{21}(x, y) = \frac{2}{a} \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{a}.$$

Immediatamente dopo la misura, il sistema si trova in un autostato con energia  $E$ . La più generale funzione d'onda  $\psi(x, y)$  che rappresenta il sistema è quindi una combinazione arbitraria delle due funzioni precedenti, vale a dire

$$\psi(x, y) = \alpha \psi_{12}(x, y) + \beta \psi_{21}(x, y),$$

con  $\alpha$  e  $\beta$  numeri complessi arbitrari, soddisfacenti la condizione di normalizzazione  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ . Con questa scelta, la funzione d'onda è anche normalizzata.

La probabilità  $\mathcal{P}$  di trovare la particella in una data regione  $R$  è data dall'integrale

$$\mathcal{P} = \int_R |\psi(x, y)|^2 dx dy$$

e non dipende ovviamente dalla scelta delle coordinate. Dall'espressione precedente segue

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_1 &= \int_{Q_1} |\alpha \psi_{12}(x, y) + \beta \psi_{21}(x, y)|^2 dx dy \\ &= \iint_0^{a/2} \{ |\alpha|^2 [\psi_{12}(x, y)]^2 + |\beta|^2 [\psi_{21}(x, y)]^2 \\ &\quad + (\alpha^* \beta + \alpha \beta^*) \psi_{12}(x, y) \psi_{21}(x, y) \} dx dy. \end{aligned}$$

Per ragioni di simmetria si ha

$$\begin{aligned} \iint_0^{a/2} [\psi_{12}(x, y)]^2 dx dy &= \iint_0^{a/2} [\psi_{21}(x, y)]^2 dx dy \\ &= \frac{4}{a^2} \int_0^{a/2} \left( \sin \frac{\pi x}{a} \right)^2 dx \int_0^{a/2} \left( \sin \frac{2\pi y}{a} \right)^2 dy = \frac{1}{4}, \end{aligned}$$

$$\iint_0^{a/2} \psi_{12}(x, y) \psi_{21}(x, y) dx dy = \left[ \frac{2}{a} \int_0^{a/2} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{2\pi x}{a} dx \right]^2 = \frac{16}{9\pi^2}$$

e quindi

$$\mathcal{P}_1 = \frac{|\alpha|^2 + |\beta|^2}{4} + \frac{16(\alpha^* \beta + \alpha \beta^*)}{9\pi^2} = \frac{1}{4} + \frac{16(\alpha^* \beta + \alpha \beta^*)}{9\pi^2}.$$

Per calcolare la probabilità di trovare la particella nelle altre regioni, conviene effettuare una traslazione degli assi e sfruttare le proprietà di simmetria del problema. Scegliamo quindi l'origine nel centro del quadrato mediante la trasformazione  $(x, y) \rightarrow (\tilde{x} + a/2, \tilde{y} + a/2)$ . Nelle nuove coordinate  $(\tilde{x}, \tilde{y})$ , la funzione d'onda assume la forma

$$\psi(x, y) \rightarrow \psi(\tilde{x}, \tilde{y}) = - \left( \alpha \cos \frac{\pi \tilde{x}}{a} \sin \frac{2\pi \tilde{y}}{a} + \beta \sin \frac{2\pi \tilde{x}}{a} \cos \frac{\pi \tilde{y}}{a} \right),$$

con  $|\tilde{x}| \leq a/2$ ,  $|\tilde{y}| \leq a/2$ . Per passare dal quadrato  $Q_1$  al quadrato  $Q_4$  basta invertire le coordinate, cioè  $(\tilde{x}, \tilde{y}) \rightarrow (-\tilde{x}, -\tilde{y})$ . Mediante questa trasformazione il modulo della funzione d'onda non cambia (la funzione d'onda cambia segno) e quindi  $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_4$ . In modo analogo si trova che il modulo della funzione d'onda non cambia quando si passa dalla regione  $Q_2$  alla regione  $Q_3$  e dunque  $\mathcal{P}_2 = \mathcal{P}_3$ . Ovviamente si ha

$$1 = \mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2 + \mathcal{P}_3 + \mathcal{P}_4 = 2(\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2),$$

da cui segue

$$\mathcal{P}_2 = \frac{1}{2} - \mathcal{P}_1 = \frac{1}{4} - \frac{16(\alpha^* \beta + \alpha \beta^*)}{9\pi^2}.$$

La probabilità di trovare la particella in uno qualunque dei quattro quadranti dipende dalla scelta di  $\psi(x, y)$ . In particolare è la stessa se uno dei due parametri ( $\alpha$  o  $\beta$ ) è nullo o più in generale se  $\alpha^* \beta + \alpha \beta^* = 0$ .

## Coefficienti di riflessione e trasmissione - Testi

**Esercizio 1.** (16Feb95) – Una particella di massa  $m$  si muove su una retta ed è soggetta ad una barriera di potenziale  $V(x)$  contenuta nel segmento  $|x| \leq a$ . Siano  $T(E)$  ed  $R(E)$  i coefficienti di trasmissione e riflessione della barriera, in funzione dell'energia. a) Scrivere la forma generale della funzione d'onda per  $|x| \geq a$  (ricordare che la complessa coniugata di una soluzione dell'equazione di Schrödinger è ancora soluzione). b) Si introducono due barriere impenetrabili nei punti  $x = \pm b$  ( $b > a$ ). Scrivere la condizione che determina i livelli energetici.

**Esercizio 2.** (14Giu95) – Una barriera di potenziale unidimensionale (simmetrica), centrata attorno all'origine, ha coefficienti di riflessione e trasmissione  $R(k)$  e  $T(k)$ .

a) Utilizzando la simmetria  $x \rightarrow -x$ , si trovino due soluzioni dell'equazione di Schrödinger linearmente indipendenti, scritte esplicitamente nelle zone dove il potenziale è nullo.

Si consideri una seconda barriera (simmetrica), centrata attorno a  $x = a$ , con coefficienti di riflessione e trasmissione  $R'(k)$  e  $T'(k)$ , che moltiplicano onde del tipo  $\exp(\pm ik(x - a))$ . Si supponga che  $a$  sia abbastanza grande in modo che le due barriere non si sovrappongano. Si calcoli: b) il coefficiente di trasmissione  $T''(k)$ , in funzione di  $R(k)$ ,  $T(k)$ ,  $R'(k)$  e  $T'(k)$  della doppia barriera così ottenuta; c) la dipendenza della probabilità di trasmissione  $|T''(k)|^2$  in funzione della distanza  $a$ .

**Esercizio 3.** (26Feb96) – Una particella di massa  $m$  è vincolata a muoversi su una semiretta  $x \geq 0$  (barriera impenetrabile in  $x = 0$ ) ed è sottoposta ad un potenziale

$$V(x) = \begin{cases} v = \text{costante} > 0, & 0 < x < a, \\ 0, & x > a. \end{cases}$$

Per  $x > a$  si consideri la soluzione

$$\psi_k(x) = e^{-ikx} + R(k)e^{ikx}$$

e si determini  $R$  (coefficiente di riflessione della barriera) in funzione di  $k = \sqrt{2mE}/\hbar$  per energie  $E > v$ . Si costruisca il pacchetto d'onde

$$\Psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f(k) \psi_k(x) e^{-iEt/\hbar} dk$$

e si discutano le proprietà del pacchetto riflesso.

## Coefficienti di riflessione e trasmissione - Soluzioni

**Soluzione 1** (16Feb95). – Riferimento: §8, §10.

Posto  $k = \sqrt{2mE}/\hbar$ , una soluzione è data da

$$\phi(x) = \begin{cases} e^{ikx} + Re^{-ikx}, & x < a, \\ Te^{ikx}, & x > a. \end{cases}$$

La complessa coniugata di  $\phi(x)$  è una soluzione indipendente. Ciò significa che la soluzione generale è una sovrapposizione arbitraria delle due, cioè  $\psi(x) = A\phi(x) + B\phi^*(x)$ . Questa deve annullarsi in  $x = \pm b$  (barriere infinite) e dunque si hanno le due equazioni.

$$(A + BR^*)e^{-ikb} + (AR + B)e^{ikb} = 0, \quad ATe^{ikb} + BT^*e^{-ikb} = 0,$$

che risolte danno gli autovalori in termini di  $R$  e  $T$ .

**Soluzione 2** (14Giu95). – Riferimento: §10.

Siano  $(-b, b)$  e  $(a - b', a + b')$  i supporti dei due potenziali ( $a > b + b'$ ). La soluzione per la doppia barriera ha la forma

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{ikx} + R''e^{-ikx}, & x < -b, \\ T''e^{ikx}, & x - a > b'. \end{cases}$$

Per il primo potenziale, la soluzione  $f(x)$  è della stessa forma e poichè è simmetrico rispetto all'origine, anche  $g(x) = f(-x)$  è una soluzione indipendente con la stessa energia. Si ha dunque

$$\begin{aligned} f(x, b; R, T) &= \begin{cases} e^{ikx} + Re^{-ikx}, & x < -b, \\ Te^{ikx}, & x > b. \end{cases} \\ g(x, b; R, T) &= \begin{cases} Te^{-ikx}, & x < -b, \\ e^{-ikx} + Re^{ikx}, & x > b. \end{cases} \end{aligned}$$

Un ragionamento simile vale per la seconda barriera, con  $x$  sostituito da  $x - a$  e  $b$  da  $b'$ . Dunque

$$f_1(x, b'; R', T') = f(x - a, b'; R', T'), \quad g_1(x, b'; R', T') = g(x - a, b'; R', T').$$

Ora scriviamo la soluzione della doppia barriera come sovrapposizione di  $f$  e  $g$  a sinistra, di  $f_1$  e  $g_1$  a destra e imponiamo che le soluzioni coincidano fra le due barriere (zona di intersezione). Cioè

$$\psi(x) = \begin{cases} Af + Bg, & x < -b, \\ Af + Bg = Cf_1 + Dg_1, & b < x < a - b', \\ Cf_1 + Dg_1, & x - a > b'. \end{cases}$$

Quello sopra è un sistema algebrico di 6 equazioni nelle incognite  $A, B, C, D, R'', T''$ , che risolto da

$$T'' = \frac{TT'}{1 - RR'e^{2ika}}, \quad R'' = R + \frac{R'T^2e^{2ika}}{1 - RR'e^{2ika}}.$$

**Soluzione 3** (26Feb96). – Riferimento: §6, §10.

Poiché la particella è vincolata in una semiretta, lo spettro è continuo e non degenere. La soluzione completa ha la forma

$$\psi_k(x) = \begin{cases} e^{-ikx} + R(k)e^{ikx}, & x \geq a, \\ A \sin \alpha x, & 0 \leq x \leq a, \end{cases}$$

dove  $\alpha = \alpha(k) = \sqrt{2m(E - v)}/\hbar$ . Imponendo le condizioni di continuità sulla funzione e sulla derivata in  $x = a$  si ottiene un sistema in  $R$  e  $A$  che risolto dà

$$A = -\frac{2ike^{-ika}}{\alpha \cos \alpha a - ik \sin \alpha a}, \quad R(k) = -\frac{e^{-2ika}(\alpha \cos \alpha a + ik \sin \alpha a)}{\alpha \cos \alpha a - ik \sin \alpha a}.$$

Ovviamente  $|R|^2 = 1$ . Osserviamo incidentalmente che  $\psi^* = R^* \psi$  (lo spettro è non degenere).

Poniamo  $R = e^{2i\beta(k)}$  ( $\beta$  è una funzione complicata di  $k$ ). Abbiamo  $A = |A(k)|e^{i(\beta+\pi)}$ . Per l'onda incidente e riflessa in  $x > a$  si ottiene

$$\begin{aligned} \Psi_i(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f(k)e^{-i\varphi_i(k)} dk, & \varphi_i(k) &= kx + \frac{\hbar k^2 t}{2m}, \\ \Psi_r(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f(k)e^{i\varphi_r(k)} dk, & \varphi_r(k) &= kx + 2\beta(k) - \frac{\hbar k^2 t}{2m}. \end{aligned}$$

Supponendo che  $f(k)$  sia concentrata attorno ad un valore  $k_0 > \sqrt{2mv}/\hbar$ , usando il metodo della fase stazionaria, si vede che i centri dei due pacchetti si muovono secondo le leggi

$$\begin{aligned} x_i &= -\frac{\hbar k_0 t}{m}, & t_i &= -\frac{ma}{\hbar k_0}, \\ x_r &= \frac{\hbar k_0 t}{m} - 2\beta', & t_r &= \frac{m(a + 2\beta')}{\hbar k_0}, \end{aligned}$$

dove  $\beta'$  è la derivata calcolata in  $k_0$ ,  $t_i$  e  $t_r$  sono i tempi in cui i centri dei pacchetti passano per il punto  $x = a$ . La durata dell'interazione è data da  $\Delta t = t_r - t_i = \frac{2m(a + \beta')}{\hbar k_0}$ .

## Rotatore piano - Testi

**Esercizio 1.** (23Set94) – Una particella di massa  $m$  e carica  $q$  è vincolata a muoversi su una circonferenza di raggio  $a$  ed è soggetta ad un campo magnetico costante di intensità  $B$  perpendicolare al piano in cui giace la circonferenza. Si chiede: a) scrivere il potenziale vettore  $\vec{A}$  scegliendo la gauge in modo che sia simmetrico per rotazioni; b) usando la variabile angolare  $\varphi$ , scrivere la lagrangiana del sistema classico, l'espressione per il momento canonico  $p_\varphi$  e la hamiltoniana; c) introducendo l'operatore  $p_\varphi = -i\hbar \frac{d}{d\varphi}$ , scrivere l'equazione di Schrödinger e trovare i livelli energetici.

**Esercizio 2.** (25Set95) – Una particella di massa  $m$  è vincolata a muoversi su una circonferenza  $x^2 + y^2 = a^2$ . Introducendo una variabile angolare  $\varphi$ , si scrivano le autofunzioni dell'energia e del momento angolare  $L_z$  con i rispettivi autovalori. Per un intervallo di tempo  $0 < t < T$  si fa agire una forza costante di potenziale  $kx$ . Usando il metodo perturbativo al primo ordine, si calcolino le probabilità di transizione fra i vari livelli.

**Esercizio 3.** (16Dic96) – Una particella di massa  $m$  e carica  $q$  si muove sulla circonferenza

$$x = a \cos \phi, \quad y = a \sin \phi$$

ed è soggetta ad un campo magnetico di intensità  $B$  diretto lungo l'asse  $z$ .

a) Si scrivano la lagrangiana e la hamiltoniana del sistema usando la coordinata  $\varphi$ . Si determinino gli autovalori e le autofunzioni  $\psi_m(\varphi)$  di  $p_\varphi = L_z$  e  $H$ .

b) Se inizialmente la funzione d'onda è

$$\psi(\varphi, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cos(n\varphi),$$

si calcoli la funzione d'onda  $\psi(\varphi, t)$  ad un tempo qualunque.

## Rotatore piano - Soluzioni

**Soluzione 1** (23Set94). – Riferimento: §11.

Scegliamo  $B > 0$ . Il potenziale vettore invariante per rotazione ha la forma  $\vec{A} = -\vec{r} \times \vec{B}/2$ . Si verifica direttamente che il suo rotore da  $\vec{B}$  e inoltre che la sua divergenza è nulla ( $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ ). In componenti,  $\vec{A} = Br\vec{\tau}/2$ , dove  $\vec{\tau}$  è il versore tangente alla circonferenza di raggio  $r$ . La velocità della particella sulla circonferenza è  $\vec{v} = a\dot{\varphi}\vec{\tau}$  e dunque la lagrangiana classica diventa

$$L = \frac{I\dot{\varphi}^2}{2} + \hbar\alpha\dot{\varphi}, \quad p_\varphi = \frac{dL}{d\dot{\varphi}} = I\dot{\varphi} + \hbar\alpha, \quad \alpha = \frac{qa^2B}{2\hbar c},$$

dove  $I = ma^2$  è il momento di inerzia della particella rispetto all'origine. La hamiltoniana diventa  $H = (p_\varphi - \hbar\alpha)^2/2I$ . Risolvendo l'equazione di Schrödinger con  $p_\varphi = -i\hbar \frac{d}{d\varphi}$  e imponendo la periodicità della soluzione si ottiene

$$\psi_n(\varphi) = \frac{e^{in\varphi}}{\sqrt{2\pi}}, \quad E_n = \frac{\hbar^2(n - \alpha)^2}{2I}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Per arbitrari valori di  $\alpha$  lo spettro è non degenere, però se  $2\alpha = n_1 + n_2$  è intero ( $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ ) allora  $E_{n_1} = E_{n_2}$  e lo spettro energetico è doppiamente degenere. In particolare, se  $\alpha$  è intero, lo spettro è esattamente lo stesso di quello che si ha in assenza di campo ( $\alpha = 0$ ).

**Soluzione 2** (25Set95). – Riferimento: §11, §14.

L'operatore Hamiltoniano è  $H = -\frac{\hbar^2}{2ma^2} \frac{d^2}{d\varphi^2} = \frac{L_z^2}{2ma^2}$  e le autofunzioni normalizzate con la condizione di periodicità  $\psi(\varphi + 2\pi) = \psi(\varphi)$  sono

$$\psi_n(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{in\varphi}, \quad E_n = \frac{n^2\hbar^2}{2ma^2}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

che ovviamente sono anche autofunzioni di  $L_z$  con autovalori  $\hbar n$ . Tutte le autofunzioni, tranne  $\psi_0$ , sono doppiamente degeneri. Gli elementi di matrice di  $V$  sono dati da

$$V_{jn} = \frac{ka}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(n-j)\varphi} \cos \varphi d\varphi = \frac{ka}{2} (\delta_{j,n+1} + \delta_{j,n-1})$$

e quindi si possono avere transizioni solo tra livelli contigui. Al primo ordine si ha

$$a_{jn}^{(1)} = \frac{V_{jn}}{i\hbar} \int_0^T e^{i\omega_{jn}t} dt = \frac{2V_{jn}}{i\hbar\omega_{jn}} e^{i\omega_{jn}T/2} \sin \frac{\omega_{jn}T}{2}.$$

La probabilità di transizione è

$$\mathcal{P}(n \rightarrow n \pm 1) = \left[ \frac{2km^2a^2}{\hbar^2(2n \pm 1)} \right]^2 \sin^2 \left( \frac{[2n \pm 1]\hbar T}{4ma^2} \right)$$

e nulla in tutti gli altri casi.

**Soluzione 3** (16Dic96). – Riferimento: §11.

Scegliamo il potenziale vettore della forma  $\vec{A} = -\vec{r} \times \vec{B}/2$  che è tangente alla circonferenza. Più precisamente  $\vec{A} = Br\vec{\tau}/2$ , dove  $\vec{\tau}$  è il versore tangente alla circonferenza di raggio  $r$ . La velocità della particella sulla circonferenza è  $\vec{v} = r\dot{\varphi}\vec{\tau}$  e dunque la lagrangiana classica diventa

$$L = \frac{I\dot{\varphi}^2}{2} + \hbar\alpha\dot{\varphi}, \quad p_\varphi = \frac{dL}{d\dot{\varphi}} = I\dot{\varphi} + \hbar\alpha, \quad \alpha = \frac{qa^2B}{2\hbar c},$$

dove  $I = ma^2$  è il momento di inerzia della particella rispetto all'origine. La hamiltoniana diventa  $H = (p_\varphi - \hbar\alpha)^2/2I$ .  $p_\varphi$  è la componente  $z$  del momento angolare e quindi le sue autofunzioni e i suoi autovalori sono (rispettivamente)

$$\psi_m(\varphi) = \frac{e^{im\varphi}}{\sqrt{2\pi}}, \quad \hbar m, \quad m = \pm 1, \pm 2, \dots$$

che sono anche autofunzioni di  $H$ . Risolvendo l'equazione di Schrödinger con  $p_\varphi = -i\hbar \frac{d}{d\varphi}$  e imponendo la periodicità della soluzione si ottiene infatti

$$\psi_n(\varphi) = \frac{e^{in\varphi}}{\sqrt{2\pi}}, \quad E_n = \frac{\hbar^2(n - \alpha)^2}{2I}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Per arbitrari valori di  $\alpha$  lo spettro è non degenere, però se  $2\alpha = n_1 + n_2$  è intero ( $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ ) allora  $E_{n_1} = E_{n_2}$  e lo spettro energetico è doppiamente degenere. In particolare, se  $\alpha$  è intero, lo spettro è esattamente lo stesso di quello che si ha in assenza di campo ( $\alpha = 0$ ) (si noti però che la corrispondenza fra autovalori e autovettori è comunque diversa).

Per quanto concerne la seconda parte osserviamo che

$$\psi(\varphi, 0) = \frac{\cos(n\varphi)}{\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{2} [\psi_n(\varphi) + \psi_{-n}(\varphi)]$$

e dunque

$$\psi(\varphi, t) = \frac{1}{2} \left[ \psi_n(\varphi) e^{-iE_n t/\hbar} + \psi_{-n}(\varphi) e^{-iE_{-n} t/\hbar} \right] = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-i\hbar(n^2 + \alpha^2)/2I t} \cos \left( n \left[ \varphi + \frac{qBt}{mc} \right] \right).$$

## Oscillatore armonico - Testi

**Esercizio 1.** (7Gen94) – Un oscillatore armonico unidimensionale di massa  $m$  e frequenza angolare  $\omega$  si trova nello stato fondamentale. Calcolare la probabilità di trovare la particella nella zona classicamente inaccessibile.

**Esercizio 2.** (14Mar94) – Si consideri un oscillatore armonico bidimensionale di massa  $m$  e costante elastica  $k = m\omega^2$  e si determini a) la degenerazione dei livelli energetici.

Il sistema si trova in uno stato stazionario  $\psi_{n_x+n_y}(x, y)$ . Determinare b) il valore medio dell'operatore  $x$ ; c) il valore medio dell'operatore  $x^2$  e discutere d) la quantità  $\Delta x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}$ .

Viene introdotto un potenziale perturbativo  $V(x, y) = \epsilon(x + y)^2$ . Determinare e) le energie dei primi tre livelli energetici al primo ordine in  $\epsilon$ .

**Esercizio 3.** (28Feb95) – Un oscillatore armonico di massa  $m$  e frequenza angolare  $\omega$  si trova nello stato fondamentale. Improvvisamente viene fatta agire una forza costante  $f$ . Trovare: a) i livelli energetici e la funzione d'onda dello stato fondamentale dopo l'introduzione della forza  $f$ ; b) la probabilità di trovare ancora il sistema nello stato fondamentale.

**Esercizio 4.** (24Apr95) – Usando le autofunzioni della hamiltoniana come base per lo spazio di Hilbert di un oscillatore armonico unidimensionale di massa  $m$  e frequenza angolare  $\omega$ , calcolare gli elementi di matrice diagonali di  $x^2$  e  $p^2$ . Calcolare inoltre il valore di  $\Delta x \Delta p$  nel generico autostato con energia  $E_n$ .

**Esercizio 5.** (24Lug95) – Due oscillatori armonici di massa  $m$  e frequenza angolare  $\omega$ , inizialmente indipendenti, si trovano entrambi nello stato fondamentale. Improvvisamente vengono fatti interagire mediante un termine di accoppiamento  $V(x_1, x_2) = (mg/2)x_1x_2$ , dove  $x_1, x_2$  sono le coordinate dei due oscillatori e  $g$  è una costante positiva. Si chiede: a) determinare (esattamente) le autofunzioni  $\psi(x_1, x_2; g)$  e gli autovalori  $E_{n_1n_2}$  della hamiltoniana del sistema interagente; b) determinare la probabilità che, dopo l'introduzione dell'interazione, il sistema si trovi nello stato fondamentale della nuova hamiltoniana.

Suggerimento: scrivere la hamiltoniana del sistema interagente come somma di due hamiltoniane note mediante la trasformazione di coordinate

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + y), \quad x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - y).$$

**Esercizio 6.** (20Feb96) – Una particella di massa  $m$  si muove nello spazio tridimensionale ed è soggetta al potenziale

$$V(\vec{r}) = \frac{k}{2}\vec{r}^2 + cz.$$

Si scriva la funzione d'onda (esatta) dello stato fondamentale e si trovi la probabilità che, misurando il momento angolare  $\vec{L}^2$ , si ottenga il valore zero.

**Esercizio 7.** (3Feb97) – Un oscillatore armonico tridimensionale sfericamente simmetrico ha massa  $m$  e frequenza  $\omega/2\pi$ . Si scrivano le componenti del momento angolare per mezzo degli operatori di creazione e distruzione e si calcolino, per ogni autostato dell'energia, i valori medi di  $L_x^2$ ,  $L_y^2$  e  $L_z^2$ .

**Esercizio 8.** (24Feb97) – La funzione d'onda di un oscillatore armonico unidimensionale di massa  $m$  e frequenza angolare  $\omega$ , nell'istante  $t = 0$  è data da

$$\Psi(x; t = 0) = \psi(x) = A e^{-\alpha x^2/2}(1 + bx), \quad \alpha = \frac{m\omega}{\hbar},$$

con  $A$  e  $b$  costanti. Calcolare a) il valore medio dell'energia; b) la massima probabilità (al variare di  $t$ ) di trovare la particella sulla semiretta  $x \geq 0$ .

**Esercizio 9.** (22Lug97) – Un sistema fisico è descritto dalla hamiltoniana

$$H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + \frac{m\omega^2}{2}(x^2 + y^2 + z^2) + mgxy,$$

dove  $m$ ,  $\omega$  e  $g < 3\omega^2/4$  sono costanti positive.

Si chiede: a) determinare le autofunzioni e gli autovalori della hamiltoniana del sistema; b) il valore medio della componente lungo  $z$  del momento angolare se il sistema si trova nel secondo livello eccitato e c) il valore medio di  $L^2$ .

Suggerimento: si esegua la trasformazione di coordinate (rotazione attorno all'asse  $z$ )

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - y), \quad x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + y), \quad x_3 = z.$$

Si scriva il momento angolare mediante operatori di creazione e distruzione.

**Esercizio 10.** (16Ott98) –

Lo stato di un oscillatore armonico lineare di massa  $m$  e frequenza angolare  $\omega$  è rappresentato dalla funzione d'onda

$$\psi(x) = A(1 + \sqrt{\alpha}x) \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/4} e^{-\alpha x^2/2}, \quad \alpha = \frac{m\omega}{\hbar},$$

dove  $A$  è una costante di normalizzazione. Determinare

- i possibili valori in una misura dell'energia e la probabilità di ottenerli;
- il valore medio della hamiltoniana;
- il valore medio della posizione al tempo  $t$ .

**Esercizio 11.** (25Gen99) – Un oscillatore armonico lineare di massa  $m$  e costante elastica  $k = m\omega^2$  oscilla attorno all'origine e sta nel suo stato fondamentale. Improvvisamente (cioè senza che la funzione d'onda abbia il tempo di cambiare) il centro della forza elastica si sposta dal punto  $x = 0$  al punto  $x = a$ . Si calcoli la probabilità che l'oscillatore resti nello stato fondamentale (definito dal nuovo potenziale).

**Esercizio 12.** (16Feb99) –

Si misura l'energia di un oscillatore armonico tridimensionale isotropo di massa  $m_0$  e frequenza angolare  $\omega$  e si trova il valore  $(5/2)\hbar\omega$ . Si misura quindi anche la componente del momento angolare lungo l'asse  $z$  e si trova il valore  $\hbar$ . Scrivere la funzione d'onda del sistema.

**Esercizio 13.** (23Set99) – Si consideri la hamiltoniana  $H$  di un oscillatore armonico bidimensionale di massa  $m$  e frequenza angolare  $\omega$  e gli operatori  $\tilde{H}$

$$\tilde{H} = \frac{1}{2} (p_1^2 + p_2^2 + q_1^2 + q_2^2) = \frac{1}{\omega} H = \left[ \frac{p_x^2 + p_y^2}{2m\omega} + \frac{m\omega(x^2 + y^2)}{2} \right],$$

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{2} (p_1 q_2 - p_2 q_1), \\ A_2 &= \frac{1}{2} (p_1 p_2 + q_1 q_2), \\ A_3 &= \frac{1}{4} (p_1^2 + q_1^2 - p_2^2 - q_2^2). \end{aligned}$$

- Verificare che  $q_\alpha$  e  $p_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2$ ) hanno le stesse regole di commutazione di  $x, y, p_x, p_y$ ;
- verificare che gli operatori  $A_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) soddisfano alle stesse regole di commutazione del momento angolare

$$[A_i, A_j] = i\hbar \varepsilon_{ijk} A_k;$$

- trovare la relazione fra  $A^2 = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2$  e  $\tilde{H}$ ;
- conoscendo gli autovalori di  $H$ , determinare gli autovalori di  $A^2$ .  
(si osservi che  $\tilde{H}$  è la hamiltoniana di un oscillatore armonico di massa e frequenza angolare uguali a 1. Può essere utile introdurre gli operatori di creazione e distruzione  $a_\alpha, a_\alpha^\dagger$  corrispondenti alle variabili  $q_\alpha, p_\alpha$ ).

**Esercizio 14.** (20Apr00) – Un oscillatore armonico tridimensionale e isotropo, di massa  $m$ , frequenza angolare  $\omega$  e carica  $q$  è immerso in un campo elettrico uniforme  $\mathcal{E}$ . Calcolare le energie e le funzioni d'onda per gli stati stazionari del sistema. Calcolare inoltre la probabilità di trovare la particella nell'angolo solido  $d\Omega$  al primo ordine in  $\mathcal{E}$ , quando il sistema si trova nello stato fondamentale.

**Esercizio 15.** (19Dic00) – Un oscillatore armonico tridimensionale, isotropo, di massa  $m$  e frequenza angolare  $\omega$  si trova nel primo livello eccitato con energia  $E = 5\hbar\omega/2$  e con componente del momento angolare in una direzione data pari a  $\hbar$ . Scrivere la funzione d'onda del sistema e calcolare la probabilità di trovare la particella nella zona classicamente inaccessibile.

**Esercizio 16.** (21Nov01) – Di un oscillatore armonico bidimensionale di massa  $m$  e frequenza angolare  $\omega$  si misura l'energia e si trova il valore  $2\hbar\omega$ . Determinare la probabilità di trovare la particella nella zona classicamente inaccessibile subito dopo la precedente misura.

**Esercizio 17.** (23Gen02) – Un oscillatore armonico tridimensionale, isotropo, di massa  $m$  e frequenza angolare  $\omega$  si trova in uno stato rappresentato dalla funzione d'onda

$$\psi(x, y, z) = A(x + iy)e^{-\alpha r^2/2}, \quad \alpha = \frac{m\omega}{\hbar},$$

dove  $A$  è una costante di normalizzazione. Determinare:

- i possibili risultati (e la probabilità di ottenerli) in una misura dell'energia del sistema;
- la probabilità di trovare la particella nel semispazio  $x > 0$ ;
- il valore medio di  $r$ ;
- i possibili risultati (e la probabilità di ottenerli) in una misura della componente lungo  $z$  del momento angolare.

**Esercizio 18.** (27Giu02) – Una particella di massa  $m$  è vincolata a muoversi nella striscia bidimensionale  $\{-\infty < x < \infty, 0 \leq y \leq a\}$  ed è sottoposta ad una forza elastica  $F = -kx$ , diretta lungo  $x$ . Determinare:

- autofunzioni e autovalori della hamiltoniana del sistema;
- il valore di  $k$  affinché il primo livello eccitato sia degenere.

**Esercizio 19.** (11Feb03) – Un oscillatore armonico tridimensionale, isotropo, di massa  $m$  e frequenza angolare  $\omega$ , si trova in uno stato rappresentato dalla funzione d'onda

$$\psi(x, y, z) = A \left( \frac{1}{\sqrt{\alpha}} + x + y + z \right) e^{-\alpha r^2/2}, \quad \alpha = \frac{m\omega}{\hbar}.$$

Determinare:

- la costante di normalizzazione  $A$ ;
- il valore medio di  $H$ ;
- i possibili risultati in una misura dell'energia e la probabilità di ottenerli;
- il valore medio dell'operatore  $r^2$  al generico istante  $t$ .

**Esercizio 20.** (13Giu03) – Una particella di massa  $m$  e carica  $q$  è vincolata a muoversi nel piano  $(x, y)$  in presenza di un campo elettrico uniforme  $\vec{\mathcal{E}}$  e sotto l'azione di una forza elastica  $\vec{F} = -k\vec{r}$ , ( $\vec{r} = \vec{i}x + \vec{j}y$ ). Trascurando dapprima il campo elettrico, determinare:

- le autofunzioni e gli autovalori della hamiltoniana;
- la degenerazione dei livelli energetici.

Considerando successivamente anche il campo elettrico, determinare:

- l'energia dei primi 3 livelli del sistema al primo ordine in  $\mathcal{E}$ .

## Oscillatore armonico - Soluzioni

**Soluzione 1** (7Gen94). – Riferimento: §12.

Nel punto di inversione l'energia cinetica classica è nulla e dunque la massima elongazione è data da  $X = \sqrt{2E/m\omega^2}$ . Se l'oscillatore si trova nello stato fondamentale,  $E = \hbar\omega/2$ , da cui  $X = \sqrt{\hbar/m\omega} = 1/\sqrt{\alpha}$ . La probabilità cercata è data da

$$\mathcal{P}(|x| > |X|) = \frac{2}{X\sqrt{\pi}} \int_X^\infty e^{-(x/X)^2} dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_1^\infty e^{-x^2} dx \sim 0.157.$$

Si osservi che non dipende dai parametri che caratterizzano l'oscillatore. Ciò succede in qualunque stato del sistema, in quanto non è possibile costruire una grandezza adimensionale con  $m, \omega, \hbar$ .

**Soluzione 2** (14Mar94). – Riferimento: §12, §13.

Gli autostati del sistema sono il prodotto di funzioni di Hermite in  $x$  e  $y$  e l'energia è la somma delle energie di due oscillatori unidimensionali. Quindi

$$E_{n_1 n_2} = (n_1 + n_2 + 1)\hbar\omega = (n + 1)\hbar\omega = E_n, \quad n = n_1 + n_2 \geq 0.$$

È immediato verificare che la degenerazione è  $d_n = n + 1$ . Per ragioni di simmetria il valore medio di  $x$  è nullo in ogni stato stazionario, mentre per  $x^2$  si ottiene

$$\langle x^2 \rangle_{\psi_{n_1 n_2}} = \langle x \psi_{n_1 n_2}, x \psi_{n_1 n_2} \rangle = \frac{\hbar}{2m\omega} \|(a_x + a_x^\dagger)\psi_{n_1 n_2}\|^2 = \frac{\hbar(n_1 + \frac{1}{2})}{m\omega}.$$

Ovviamente per  $\langle y^2 \rangle$  vale una formula analoga con  $n_2$  al posto di  $n_1$ . Si osservi che  $\langle r^2 \rangle = L^2/2$  dove  $L$  è l'elongazione classica. Poiché il potenziale perturbativo è una forma quadratica, si potrebbe diagonalizzare la hamiltoniana completa, ottenere quella di due oscillatori armonici con frequenze diverse e risolvere esattamente. Usando la teoria delle perturbazioni al primo ordine si ha invece

$$E_0^{(1)} = \varepsilon \langle \psi_{00}, (x + y)^2 \psi_{00} \rangle = \varepsilon (\langle x^2 \rangle_{\psi_{00}} + \langle y^2 \rangle_{\psi_{00}}) = \frac{\varepsilon \hbar}{m\omega}.$$

Per il primo livello eccitato si ottiene

$$\begin{aligned} V_{01,01} = V_{10,10} &= \varepsilon (\langle x^2 \rangle_{\psi_{01}} + \langle y^2 \rangle_{\psi_{01}}) = \frac{2\varepsilon \hbar}{m\omega}, \\ V_{01,10} = V_{10,01} &= \frac{\varepsilon \hbar}{m\omega}. \end{aligned}$$

La degenerazione è rimossa e si hanno i due livelli

$$E_1^{(0)} \quad \longrightarrow \quad 2\hbar\omega + \frac{\varepsilon \hbar}{m\omega}, \quad 2\hbar\omega + \frac{3\varepsilon \hbar}{m\omega}.$$

**Soluzione 3** (28Feb95). – Riferimento: §12, §2.

Conviene scrivere la hamiltoniana nella forma

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}(x - x_0)^2 - \Lambda, \quad x_0 = \frac{f}{m\omega^2}, \quad \Lambda = \frac{f^2}{2m\omega^2},$$

che è la hamiltoniana di un oscillatore armonico in cui la posizione di equilibrio è  $x = x_0$  e l'energia è traslata di una quantità  $-\Lambda$ . Le soluzioni sono date da

$$\psi_n(x) = \phi_n(x - x_0), \quad E_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega - \Lambda, \quad n \geq 0,$$

dove  $\phi_n(x)$  sono le funzioni di Hermite. In particolare,  $\phi_0 = Ae^{-\alpha x^2/2}$  ( $\alpha = m\omega/\hbar$ ). La soluzione in ogni istante ha lo sviluppo di §2. Lo stato iniziale è dato da  $\phi(x) = \phi_0(x)$ . Siamo interessati al solo coefficiente  $c_0$  e dunque

$$c_0 = \langle \phi, \psi_0 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_0(x)\phi_0(x - x_0) dx = e^{-\alpha x_0^2/4} A^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha(x-x_0/2)^2} dx = e^{-\alpha x_0^2/4}.$$

**Soluzione 4** (24Apr95). – Riferimento: §12, §4.

Per ragioni di simmetria, sia  $x$  che  $p$  hanno valore medio nullo. Gli elementi di matrice dei loro quadrati sono dati da

$$\begin{aligned} x_{rs}^2 = \langle x \psi_r, x \psi_s \rangle &= \frac{\hbar}{2m\omega} \left[ \sqrt{rs} \delta_{r-1, s-1} + \sqrt{r(s+1)} \delta_{r-1, s+1} \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{(r+1)s} \delta_{r+1, s-1} + \sqrt{(r+1)(s+1)} \delta_{r+1, s+1} \right], \\ p_{rs}^2 = \langle x \psi_r, x \psi_s \rangle &= \frac{2m\hbar\omega}{4} \left[ \sqrt{rs} \delta_{r-1, s-1} - \sqrt{r(s+1)} \delta_{r-1, s+1} \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{(r+1)s} \delta_{r+1, s-1} + \sqrt{(r+1)(s+1)} \delta_{r+1, s+1} \right] \end{aligned}$$

e dunque nel generico autostato  $\psi_n$

$$\Delta x \Delta p = \sqrt{x_{nn}^2} \sqrt{p_{nn}^2} = (n + \frac{1}{2})\hbar = E_n/\omega.$$

Si osservi che per lo stato fondamentale  $\Delta x \Delta p$  assume il minimo valore compatibilmente con il principio di indeterminazione.

**Soluzione 5** (24Lug95). – Riferimento: §12.

Usando la trasformazione consigliata si ottiene

$$H = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{m\omega_1^2}{2}x^2 + \frac{m\omega_2^2}{2}y^2, \quad \omega_1^2 = \omega^2 + \frac{g}{2}, \quad \omega_2^2 = \omega^2 - \frac{g}{2},$$

$$\alpha = \frac{m\omega}{\hbar}, \quad \alpha_1 = \frac{m\omega_1}{\hbar}, \quad \alpha_2 = \frac{m\omega_2}{\hbar},$$

in cui si riconosce la hamiltoniana di due oscillatori armonici indipendenti. Si ha quindi

$$\psi_{n_1 n_2}(x, y; g) = A_{n_1}(\alpha_1) e^{-\alpha_1 x^2/2} H_{n_1}(\sqrt{\alpha_1} x) A_{n_2}(\alpha_2) e^{-\alpha_2 y^2/2} H_{n_2}(\sqrt{\alpha_2} y),$$

$$E_{n_1 n_2} = (n_1 + \frac{1}{2})\hbar\omega_1 + (n_2 + \frac{1}{2})\hbar\omega_2, \quad n_1 \geq 0, \quad n_2 \geq 0.$$

Il generico stato del sistema all'istante  $t$  ha lo sviluppo del paragrafo 2. In questo caso lo stato iniziale coincide con lo stato fondamentale del sistema con  $g = 0$ , cioè  $\varphi(x, y) = \psi(x, y; 0)$  e inoltre siamo interessati al solo coefficiente  $c_{00}$ . Dunque

$$c_{00} = (\varphi, \psi_{00}) = A^2(\alpha) A_0(\alpha_1) A_0(\alpha_2) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\alpha+\alpha_1)x^2/2} e^{-(\alpha+\alpha_2)y^2/2} dx dy$$

$$= \frac{2(\omega^2 \omega_1 \omega_2)^{1/4}}{[(\omega + \omega_1)(\omega + \omega_2)]^{1/2}}.$$

**Soluzione 6** (20Feb96). – Riferimento: §12, §25.

Con il cambiamento di variabile  $u = z + c/k$  la hamiltoniana diventa

$$H = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_u^2}{2m} + \frac{k(x^2 + y^2 + u^2)}{2} - \frac{c^2}{2k}.$$

Posto  $\omega = \sqrt{k/m}$  e  $\alpha = m\omega/\hbar$  si ha, per lo stato fondamentale (normalizzato)

$$\psi(x, y, u) = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/4} e^{-\alpha(x^2+y^2+u^2)/2} = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/4} e^{-\alpha r^2/2} e^{-\alpha c^2/2k^2} e^{-\alpha cr \cos \vartheta/k},$$

$$E = \frac{3\hbar\omega}{2} - \frac{c^2}{2k}.$$

Questa funzione ha uno sviluppo in armoniche sferiche della forma

$$\psi(r, \vartheta, \varphi) = \sum_{lm} a_{lm}(r) Y_l^m(\vartheta, \varphi), \quad a_{lm}(r) = \int Y_l^m(\vartheta, \varphi) \psi(r, \vartheta, \varphi) \sin \vartheta d\vartheta d\varphi.$$

Usando questo sviluppo, per il valore medio del momento angolare in questo stato si ottiene

$$\langle L^2 \rangle = (\psi, L^2 \psi) = \hbar^2 \sum_{l=0}^{\infty} l(l+1) \int_0^{\infty} \sum_{m=-l}^l |a_{lm}|^2 r^2 dr.$$

Ognuno degli integrali rappresenta la probabilità di ottenere un valore  $l$  per il momento angolare. La probabilità cercata è dunque data dall'integrale del modulo quadro di  $a_{00}(r)$ . Si ha

$$a_{00} = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/4} e^{-\alpha r^2/2} e^{-\alpha c^2/2k^2} \frac{2\sqrt{\pi}k}{\alpha cr} \sinh \frac{cr}{k},$$

che è una funzione pari. Dunque

$$\mathcal{P}(l=0) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |a_{00}(r)|^2 r^2 dr = \frac{k^2}{\alpha c^2} \left(1 - e^{-\alpha c^2/k^2}\right).$$

**Soluzione 7** (3Feb97). – Riferimento: §12, §17.

Poiché l'oscillatore è sfericamente simmetrico, è sufficiente eseguire il calcolo per la componente  $L_3 = L_z$ . Per le altre componenti basterà effettuare una rotazione ciclica degli indici 1, 2, 3. Direttamente dalla definizione si ottiene (si osservi che gli operatori di creazione e distruzione relativi a variabili diverse ovviamente commutano)

$$L_3 = x_1 p_2 - x_2 p_1 = i\hbar \left( a_1 a_2^\dagger - a_1^\dagger a_2 \right),$$

da cui

$$\begin{aligned} \langle L_3^2 \rangle &= \langle \psi_{n_1, n_2, n_3}, L_3^2 \psi_{n_1, n_2, n_3} \rangle = \|L_3 \psi_{n_1, n_2, n_3}\|^2 \\ &= \hbar^2 \left\| \sqrt{n_1(n_2+1)} \psi_{n_1-1, n_2+1, n_3} - \sqrt{(n_1+1)n_2} \psi_{n_1+1, n_2-1, n_3} \right\|^2 = \hbar^2 (n_1 + n_2 + 2n_1 n_2). \end{aligned}$$

**Soluzione 8** (24Feb97). – Riferimento: §12, §26, §1.

La funzione d'onda è data dalla sovrapposizione dello stato fondamentale  $\phi_0$  e del primo livello eccitato  $\phi_1$ , pertanto

$$\begin{aligned} \psi(x) &= c_0 \phi_0 + c_1 \phi_1, & |c_0|^2 + |c_1|^2 &= 1, \\ c_0 &= A \left( \frac{\pi}{\alpha} \right)^{\frac{1}{4}}, & c_1 &= c_0 \frac{b}{\sqrt{2\alpha}}, \end{aligned}$$

da cui si ricava

$$|c_0|^2 = \frac{2\alpha}{|b|^2 + 2\alpha}, \quad |c_1|^2 = \frac{|b|^2}{|b|^2 + 2\alpha}.$$

Il valore medio dell'energia è dato da

$$E = |c_0|^2 E_0 + |c_1|^2 E_1 = \left( 1 + \frac{2|b|^2}{|b|^2 + 2\alpha} \right) \frac{\hbar\omega}{2}.$$

La funzione d'onda ad un generico istante  $t$  è

$$\Psi(x, t) = c_0 \phi_0 e^{-iE_0 t/\hbar} + c_1 \phi_1 e^{-iE_1 t/\hbar}$$

e la probabilità di trovare la particella sulla semiretta è data da

$$\int_0^{\infty} |\Psi(xt)|^2 dx = \frac{1}{2} \left[ |c_0|^2 + |c_1|^2 + c_0 c_1 \cos\left(\frac{E_1 - E_0}{\hbar} t\right) \int_0^{\infty} \phi_0 \phi_1 dx \right],$$

che è massima quando il coseno vale 1 (nell'ultima espressione,  $c_0$  e  $c_1$  si sono scelti reali). Quindi

$$\mathcal{P}_{max} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \frac{|b|}{|b|^2 + 2\alpha}.$$

**Soluzione 9** (22Lug97). – Riferimento: §12, §17.

Usando la trasformazione consigliata si ottiene

$$\begin{aligned} H &= \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} + \frac{p_3^2}{2m} + \frac{m\omega_1^2}{2} x_1^2 + \frac{m\omega_2^2}{2} x_2^2 + \frac{m\omega_3^2}{2} x_3^2, \\ \omega_1^2 &= \omega^2 - g, & \omega_2^2 &= \omega^2 + g, & \omega_3^2 &= \omega^2, \end{aligned}$$

in cui si riconosce la hamiltoniana di tre oscillatori armonici indipendenti. Ponendo

$$\alpha_1 = \frac{m\omega_1}{\hbar}, \quad \alpha_2 = \frac{m\omega_2}{\hbar}, \quad \alpha_3 = \frac{m\omega_3}{\hbar},$$

si ha la soluzione

$$\psi_{n_1 n_2 n_3}(x_1, x_2, x_3) = \prod_{k=1}^3 A_{n_k}(\alpha_k) H_{n_k}(\sqrt{\alpha_k} x_k) e^{-\alpha_k x_k^2/2},$$

$$E_{n_1 n_2 n_3} = \sum_{k=1}^3 (n_k + \frac{1}{2}) \hbar \omega_k, \quad n_k \geq 0.$$

Il secondo livello eccitato è  $E_{001}$  la cui autofunzione ha la forma

$$\psi_{001} = \phi_0(x_1; \omega_1) \phi_0(x_2; \omega_2) \phi_1(x_3; \omega_3)$$

dove  $\phi_n(x; \omega)$  sono le funzioni d'onda dell'oscillatore armonico unidimensionale di frequenza angolare  $\omega$ . Il quadrato del momento angolare è invariante per rotazione, e poichè si è effettuata una rotazione attorno a  $z$ , anche la componente  $L_z$  resta invariata. Vale a dire

$$\begin{aligned} L^2 &= L_x^2 + L_y^2 + L_z^2 = L_1^2 + L_2^2 + L_3^2, \\ L_z &= xp_y - yp_x = L_3 = x_1 p_2 - x_2 p_1, \quad L_k = L_{x_k}. \end{aligned}$$

Mediante gli operatori di creazione e distruzione si ha

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{\hbar}{2i} \left[ C_1^- (a_2^\dagger a_3^\dagger - a_2 a_3) + C_1^+ (a_2^\dagger a_3 - a_2 a_3^\dagger) \right], \\ C_1^\pm &= \frac{\omega_2 \pm \omega_3}{\sqrt{\omega_2 \omega_3}}, \end{aligned}$$

e le altre componenti si ottengono per rotazione ciclica degli indici. Applicando gli operatori alla funzione d'onda si ha facilmente

$$\begin{aligned} L_1 \psi_{001} &= \frac{\hbar}{2i} \left[ C_1^- \sqrt{2} \psi_{012} + C_1^+ \psi_{010} \right], \\ L_2 \psi_{001} &= \frac{\hbar}{2i} \left[ C_2^- \sqrt{2} \psi_{102} + C_2^+ \psi_{100} \right], \\ L_3 \psi_{001} &= \frac{\hbar}{2i} C_3^- \psi_{111}, \end{aligned}$$

da cui segue

$$\begin{aligned} \langle L_z \rangle &= 0, \\ \langle L^2 \rangle &= ||L_1 \psi_{001}||^2 + ||L_2 \psi_{001}||^2 + ||L_3 \psi_{001}||^2 \\ &= \frac{\hbar^2}{4} (2|C_1^-|^2 + 2|C_2^-|^2 + |C_3^-|^2 + |C_1^+|^2 + |C_2^+|^2). \end{aligned}$$

**Soluzione 10** (16Ott98). – Riferimento: §12, §1.

La funzione d'onda è la sovrapposizione del livello fondamentale e del primo livello eccitato, quindi

$$\psi = c_0 \psi_0 + c_1 \psi_1, \quad c_0 = A, \quad c_1 = \frac{A}{\sqrt{2}}.$$

Dalla condizione di normalizzazione  $|c_0|^2 + |c_1|^2 = 1$  si trova

$$|A|^2 = \frac{2}{3}, \quad |c_0|^2 = \frac{2}{3}, \quad |c_1|^2 = \frac{1}{3}.$$

I possibili valori in una misura dell'energia sono  $E_0 = \hbar\omega/2$  e  $E_1 = 3\hbar\omega/2$  con probabilità  $2/3$  e  $1/3$  rispettivamente. Il valore medio di  $H$  è

$$\langle H \rangle = \frac{2}{3}E_0 + \frac{1}{3}E_1 = \frac{5}{6}\hbar\omega.$$

La funzione d'onda al generico istante  $t$  è

$$\psi(x, t) = c_0\psi_0(x)e^{-i\omega t/2} + c_1\psi_1(x)e^{-3i\omega t/2},$$

da cui segue

$$\langle x \rangle = (\psi(x, t), x\psi(x, t)) = c_0^*c_1e^{-i\omega t}(\psi_0, x\psi_1) + \text{complesso coniugato},$$

$$(\psi_0, x\psi_1) = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}}.$$

Supponendo (per semplicità) che  $c_0$  e  $c_1$  siano reali si ha infine

$$\langle x \rangle = \sqrt{\frac{4}{9\alpha}} \cos \omega t.$$

**Soluzione 11** (25Gen99). – Riferimento: §12, §1.

Lo stato iniziale del sistema è rappresentato dalla funzione  $\phi_0(x)$ , ( $\phi_n(x)$  sono le funzioni di Hermite). La hamiltoniana di un oscillatore armonico con il centro della forza elastica nel punto  $x = a$  è data da

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}(x - a)^2,$$

che ha autofunzioni  $\psi_n(x) = \phi_n(x - a)$  e autovalori  $E_n = (n + 1/2)\hbar\omega$ . Uno stato generico del sistema al tempo  $t$  ha la forma

$$\Psi(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \psi_n e^{-iE_n t/\hbar}.$$

Poiché  $\Psi(x, 0) = \phi_0(x)$  si ha

$$c_n = (\phi_0, \psi_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)\phi(x - a) dx.$$

La probabilità cercata è ( $\alpha = m\omega/\hbar$ )

$$|c_0|^2 = A_0^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha[(x-a)^2+x^2]/2} dx = e^{-\alpha a^2/2}.$$

**Soluzione 12** (16Feb99). – Riferimento: §12, §17.

Le autofunzioni e gli autovalori della hamiltoniana sono

$$\psi_{n_1 n_2 n_3}(x, y, z) = \phi_{n_1}(x)\phi_{n_2}(y)\phi_{n_3}(z), \quad E_n = E_{n_1 n_2 n_3} = (n + \frac{3}{2})\hbar\omega,$$

$n = n_1 + n_2 + n_3$ . Poiché l'energia è  $(5/2)\hbar\omega$ , il sistema si trova nel primo livello eccitato, che è tre volte degenere. La sua funzione d'onda è dunque della forma

$$\begin{aligned} \psi(x, y, z) &= a\phi_1(x)\phi_0(y)\phi_0(z) + b\phi_0(x)\phi_1(y)\phi_0(z) + c\phi_0(x)\phi_0(y)\phi_1(z) \\ &= (Ax + By + Cz)e^{-\alpha r^2/2}, \end{aligned}$$

con  $a, b, c, A, B, C$  costanti di normalizzazione e  $\alpha = m\omega/\hbar$ . La funzione d'onda è un polinomio di primo grado in  $x, y, z$  per una funzione invariante per rotazione. Un polinomio di primo grado si può scrivere

come combinazione delle armoniche sferiche  $Y_l^m$  con  $l = 0, 1$  ( $m = 1, 0, -1$ ). Poiché la componente del momento angolare lungo l'asse  $z$  è  $\hbar$ , si deve avere

$$\psi(x, y, z) = f(r)Y_1^1(\vartheta, \varphi), \quad Y_1^1(\vartheta, \varphi) = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\vartheta e^{i\varphi} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \frac{x + iy}{r}.$$

Per avere l'uguaglianza si deve avere

$$f(r) = \tilde{A}r e^{-\alpha r^2/2}, \quad \int_0^\infty |f(r)|^2 r^2 dr = 1.$$

In conclusione

$$\psi(r, \vartheta, \varphi) = \tilde{A}r e^{-\alpha r^2/2} Y_1^1(\vartheta, \varphi), \quad |\tilde{A}|^2 = \frac{8a^{5/2}}{3\sqrt{\pi}}.$$

**Soluzione 13** (23Set99). – Riferimento: §12, §17.

Posto (si potrebbero scegliere  $p_\alpha, q_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2$ ) anche in modo più complicato)

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{p_x}{\sqrt{m\omega}}, & q_1 &= \sqrt{m\omega} x, \\ p_2 &= \frac{p_y}{\sqrt{m\omega}}, & q_2 &= \sqrt{m\omega} y, \end{aligned}$$

si ottiene

$$[q_1, p_1] = [x, p_x] = i\hbar, \quad [q_2, p_2] = [y, p_y] = i\hbar$$

e tutti gli altri commutatori nulli. Convieni scrivere gli operatori  $\tilde{H}$  e  $A_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) usando gli operatori di creazione e distruzione

$$\begin{aligned} p_\alpha &= \frac{1}{i} \sqrt{\frac{\hbar}{2}} (a_\alpha - a_\alpha^\dagger), & q_\alpha &= \sqrt{\frac{\hbar}{2}} (a_\alpha + a_\alpha^\dagger), \\ [a_\alpha, a_\alpha^\dagger] &= 1, & N_k &= a_\alpha^\dagger a_\alpha, & \alpha &= 1, 2. \end{aligned}$$

Si ottiene facilmente

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{\hbar}{2i} (a_1 a_2^\dagger - a_1^\dagger a_2), \\ A_2 &= \frac{\hbar}{2} (a_1 a_2^\dagger + a_1^\dagger a_2), \\ A_3 &= \frac{\hbar}{2} (N_1 - N_2), \\ \tilde{H} &= (N_1 + N_2 + 1)\hbar. \end{aligned}$$

Usando le espressioni precedenti, le proprietà dei commutatori e ricordando che  $a_\alpha a_\alpha^\dagger = N_\alpha + 1$  è relativamente semplice verificare che

$$[A_1, A_2] = i\hbar A_3, \quad [A_2, A_3] = i\hbar A_1, \quad [A_3, A_1] = i\hbar A_2.$$

Per il quadrato si ottiene

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 = \hbar^2 \left( \frac{N_1 + N_2}{2} \right) \left( \frac{N_1 + N_2}{2} + 1 \right) = \frac{1}{4} (\tilde{H} - 1)(\tilde{H} + 1).$$

Gli autovalori di  $N_1 + N_2$  sono interi o nulli (diciamo  $n \geq 0$ ), mentre gli autovalori di  $A^2$  hanno la forma

$$\frac{n}{2} \left( \frac{n}{2} + 1 \right) \hbar^2 = l(l+1)\hbar^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad l = 0, \frac{1}{2}, 1, \dots$$

**Soluzione 14** (20Apr00). – Riferimento: §12.

Fissiamo il sistema di riferimento con l'asse  $z$  nella direzione del campo elettrico. In questo modo la hamiltoniana del sistema diventa

$$\begin{aligned} H &= \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m} + \frac{m\omega^2(x^2 + y^2 + z^2)}{2} - q\mathcal{E}z \\ &= \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_u^2}{2m} + \frac{m\omega^2(x^2 + y^2 + u^2)}{2} - \Lambda, \end{aligned}$$

dove si è posto

$$u = z - z_0, \quad z_0 = \frac{q\mathcal{E}}{m\omega^2}, \quad \Lambda = \frac{q^2\mathcal{E}^2}{2m\omega^2}.$$

La hamiltoniana è quella di un oscillatore armonico isotropo nelle variabili  $x, y, u$  con un termine costante  $\Lambda$ . Le energie del sistema sono quindi date da

$$E_n = \left(n + \frac{3}{2}\right) \hbar\omega - \Lambda, \quad n = n_1 + n_2 + n_3 \geq 0$$

e le autofunzioni

$$\psi_{n_1 n_2 n_3}(x, y, z) = \Phi_{n_1}(x) \Phi_{n_2}(y) \Phi_{n_3}(z - z_0),$$

dove  $\Phi_n$  sono le funzioni di Hermite. Lo stato fondamentale è

$$\psi_0 = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/4} e^{-\alpha[x^2 + y^2 + (z - z_0)^2]/2} = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/4} e^{-\alpha z_0^2/2} e^{-\alpha r^2/2} e^{\alpha z z_0},$$

( $\alpha = m\omega/\hbar$ ) e la probabilità cercata

$$\begin{aligned} d\mathcal{P} &= d\Omega \int_0^\infty |\psi_0|^2 r^2 dr \\ &\sim d\Omega \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2} e^{-\alpha z_0^2} \int_0^\infty e^{-\alpha r^2} (1 + 2\alpha z_0 r \cos\theta) r^2 dr = d\Omega e^{-\alpha z_0^2} \left(\frac{1}{4\pi} + \frac{\sqrt{\alpha} z_0 \cos\theta}{\pi^{3/2}}\right) \\ &\sim \left(\frac{1}{4\pi} + \frac{\sqrt{\alpha} z_0 \cos\theta}{\pi^{3/2}}\right) d\Omega. \end{aligned}$$

Come ci si aspetta, la probabilità è massima per angoli solidi centrati attorno alla direzione del campo elettrico.

**Soluzione 15** (19Dic00). – Riferimento: §12, §17.

La più generale funzione d'onda del primo livello eccitato si può scrivere nella forma

$$\psi(x, y, z) = (C_1 x + C_2 y + C_3 z) e^{-\alpha r^2/2}, \quad \alpha = \frac{m\omega}{\hbar}, \quad r^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

dove  $C_1, C_2, C_3$  sono costanti. Ricordando che  $x, y, z$  si possono scrivere come combinazioni lineari delle armoniche sferiche  $Y_l^m$  si ha anche

$$\psi(r, \vartheta, \varphi) = (AY_1^1 + BY_1^0 + CY_1^{-1}) r e^{-\alpha r^2/2}.$$

Conviene scegliere l'asse  $z$  orientato lungo la direzione in cui si misura il momento angolare. Con questa scelta  $m = 1$  e così  $B = C = 0$ . Dalla normalizzazione si ricava la costante  $A$ .

$$1 = \|\psi\|^2 = |A|^2 \int_0^\infty r^4 e^{-\alpha r^2} dr \int_\Omega |Y_1^1|^2 d\Omega = \frac{3|A|^2 \pi^{1/2}}{8\alpha^{5/2}},$$

dove  $d\Omega$  è l'elemento di angolo solido. Quindi  $|A|^2 = 8\alpha^{5/2}/3\pi^{1/2}$ .

Classicamente la particella si può muovere all'interno di una sfera di raggio  $R$ , dove

$$E = \frac{m\bar{v}^2}{2} + \frac{m\omega^2 R^2}{2} = \frac{m\omega^2 R^2}{2} \quad \Longrightarrow \quad R = \sqrt{\frac{5\hbar}{m\omega}} = \sqrt{\frac{5}{\alpha}}.$$

La probabilità di trovare la particella nella zona classicamente inaccessibile è quindi data dall'integrale (che si deve risolvere numericamente)

$$\mathcal{P}(|r| > R) = \int_R^\infty \int_\Omega |\psi|^2 r^2 dr d\Omega = |A|^2 \int_R^\infty e^{-\alpha r^2} r^4 dr = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \int_5^\infty \xi^{3/2} e^{-\xi} d\xi \sim 0.075.$$

**Soluzione 16** (21Nov01). – Riferimento: §12.

Immediatamente dopo la misura la particella si trova nel primo livello eccitato (degenerazione 2) e quindi la sua funzione d'onda ha la forma

$$\psi = A\phi_0(x)\phi_1(y) + B\phi_1(x)\phi_0(y),$$

dove  $\phi_n$  sono le funzioni di Hermite e  $A, B$  sono costanti arbitrarie. Senza perdere in generalità, si possono orientare gli assi in modo che  $A = 1/\sqrt{2}$  e  $B = i/\sqrt{2}$ . In tal modo si ricava

$$\psi = \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}(x + iy)e^{-\alpha(x^2+y^2)/2} = \sqrt{2}\alpha r e^{-\alpha r^2/2} \frac{e^{i\varphi}}{\sqrt{2\pi}}, \quad \alpha = \frac{m\omega}{\hbar}.$$

Da un punto di vista classico, la particella con energia  $E = 2\hbar\omega$  si muove all'interno di una circonferenza di raggio  $R$  tale che

$$E = \frac{m\omega^2 R^2}{2} \quad \Longrightarrow \quad R^2 = \frac{4\hbar}{m\omega} \quad \Longrightarrow \quad R = \frac{2}{\sqrt{\alpha}}.$$

La probabilità richiesta si calcola facilmente in coordinate polari; infatti

$$\mathcal{P}(r > R) = \int_0^{2\pi} \int_R^\infty |\psi|^2 r dr d\varphi = 2\alpha^2 \int_R^\infty e^{-\alpha r^2} r^3 dr = 5e^{-4} \sim 0.09.$$

**Soluzione 17** (23Gen02). – Riferimento: §12, §17.

Si indichi con  $\psi_{n_1 n_2 n_3}(x, y, z) = \phi_{n_1}(x)\phi_{n_2}(y)\phi_{n_3}(z)$  le autofunzioni dell'oscillatore armonico tridimensionale e con  $\phi_n(x)$  le funzioni di Hermite, autofunzioni dell'oscillatore unidimensionale. Queste sono polinomi di grado  $n$  con parità definita, moltiplicati per il fattore gaussiano. Quindi, senza fare alcun calcolo, si può scrivere

$$\psi(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi_{100}(x, y, z) + i\psi_{010}(x, y, z)],$$

da cui si vede che la funzione d'onda è un autostato della hamiltoniana con energia  $E = E_1 = 5\hbar\omega/2$  (primo livello eccitato). In una misura dell'energia si ottiene il valore  $E_1$  con probabilità 1. Vista la forma di  $\psi$ , ci si aspetta che la probabilità di trovare la particella nel semispazio  $x > 0$  sia  $1/2$ . Eseguendo il calcolo esplicitamente (usando il fatto che le autofunzioni sono reali) si ha

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= \int_{x=0}^\infty \int_{y=-\infty}^\infty \int_{z=-\infty}^\infty |\psi|^2 dx dy dz \\ &= \frac{1}{2} \int_{x=0}^\infty \int_{y=-\infty}^\infty \int_{z=-\infty}^\infty (\psi_{100}^2 + \psi_{010}^2) dx dy dz \\ &= \frac{1}{4} \int_{x=-\infty}^\infty \int_{y=-\infty}^\infty \int_{z=-\infty}^\infty (\psi_{100}^2 + \psi_{010}^2) dx dy dz = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Per rispondere alle altre domande conviene scrivere la funzione d'onda in coordinate polari. Si ha

$$x + iy = r \sin \vartheta e^{i\varphi} = \sqrt{\frac{8\pi}{3}} r Y_1^1$$

e quindi

$$\psi(r, \vartheta, \varphi) = Br e^{-\alpha r^2/2} Y_1^1, \quad |B|^2 = \frac{8\alpha^{5/2}}{3\sqrt{\pi}}.$$

Si vede che  $\psi$  è anche autofunzione di  $L^2$  e  $L_z$  con  $l = m = 1$ . In una misura della componente lungo  $z$  del momento angolare si ottiene perciò il valore  $\hbar$  con probabilità 1.

Il valore medio di  $r$  si ottiene direttamente dalla definizione. Più in generale

$$\begin{aligned} \langle r^n \rangle &= (\psi, r^n \psi) = |B|^2 \int_{r=0}^{\infty} r^{n+4} e^{-\alpha r^2} dr = \frac{|B|^2 \alpha^{-(n+5)/2}}{2} \Gamma\left(\frac{n+5}{2}\right) \\ &= \frac{4\alpha^{-n/2}}{3\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{n+5}{2}\right), \end{aligned}$$

da cui  $\langle r \rangle = 8/(3\sqrt{\pi\alpha})$ .

**Soluzione 18** (27Giu02). – Riferimento: §12, §7.

Posto  $\omega = \sqrt{k/m}$  la hamiltoniana diventa

$$H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2) + \frac{m\omega^2}{2} x^2,$$

che corrisponde ad un moto armonico lungo  $x$  e libero sul segmento  $0 \leq y \leq a$ . Poiché i due moti sono indipendenti (non ci sono termini misti), gli autovalori e gli autovettori hanno la forma

$$\begin{aligned} E_{n_1 n_2} &= \left(n_1 + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega + \frac{\hbar\pi^2 n_2^2}{2ma^2} \\ \psi_{n_1 n_2}(x, y) &= \phi_{n_1}(x) \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n_2 \pi x}{a}, \end{aligned}$$

dove  $\phi_n$  sono le funzioni di Hermite, autofunzioni dell'oscillatore armonico e  $n_1 \geq 0, n_2 \geq 1$ .

Lo stato fondamentale è  $E_{01}$  mentre i primi livelli eccitati sono  $E_{11}, E_{02}, E_{12}, E_{03}, \dots$ . Senza conoscere i parametri, non è possibile stabilire quale sia il primo livello eccitato ( $E_{11}$  o  $E_{02}$ ), però valgono le relazioni

$$E_{11} < E_{12}, \quad E_{02} < E_{12},$$

per cui, nel caso degenerare si deve avere  $E_{11} = E_{02}$ , da cui

$$\omega = \frac{3\pi^2}{2ma^2} \quad \implies \quad k = m\omega^2 = \frac{9m\pi^4}{4a^4}.$$

**Soluzione 19** (11Feb03). – Riferimento: §12, §1.

Le autofunzioni dell'oscillatore armonico tridimensionale e isotropo sono il prodotto di funzioni di Hermite, per cui si vede che la funzione d'onda è la sovrapposizione dello stato fondamentale e del primo livello eccitato (tre volte degenerare). Infatti

$$\begin{aligned} \psi(x, y, z) &= A \left( \frac{1}{\sqrt{\alpha}} + x + y + z \right) e^{-\alpha r^2/2} \\ &= \frac{A}{\sqrt{\alpha}} \left( \frac{\pi}{\alpha} \right)^{3/4} \left[ \psi_{000} + \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_{100} + \psi_{010} + \psi_{001}) \right] \\ &= a \left[ \psi_{000} + \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_{100} + \psi_{010} + \psi_{001}) \right]. \end{aligned}$$

Dalla normalizzazione segue direttamente

$$|a|^2 = \frac{2}{5}, \quad |A|^2 = a\sqrt{\alpha} \left( \frac{\alpha}{\pi} \right)^{3/4}.$$

I possibili valori dell'energia sono ovviamente  $E_0 = 3\hbar\omega/2$  e  $E_1 = 5\hbar\omega/2$  con probabilità  $2/5$  e  $3/5$  rispettivamente, mentre il valore medio di  $H$  è

$$\langle H \rangle = \frac{2}{5} E_0 + \frac{3}{5} E_1 = \frac{21}{10} \hbar\omega.$$

La funzione d'onda al generico istante  $t$  si può scrivere nella forma

$$\Psi(t, \bar{r}) = a \left[ \psi_{000} e^{-iE_0 t/\hbar} + \frac{e^{-iE_1 t/\hbar}}{\sqrt{2}} (\psi_{100} + \psi_{010} + \psi_{001}) \right]$$

ed è evidente che il valori medi di  $x^2$ ,  $y^2$  e  $z^2$  calcolati con questa funzione d'onda sono uguali, per cui

$$\langle r^2 \rangle = 3\langle x^2 \rangle = \|x\Psi\|^2.$$

Data una generica funzione d'onda della forma

$$\Psi = \sum_{n_1 n_2 n_3} c_{n_1 n_2 n_3} \psi_{n_1 n_2 n_3} e^{-iE_{n_1 n_2 n_3} t/\hbar},$$

si ha

$$\begin{aligned} x\Psi &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (a + a^\dagger) \Psi \\ &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \sum_{n_1 n_2 n_3} c_{n_1 n_2 n_3} (\sqrt{n_1} \psi_{n_1-1, n_2 n_3} + \sqrt{n_1+1} \psi_{n_1+1, n_2 n_3}) e^{-iE_{n_1 n_2 n_3} t/\hbar}, \end{aligned}$$

da cui segue direttamente

$$\begin{aligned} \|x\Psi\|^2 &= \frac{\hbar}{2m\omega} \sum_{n_1 n_2 n_3} [|c_{n_1 n_2 n_3}|^2 (2n_1 + 1) \\ &\quad + \sqrt{n_1(n_1+2)} (c_{n_1+2, n_2 n_3}^* c_{n_1 n_2 n_3} e^{i\hbar\omega t} + c_{n_1 n_2 n_3}^* c_{n_1+2, n_2 n_3} e^{-i\hbar\omega t})]. \end{aligned}$$

Nel caso in esame tutti i coefficienti dello sviluppo sono nulli tranne

$$c_{000} = a, \quad c_{100} = c_{010} = c_{001} = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

Segue allora

$$\langle r^2 \rangle = \frac{3\hbar}{2m\omega} (|c_{000}|^2 + 3|c_{100}|^2 + |c_{010}|^2 + |c_{001}|^2) = \frac{21\hbar}{10m\omega}.$$

Si osservi che  $\langle m\omega^2 r^2 \rangle = \langle H \rangle$  e ciò significa che l'energia cinetica e l'energia potenziale hanno valori medi uguali. Questa è una caratteristica dell'oscillatore armonico (succede anche in meccanica classica) ed è dovuta al fatto che le autofunzioni di  $H$  nello spazio degli impulsi sono ancora funzioni di Hermite, questo perchè  $\bar{p}$  e  $\bar{r}$  entrano nella hamiltoniana allo stesso modo, (a parte le costanti, ovviamente). La trasformata di Fourier di una funzione di Hermite è ancora una funzione di Hermite o, detto altrimenti, la trasformata di Fourier, vista come operatore lineare fra spazi di funzioni  $L_2$ , ha come autofunzioni le funzioni di Hermite, con autovalori  $\pm 1$  e  $\pm i$ .

Ciò significa che calcolare il valore medio di  $r^2$  nello spazio delle coordinate è come calcolare il valore medio di  $p^2$  nello spazio degli impulsi (a parte qualche costante è lo stesso integrale).

**Soluzione 20** (13Giu03). – Riferimento: §12, §1.

In assenza del campo elettrico, il sistema è invariante per rotazione attorno all'asse  $z$ , quindi, senza perdere in generalità, si può scegliere il campo elettrico diretto lungo l'asse  $x$ . Come avviene in meccanica classica, ci si aspetta che una forza costante applicata all'oscillatore armonico cambi semplicemente la posizione di equilibrio e lo "zero" dell'energia.

La hamiltoniana del sistema completo è

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 r^2}{2} - q\mathcal{E}x = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2m} + \frac{m\omega^2 [(x-x_0)^2 + y^2]}{2} - \Lambda,$$

dove si è posto

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \Lambda = \frac{q^2 \mathcal{E}^2}{2m\omega^2}, \quad x_0 = \frac{\mathcal{E}}{m\omega^2}.$$

In assenza di campo elettrico, il sistema è un oscillatore armonico bidimensionale, isotropo, con posizione di equilibrio nell'origine delle coordinate. Quindi

$$\psi_{n_1 n_2}^{(0)}(x, y) = \phi_{n_1}(x)\phi_{n_2}(y), \quad E_{n_1 n_2}^{(0)} = (n_1 + n_2 + 1)\hbar\omega = (n + 1)\hbar\omega = E_n^{(0)},$$

dove  $n = n_1 + n_2 \geq 0$  e  $\phi_n$  sono le funzioni di Hermite. La degenerazione  $g_n$  del generico livello è pari al numero di modi in cui un numero intero  $n$  si può scrivere come somma di due interi  $n_1, n_2$ . Si vede facilmente che  $g_n = n + 1$ .

Come ci si aspettava, la hamiltoniana del sistema in presenza del campo elettrico è ancora quella di un oscillatore armonico bidimensionale e isotropo, però con la posizione di equilibrio traslata nel punto  $(x_0, 0)$  e tutti i livelli energetici cambiati banalmente di una quantità costante,  $-\Lambda$ . Le autofunzioni e gli autovalori del sistema completo sono quindi

$$\psi_{n_1 n_2}(x, y) = \phi_{n_1}(x - x_0)\phi_{n_2}(y), \quad E_n = E_{n_1 n_2} = E_n^{(0)} - \Lambda,$$

La degenerazione rimane. Poichè  $\Lambda$  è quadratico nel campo elettrico, non ci sono correzioni ai livelli energetici al primo ordine in  $\mathcal{E}$ . A questo risultato si perviene ovviamente anche usando la teoria delle perturbazioni. Gli elementi di matrice della perturbazione  $V = -q\mathcal{E}x$  sono della forma

$$V_{n_1 n_2, m_1 m_2} = -q\mathcal{E} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_{n_1}(x)x\phi_{m_1}(x) dx \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_{n_2}(y)\phi_{m_2}(y) dy,$$

dove  $n_1 + n_2 = m_1 + m_2 = n$ , poichè le autofunzioni appartengono tutte al sottospazio corrispondente all'autovalore  $E_n$  di cui si cercano le correzioni. Si ha dunque  $n_1 - m_1 = n_2 - m_2$ . A questo punto si possono avere due possibilità:

$n_1 = m_1$ ; in tal caso il primo integrale si annulla perché la funzione integranda è dispari;

$n_1 \neq m_1$ ; in questo caso  $n_2 \neq m_2$  e si annulla il secondo integrale.

In ogni caso tutti gli elementi di matrice sono nulli e quindi, al primo ordine in  $\mathcal{E}$  non ci sono correzioni ai livelli energetici.

## Momento angolare orbitale - Testi

**Esercizio 1.** (30Mag94) – La funzione d'onda di una particella in un potenziale centrale ha la forma

$$\psi = Af(r)(x + z),$$

dove  $A$  è una costante di normalizzazione per la parte angolare della funzione d'onda. a) verificare che  $\psi$  è un'autofunzione del momento angolare; b) determinare il valore di  $l$ ; c) determinare con quale probabilità in una misura del momento angolare si ottiene uno dei possibili valori di  $m$ .

**Esercizio 2.** (16Dic94) – Una particella di massa  $m$  è libera di muoversi sulla superficie di una sfera di raggio  $R$ . Si ricordi la relazione fra energia e momento angolare. a) Determinare energie, degenerazione e autofunzioni degli stati stazionari; b) Sapendo che la particella si trova in uno stato stazionario con autofunzione  $\psi(\vartheta, \varphi) = A \sin \vartheta \sin \varphi$  ( $A$  costante di normalizzazione,  $\vartheta, \varphi$  coordinate polari), determinarne l'energia e dire quale è la probabilità di ottenere il valore  $L_z = \hbar$  in una misura della componente lungo  $z$  del momento angolare.

**Esercizio 3.** (4Ott95) – Si consideri un sistema con momento angolare  $\bar{L}^2 = \hbar^2 l(l + 1)$ . Utilizzando il metodo generale si trovi un limite inferiore a  $\Delta L_x \Delta L_y$ . Si calcolino poi i valori medi  $\langle L_x \rangle, \langle L_y \rangle, \langle L_x^2 \rangle, \langle L_y^2 \rangle$  per un arbitrario autostato di  $L_z$ . Si verifichi che la disuguaglianza generale è soddisfatta.

**Esercizio 4.** (23Lug96) – La funzione d'onda di un oscillatore armonico tridimensionale isotropo di massa  $m_0$  e frequenza angolare  $\omega$  è data da

$$\psi(x, y, z) = A(x + y) e^{-\alpha r^2/2}, \quad \alpha = \frac{m_0 \omega}{\hbar},$$

dove  $A$  è la costante di normalizzazione. Si chiede: a) verificare che  $\psi$  è un'autofunzione del momento angolare e determinare il valore di  $l$ ; b) determinare quali sono i possibili valori di  $m$  e la probabilità di trovare uno di essi se si effettua una misura del momento angolare lungo l'asse  $z$ ; c) determinare il valore medio di  $H$ .

**Esercizio 5.** (2Giu97) – Si misura l'energia di un oscillatore armonico tridimensionale isotropo di massa  $m_0$  e frequenza angolare  $\omega$  e si trova il valore  $E = 5\hbar\omega/2$ . a) Se successivamente si misurasse il momento angolare in una qualunque direzione (individuata dal versore  $\bar{n} = n_x\bar{i} + n_y\bar{j} + n_z\bar{k}$ ), quali sarebbero i possibili risultati della misura? Si effettua effettivamente la misura del momento angolare nella direzione individuata da  $\bar{n}$  e si trova un determinato valore  $m\hbar$ . b) Calcolare il valore medio di  $L_z$  immediatamente dopo la seconda misura; c) Supponendo che il risultato della seconda misura sia zero e prendendo  $\bar{n} = (\bar{i} + \bar{j})/\sqrt{2}$ , scrivere la funzione d'onda del sistema.

**Esercizio 6.** (22Dic97) – Una particella si trova in uno stato rappresentato mediante la funzione d'onda

$$\psi = f(r) (r + x + y + z) ,$$

( $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ). Quali sono i possibili risultati se si effettua una misura del momento angolare lungo una delle tre direzioni spaziali e quali sono le probabilità di ottenerli?

**Esercizio 7.** (31Mag99) – Un oscillatore armonico tridimensionale, isotropo, di massa  $m$ , frequenza angolare  $\omega$  e carica  $q$  è immerso in un campo magnetico uniforme  $\bar{B}$  parallelo all'asse  $z$ .

a) Scrivere la hamiltoniana esatta del sistema in presenza del campo magnetico;

b) scrivere la hamiltoniana approssimata  $H$  trascurando i termini in  $B$  di ordine superiore al primo.

Si consideri ora il sistema descritto dalla hamiltoniana  $H$  e si supponga che si trovi in uno stato rappresentato dalla funzione d'onda

$$\psi(x, y, z) = A(x + iy)e^{-\alpha r^2/2} , \quad \alpha = \frac{m\omega}{\hbar} , \quad r^2 = x^2 + y^2 + z^2 .$$

c) verificare che  $\psi$  è autofunzione di  $L^2$  e determinarne l'autovalore.

Dire quali sono i possibili risultati e con quali probabilità si possono ottenere se si misurano (indipendentemente)

d) la proiezione del momento angolare lungo l'asse  $z$ ;

e) l'energia;

f) la proiezione del momento angolare lungo l'asse  $x$  (o  $y$ ).

Aiuto: per rispondere all'ultima domanda, si osservi che il risultato non deve dipendere dal nome dato alle coordinate. Ciò significa che il risultato non cambia se scambiamo  $x$  con  $z$ .

**Esercizio 8.** (11Giu01) – La funzione d'onda di una particella in un potenziale centrale ha la forma

$$\psi = Af(r) (\cos \vartheta + \sin \vartheta \sin \varphi) , \quad \int_0^\infty |f(r)|^2 r^2 dr = 1 ,$$

dove  $A$  è una costante di normalizzazione. Determinare i valori medi delle componenti cartesiane del momento angolare e i possibili valori del numero quantico magnetico se si misura  $L_z$ .

## Momento angolare orbitale - Soluzioni

**Soluzione 1** (30Mag94). – Riferimento: §17, §25.

In coordinate polari si ha

$$\psi = rf(r)A(\cos \varphi \sin \vartheta + \cos \vartheta) = rf(r)A\sqrt{\frac{4\pi}{3}} \left[ \frac{1}{\sqrt{2}} (Y_1^{-1} - Y_1^1) + Y_1^0 \right] ,$$

da cui si vede che  $\psi$  è un'autofunzione di  $L^2$  con  $l = 1$  e che la probabilità di ottenere uno dei possibili valori di  $m$  ( $-1, 1, 0$ ) è rispettivamente  $1/4, 1/4$  e  $1/2$ .

**Soluzione 2** (16Dic94). – Riferimento: §17, §25.

Poiché il raggio è fissato, la hamiltoniana diventa  $H = L^2/2I$  ( $I = mR^2$ ). Gli stati stazionari sono le armoniche sferiche  $Y_l^m$  e gli autovalori

$$E_l = \frac{\hbar^2}{2I} l(l+1), \quad d_l = 2l+1 \quad \text{degenerazione.}$$

È immediato verificare che la funzione d'onda (normalizzata) è data da

$$\psi(\vartheta, \varphi) = A \sin \vartheta \sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} (Y_1^1 + Y_1^{-1})$$

e dunque  $l = 1$ . Per l'energia (valore medio di  $H$ ) si ha

$$E = \frac{1}{2}(E_1 + E_1) = \frac{\hbar^2}{I},$$

mentre la probabilità di ottenere  $L_z = \hbar$  è uguale a  $1/2$ .

**Soluzione 3** (4Ott95). – Riferimento: §17, §4.

Poiché il momento angolare è fissato ( $l$  è dato), lo stato del sistema (per quanto riguarda la parte angolare) è la sovrapposizione di  $2l+1$  armoniche sferiche  $Y_l^m$ , cioè

$$\begin{aligned} \psi(\vartheta, \varphi) &= \sum_{m=-l}^l c_m Y_l^m(\vartheta, \varphi), & L_z \psi(\vartheta, \varphi) &= \hbar \sum_{m=-l}^l m c_m Y_l^m(\vartheta, \varphi), \\ \sum_{m=-l}^l |c_m|^2 &= 1 \quad (\text{condizione di normalizzazione}). \end{aligned}$$

Dal principio di indeterminazione (teorema) abbiamo

$$\Delta L_x \Delta L_y \geq \frac{1}{2} |\langle [L_x, L_y] \rangle_\psi| = \frac{\hbar}{2} |\langle L_z \rangle_\psi| = \frac{\hbar^2}{2} \left| \sum_{m=-l}^l m |c_m|^2 \right|.$$

Si osservi che l'ultima espressione si annulla se  $c_m = c_{-m}$ , mentre se  $\psi$  è un autostato di  $L_z$  allora l'espressione diventa semplicemente  $|m|\hbar^2/2$ , da cui si vede che l'indeterminazione cresce con  $|m|$ . Per un arbitrario autostato di  $L_z$  ( $Y_l^m$ ) si ricava facilmente

$$\begin{aligned} \langle L_x \rangle &= \{L_x\}_{mm} = 0, & \langle L_y \rangle &= \{L_y\}_{mm} = 0, \\ \langle L_x^2 \rangle &= \langle L_y^2 \rangle = \frac{\hbar^2}{4} (|c_{lm}^+|^2 + |c_{lm}^-|^2) = \frac{\hbar^2}{2} [l(l+1) - m^2], \end{aligned}$$

$$\Delta L_x \Delta L_y = \frac{\hbar^2}{2} [l(l+1) - m^2] \geq \frac{l\hbar^2}{2} \geq \frac{|m|\hbar^2}{2}.$$

**Soluzione 4** (23Lug96). – Riferimento: §12, §25, §26.

È immediato verificare che

$$\sin \vartheta \sin \varphi = i \left( \frac{3}{2\pi} \right)^{-1/2} (Y_1^{-1} + Y_1^1), \quad \sin \vartheta \cos \varphi = \left( \frac{3}{2\pi} \right)^{-1/2} (Y_1^{-1} - Y_1^1)$$

e dunque

$$\psi(x, y, z) = f(r) (c_{-1} Y_1^{-1} + c_1 Y_1^1), \quad c_1 = c_{-1}^*.$$

Ora è evidente che  $\psi$  è un'autofunzione del momento angolare con  $l = 1$  e i possibili valori di  $m$  sono  $\pm 1$ . Poiché  $|c_1|^2 = |c_{-1}|^2$  le probabilità sono uguali e valgono entrambe  $1/2$ .

Per trovare il valore medio di  $H$ , conviene scrivere  $\psi$  in termini delle autofunzioni della hamiltoniana. Ricordando che per l'oscillatore armonico unidimensionale

$$\phi_0(x) = A_0 e^{-\alpha x^2/2}, \quad \phi_1(x) = A_1 x e^{-\alpha x^2/2},$$

con  $A_i$  costanti di normalizzazione (dipendenti da  $\omega$ ), si ha banalmente

$$\psi(x, y, z) = C [\phi_1(x)\phi_0(y)\phi_0(z) + \phi_0(x)\phi_1(y)\phi_0(z)] = \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi_{100}(x, y, z) + \psi_{010}(x, y, z)],$$

da cui si vede che  $\psi$  è autofunzione di  $H$  con energia

$$E = \frac{1}{2} (E_{100} + E_{010}) = \frac{5\hbar\omega}{2}.$$

Si osservi che non è necessario calcolare la costante di normalizzazione.

**Soluzione 5** (2Giu97). – Riferimento: §17, §25 §12.

Il sistema si trova nel primo livello eccitato, che è tre volte degenere. La sua funzione d'onda è quindi della forma

$$\psi(x, y, z) = A\phi_1(x)\phi_0(y)\phi_0(z) + B\phi_0(x)\phi_1(y)\phi_0(z) + C\phi_0(x)\phi_0(y)\phi_1(z),$$

dove  $A, B, C$  sono costanti tali che  $|A|^2 + |B|^2 + |C|^2 = 1$  e  $\phi_n$  sono le autofunzioni dell'oscillatore armonico unidimensionale (funzioni di Hermite, normalizzate).  $\psi(x, y, z)$  è una funzione di  $r$  per un polinomio di primo grado in  $x, y$  e  $z$ , quindi si può scrivere come sovrapposizione di armoniche sferiche  $Y_1^m(\vartheta, \varphi)$  ( $m = 1, 0, -1$ ). Più precisamente

$$\psi(r, \vartheta, \varphi) = f(r) (c_0 Y_1^0 + c_1 Y_1^1 + c_{-1} Y_1^{-1}),$$

dove

$$f(r) = A_0 r e^{-\alpha r^2/2}, \quad \alpha = \frac{m_0 \omega}{\hbar},$$

$$\int_0^\infty |f|^2 r^2 dr = 1, \quad |A_0|^2 = \frac{8\alpha^{5/2}}{3\sqrt{\pi}},$$

è la parte radiale della funzione d'onda, mentre  $c_m$  sono costanti tali che  $|c_0|^2 + |c_1|^2 + |c_{-1}|^2 = 1$ .

I possibili risultati della misura della proiezione del momento angolare in una qualunque direzione sono evidentemente uguali a  $0, 1, -1$ .

Per rispondere alla seconda domanda osserviamo che il valore medio di  $L_z$  in un autostato di  $L_{\bar{n}}$  è uguale al valore medio di  $L_{\bar{n}}$  in un autostato di  $L_z$ . Dunque

$$\langle L_{\bar{n}} \rangle = n_x \langle L_x \rangle + n_y \langle L_y \rangle + n_z \langle L_z \rangle = n_z \langle L_z \rangle = m\hbar n_z.$$

Infine, per la terza domanda si ha

$$\begin{aligned} L_{\bar{n}} \psi(r, \vartheta, \varphi) &= f(r) \frac{L_x + L_y}{\sqrt{2}} (c_0 Y_1^0 + c_1 Y_1^1 + c_{-1} Y_1^{-1}) \\ &= \frac{\hbar f(r)}{2} [(1-i)c_0 Y_1^1 + (1+i)c_0 Y_1^{-1} + (1+i)c_1 Y_1^0 + (1-i)c_{-1} Y_1^0] = 0, \end{aligned}$$

da cui  $c_0 = 0, (1+i)c_1 + (1-i)c_{-1} = 0$ . Normalizzando si ha infine

$$\psi(r, \vartheta, \varphi) = \frac{f(r)}{2} [(1-i)Y_1^1 - (1+i)Y_1^{-1}].$$

Nota: Per la terza risposta si può osservare che la funzione d'onda è invariante per rotazione attorno a  $\bar{n}$  ( $L_{\bar{n}}\psi = 0$ ) e che  $\bar{n}$  è la bisettrice dell'angolo fra gli assi  $x$  e  $y$ . Ciò significa che  $\psi$  non può dipendere da  $z$  e inoltre deve dipendere da  $x$  e da  $y$  nella stessa maniera. Quindi è un polinomio di primo grado in  $x + y$ , vale a dire

$$\psi(r, \vartheta, \varphi) = A e^{-\alpha r^2/2} (x + y),$$

che normalizzata diventa quella sopra.

**Soluzione 6** (22Dic97). – Riferimento: §17, §25.

La funzione d'onda è un polinomio di primo grado in  $x, y, z$  e quindi è una combinazione di armoniche sferiche con  $l = 0, 1$ . Poiché è presente un termine che non dipende dagli angoli (invariante per rotazione), il coefficiente di  $Y_0^0$  sarà non nullo e quindi  $\psi$  non è un'autofunzione del momento angolare. I coefficienti dello sviluppo si ottengono facilmente ricordando la forma delle prime armoniche sferiche. Si ha

$$\begin{aligned}\psi(r, \vartheta, \varphi) &= r f(r) (1 + \sin \vartheta \sin \varphi + \sin \vartheta \cos \varphi + \cos \vartheta) \\ &= r f(r) \left[ \sqrt{4\pi} Y_0^0 + \sqrt{\frac{4\pi}{3}} Y_1^0 + \sqrt{\frac{2\pi}{3}} (1+i) Y_1^{-1} - \sqrt{\frac{2\pi}{3}} (1-i) Y_1^1 \right].\end{aligned}$$

Si vede dunque che i possibili valori di  $l$  sono 0 e 1 e i possibili valori della misura delle componenti del momento angolare sono  $0, \pm \hbar$ . Le probabilità sono date da

$$\mathcal{P}_{m=0} = \frac{4\pi + 4\pi/3}{8\pi} = \frac{2}{3}, \quad \mathcal{P}_{m=\pm 1} = \frac{4\pi/3}{8\pi} = \frac{1}{6}.$$

**Soluzione 7** (31Mag99). – Riferimento: §17, 12

Il potenziale vettore nella gauge di Coulomb è dato da  $\bar{A} = \bar{B} \times \bar{r}/2$  e la hamiltoniana esatta ha la forma

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \left| \bar{p} - \frac{q\bar{A}}{c} \right|^2 + \frac{m\omega^2 r^2}{2} = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 r^2}{2} - \frac{qBL_z}{2mc} + \frac{q^2 |\bar{A}|^2}{2mc^2},$$

dove  $p^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2$ . Trascurando il termine quadratico nel campo magnetico si ottiene la hamiltoniana del sistema

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 r^2}{2} - \frac{qBL_z}{2mc} = H_0 - \frac{qB}{2mc} L_z.$$

$H_0$  è la hamiltoniana dell'oscillatore armonico libero, che ha autofunzioni e autovalori dati da

$$\phi_{ijk}(x, y, z) = \phi_i(x)\phi_j(y)\phi_k(z), \quad E_n^{(0)} = (n + \frac{3}{2})\hbar\omega, \quad n = i + j + k \geq 0,$$

con  $\phi_i(x)$  funzioni di Hermite. Il sistema rappresentato dalla hamiltoniana  $H$  si trova nello stato  $\psi(x, y, z) = A(x + iy)e^{-\alpha r^2/2}$ . E' immediato verificare che questo è la sovrapposizione di due autofunzioni dell'oscillatore libero  $\phi_{100}$  e  $\phi_{010}$ . Infatti, ricordando l'espressione di  $x$  in termini di operatori di creazione e distruzione e la forma dello stato fondamentale  $\phi_{000} \sim e^{-\alpha r^2/2}$  si ha

$$\psi(x, y, z) = C(a_x + a_x^\dagger) + i(a_y + a_y^\dagger)\phi_{000} = C(\phi_{100} + i\phi_{010}),$$

con  $C = 1/\sqrt{2}$  costante di normalizzazione.  $\psi$  è dunque autofunzione di  $H_0$  con autovalore  $E_1^{(0)}$ .

L'autofunzione del sistema si può scrivere in coordinate polari. Ricordando l'espressione di  $x, y$  e la forma delle armoniche sferiche si ha facilmente

$$\psi = C(r)Y_1^1, \quad \int_0^\infty |C(r)|^2 r^2 dr = 1.$$

Da quest'ultima espressione, è evidente che  $\psi$ , non solo è autofunzione di  $L^2$ , ma anche di  $L_z$  e di conseguenza anche di  $H$ ; infatti

$$H\psi = \left[ H_0 - \frac{qB}{2mc} L_z \right] \psi = \left[ E_1^{(0)} - \hbar \frac{qB}{2mc} \right] \psi = E\psi.$$

L'unico risultato della misura del momento angolare lungo  $z$  è dunque  $\hbar$  e della misura dell'energia è  $E$ , entrambi con probabilità 1.

Per ricavare i possibili risultati della misura del momento angolare lungo  $x$  si deve sviluppare  $\psi$  in autofunzioni di  $L_x$ . Poiché  $l = 1$  lo sviluppo conterrà solo tre autofunzioni. Per calcolare le autofunzioni

di  $L_x$  corrispondenti a  $l = 1$ , conviene scrivere le autofunzioni di  $L_z$  (le tre armoniche sferiche  $Y_1^m$ ) come funzione di  $x, y, z$  e fare una rotazione ciclica. Si ha

$$\begin{aligned} L_z Y_1^{\pm 1} &= L_z \left[ \pm i \frac{x \pm iy}{\sqrt{2}} g(r) \right] = \pm \hbar \left[ \pm i \frac{x \pm iy}{\sqrt{2}} g(r) \right], \\ L_z Y_1^0 &= L_z z g(r) = 0. \end{aligned}$$

Per rotazione ciclica  $x \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow x$  si ottengono le autofunzioni di  $L_x$  (o  $L_y$ ). In particolare

$$\begin{aligned} L_x \left[ \pm i \frac{y \pm iz}{\sqrt{2}} g(r) \right] &= \pm \hbar \left[ \pm i \frac{y \pm iz}{\sqrt{2}} g(r) \equiv L_x f_1^{\pm 1} \right], \\ L_x x g(r) &= 0 \equiv L_x f_1^0. \end{aligned}$$

In termini di  $f_1^m$  si ha

$$\psi(x, y, z) = \tilde{C}(r) \left[ \frac{f_1^0}{\sqrt{2}} - \frac{if_1^1}{2} + \frac{if_1^{-1}}{2} \right].$$

I possibili risultati della misura di  $L_x$  sono ovviamente 0, 1, -1 con probabilità 1/2, 1/4 e 1/4 rispettivamente. Data la simmetria del problema, per  $L_y$  si ottiene lo stesso risultato.

L'ultima parte del problema si poteva risolvere più rapidamente cambiando nome alle coordinate. Se si scambia  $x$  con  $z$ , allora ciò che si deve trovare sono i risultati della misura di  $L_z$  con il sistema descritto dalla funzione  $\tilde{\psi}(x, y, z) = \psi(z, y, x) = A(z + iy)e^{-\alpha r^2/2}$ . Il vantaggio è dato dal fatto che le autofunzioni di  $L_z$  sono le armoniche sferiche e quindi lo sviluppo è immediato. Infatti

$$\tilde{\psi}(x, y, z) = C(r) \left[ \frac{Y_1^0}{\sqrt{2}} - \frac{iY_1^1}{2} - \frac{iY_1^{-1}}{2} \right].$$

**Soluzione 8** (11Giu01). – Riferimento: §17.

Ricordando la forma delle armoniche sferiche  $Y_1^m$ , si può scrivere la funzione d'onda nel modo seguente:

$$\psi = Af(r) \sqrt{\frac{8\pi}{3}} \left[ \frac{1}{\sqrt{2}} Y_1^0 + \frac{i}{2} (Y_1^1 + Y_1^{-1}) \right] = f(r) (c_0 Y_1^0 + c_1 Y_1^1 + c_{-1} Y_1^{-1}).$$

Si ha  $c_1 = c_{-1} = ic_0/\sqrt{2}$  e  $|c_0|^2 + |c_1|^2 + |c_{-1}|^2 = 1$ , da cui (a parte un fattore inessenziale)

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad c_1 = c_{-1} = \frac{i}{2}.$$

Si vede che i possibili valori del numero quantico magnetico sono 0,  $\pm 1$  con probabilità 1/2, 1/4 e 1/4 rispettivamente.

I valori medi di  $L_z$  si ricavano facilmente mediante la formula

$$\langle L_z \rangle = 0 \cdot |c_0|^2 + 1 \cdot |c_1|^2 + (-1) \cdot |c_{-1}|^2 = 0.$$

Per ricavare i valori medi di  $L_x$  e  $L_y$  si osserva che

$$\begin{aligned} L_x Y_l^m &= \frac{\hbar}{2} (C_{lm}^+ Y_l^{m+1} + C_{lm}^- Y_l^{m-1}), \\ L_y Y_l^m &= \frac{\hbar}{2i} (C_{lm}^+ Y_l^{m+1} - C_{lm}^- Y_l^{m-1}), \end{aligned}$$

con  $C_{lm}^{\pm} = \sqrt{l(l+1) - m(m \pm 1)}$ . Dalle formule precedenti si ottiene

$$\begin{aligned} L_x Y_1^0 &= \frac{\hbar}{\sqrt{2}} (Y_1^1 + Y_1^{-1}), & L_x Y_1^1 &= \frac{\hbar}{\sqrt{2}} Y_1^0, & L_x Y_1^{-1} &= \frac{\hbar}{\sqrt{2}} Y_1^0, \\ L_y Y_1^0 &= \frac{\hbar}{\sqrt{2}i} (Y_1^1 - Y_1^{-1}), & L_y Y_1^1 &= -\frac{\hbar}{\sqrt{2}i} Y_1^0, & L_y Y_1^{-1} &= \frac{\hbar}{\sqrt{2}i} Y_1^0, \end{aligned}$$

da cui segue

$$\begin{aligned}\langle L_x \rangle &= \frac{\hbar}{\sqrt{2}} (c_0 Y_1^0 + c_1 Y_1^1 + c_{-1} Y_1^{-1}, c_0 [Y_1^1 + Y_1^{-1}] + [c_1 + c_{-1}] Y_1^0) = 0, \\ \langle L_y \rangle &= \frac{\hbar}{\sqrt{2}i} (c_0 Y_1^0 + c_1 Y_1^1 + c_{-1} Y_1^{-1}, c_0 [Y_1^1 - Y_1^{-1}] + [-c_1 + c_{-1}] Y_1^0) = 0.\end{aligned}$$

## Momento angolare intrinseco - Testi

**Esercizio 1.** (11Ott94) – Un elettrone è immerso in un campo magnetico costante di intensità  $B$  diretto lungo l'asse  $z$ . Trascurando i gradi di libertà di traslazione, la hamiltoniana è  $H = (e/mc)\bar{s} \cdot \bar{B}$ , dove  $\bar{s} = \hbar\bar{\sigma}/2$  è il momento di spin e  $-e$  è la carica dell'elettrone. a) Si trovino gli autovalori e gli autovettori di  $H$ ; b) se inizialmente lo spin è diretto lungo l'asse  $x$ , trovare la dipendenza dal tempo dei valori medi di  $s_x$ ,  $s_y$  e  $s_z$ .

**Esercizio 2.** (5Giu95) – Lo stato di spin di un elettrone è descritto dalla funzione

$$\chi = \begin{pmatrix} \sqrt{2/3} \\ \sqrt{1/3} \end{pmatrix}.$$

Calcolare i valori medi delle tre componenti (cartesiane) dello spin e la probabilità che esso sia parallelo o antiparallelo a ciascuno dei tre assi cartesiani.

**Esercizio 3.** (18Set96) – Due particelle di spin  $1/2$  hanno momento magnetico rispettivamente  $\mu_1$  e  $\mu_2$  e sono sottoposte ad un campo magnetico  $\bar{B}$ . Senza perdere in generalità, si può considerare un campo uniforme diretto lungo l'asse  $z$ . Trascurando i gradi di libertà di traslazione e l'interazione tra i due momenti magnetici, la Hamiltoniana è data da

$$H = -\mu_1 \bar{B} \cdot \bar{\sigma}_1 - \mu_2 \bar{B} \cdot \bar{\sigma}_2.$$

Inizialmente il sistema si trova in uno stato di singoletto. Si trovi la probabilità che al tempo  $t$  il sistema si trovi in uno stato di tripletto.

**Esercizio 4.** (8Ott96) – Di un elettrone si misura lo spin, prima lungo la direzione individuata dal versore  $\bar{n} = (\bar{i} + \bar{j} + \bar{k})/\sqrt{3}$  ( $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$  sono i versori della terna di riferimento) e subito dopo lungo la direzione individuata dal vettore  $\bar{k}$ . Si chiede: a) quali sono i possibili risultati della prima misura? b) Scelto (a piacere) uno dei risultati possibili, quale è la probabilità di trovare il valore  $1/2$  (in unità  $\hbar$ ) nella seconda misura?

**Esercizio 5.** (26Set97) – Lo stato di spin di un elettrone è descritto da

$$\chi = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Si chiede di determinare: a) il valore medio della componente lungo l'asse  $x$  dell'operatore di spin; b) la probabilità di ottenere il valore  $\hbar/2$  se si misura lo spin nella direzione dell'asse  $x$ .

**Esercizio 6.** (25Gen99) – Si consideri una particella di spin  $1/2$  e si trascurino i gradi di libertà di traslazione. Lo spin è descritto dal vettore  $a|\uparrow\rangle + b|\downarrow\rangle$ . Si misura la componente  $\bar{n} \cdot \bar{\sigma}$  dello spin, ma non si registra il risultato, in modo che lo stato dopo la misura è una mistura incoerente dei due autovettori di  $\bar{n} \cdot \bar{\sigma}$ . Si calcoli la matrice densità che descrive lo stato misto dopo la misura. Si ponga per semplicità  $\bar{n} = (\sin \theta, 0, \cos \theta)$ .

**Esercizio 7.** (20Set01) – Un elettrone si trova in uno stato descritto dallo spinore  $\chi$  e il valore medio della componente lungo l'asse zeta dell'operatore di spin  $s_z$  vale  $\hbar/2$ . Determinare la probabilità di ottenere il valore  $\hbar/2$  se si misura lo spin della particella lungo l'asse  $x$ .

**Esercizio 8.** (17Apr03) – Due particelle di spin  $1/2$  con momenti magnetici  $\mu_1$  e  $\mu_2$  si trovano, all'istante  $t = 0$ , in un generico stato di tripletto, quando vengono sottoposte all'azione di un campo magnetico uniforme  $\vec{B}$ .

Trascurando l'interazione fra le due particelle e i gradi di libertà di traslazione, determinare la probabilità di trovare il sistema nello stato di singoletto, al generico istante  $t$ .

## Momento angolare intrinseco - Soluzioni

**Soluzione 1** (11Ott94). – Riferimento: §19, §5, §4.

Se si trascurano i gradi di libertà di traslazione, gli autostati di  $H = (e/mc)Bs_z$  coincidono con quelli di  $s_z$  ( $e = |e|$ ). Dunque

$$\chi_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad E_+ = \frac{\hbar e B}{2mc}, \quad \chi_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad E_- = -\frac{\hbar e B}{2mc}.$$

I due autovettori di  $s_x$  sono

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\chi_+ + \chi_-), \quad \beta = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\chi_+ - \chi_-)$$

e poiché inizialmente lo spin è diretto lungo  $x$ , lo stato del sistema per  $t = 0$  deve essere rappresentato da un autostato di  $s_x$ , diciamo  $\alpha$ . Quindi  $\chi(0) = \alpha$ . In un generico istante si ha

$$\chi(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \chi_+ e^{-iE_+t/\hbar} + \chi_- e^{-iE_-t/\hbar} \right).$$

Per un generico operatore hermitiano  $\Sigma$  si ha

$$\langle \Sigma \rangle_\chi = \frac{1}{2} \left\{ \langle \Sigma \rangle_{\chi_+} + \langle \Sigma \rangle_{\chi_-} + e^{2iE_+t/\hbar} (\chi_+, \Sigma \chi_-) + \left[ e^{2iE_+t/\hbar} (\chi_+, \Sigma \chi_-) \right]^* \right\}.$$

Posto  $\omega = E_+/\hbar = eB/2mc$  (frequenza di Larmor) si ha

$$\langle s_x \rangle_\chi = \hbar \cos(2\omega t), \quad \langle s_y \rangle_\chi = \hbar \sin(2\omega t), \quad \langle s_z \rangle_\chi = 0.$$

Volendo, anziché la rappresentazione di Schrödinger si può usare quella di Heisenberg. In tal caso lo stato su cui si media è  $\alpha$ , però gli operatori cambiano nel tempo, cioè  $\bar{s} = \bar{s}(t)$ ,  $\bar{s}(0) = \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}$ . Si ha

$$\begin{aligned} \dot{s}_x &= \frac{1}{i\hbar} [s_x, H] = \frac{eB}{i\hbar mc} [s_x, s_z] = -2\omega s_y, \\ \dot{s}_y &= \frac{1}{i\hbar} [s_y, H] = \frac{eB}{i\hbar mc} [s_y, s_z] = 2\omega s_x, \\ \dot{s}_z &= \frac{1}{i\hbar} [s_z, H] = \frac{eB}{i\hbar mc} [s_z, s_z] = 0. \end{aligned}$$

La terza equazione si risolve banalmente, mentre derivando le prime due si ha

$$\ddot{s}_x + 4\omega^2 s_x = 0, \quad \ddot{s}_y + 4\omega^2 s_y = 0.$$

Ricordando le condizioni iniziali e le equazioni del primo ordine si ha la soluzione

$$\begin{aligned} s_x &= \frac{\hbar}{2} [\sigma_x \cos(2\omega t) + \sigma_y \sin(2\omega t)], \\ s_y &= \frac{\hbar}{2} [\sigma_x \sin(2\omega t) - \sigma_y \cos(2\omega t)], \\ s_z &= \frac{\hbar \sigma_z}{2}. \end{aligned}$$

Prendendo i valori medi nello stato  $\alpha$  si ottiene il risultato precedente.

**Soluzione 2** (5Giu95). – Riferimento: §19, §4.

Scriviamo la funzione d'onda nella forma

$$\chi = c_+^k \chi_+^k + c_-^k \chi_-^k, \quad s_k \chi_{\pm}^k = \pm \frac{\hbar}{2} \chi_{\pm}^k, \quad k = 1, 2, 3.$$

In tal modo  $|c_{\pm}^k|^2$  rappresenta le probabilità che lo spin sia parallelo (antiparallelo) all'asse  $k$ . Per quanto riguarda i valori medi si ricava (gli autostati di  $s_k$  si prendono normalizzati)

$$\langle s_k \rangle_{\chi} = \frac{\hbar}{2} (|c_+^k|^2 - |c_-^k|^2).$$

Per quanto riguarda la componente  $s_z$  si ha

$$c_+^z = \sqrt{\frac{2}{3}}, \quad c_-^z = \sqrt{\frac{1}{3}}, \quad \chi_+^z = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi_-^z = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e dunque  $2/3$  e  $1/3$  sono le probabilità che lo spin sia parallelo o antiparallelo all'asse  $z$  e  $\hbar/6$  il valore medio di  $s_z$ . Per  $s_x$  si ha

$$c_+^x = \frac{2 + \sqrt{2}}{2\sqrt{3}}, \quad c_-^x = \frac{2 - \sqrt{2}}{2\sqrt{3}}, \quad \chi_{\pm}^x = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \pm 1 \end{pmatrix},$$

da cui si ottiene  $1/2 + \sqrt{2}/3$ ,  $1/2 - \sqrt{2}/3$  e  $\hbar\sqrt{2}/3$ . Infine, per  $s_y$

$$c_+^y = \frac{2 - i\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}, \quad c_-^y = \frac{2 + i\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}, \quad \chi_{\pm}^y = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \end{pmatrix},$$

da cui si ha  $1/2$ ,  $1/2$  e  $0$  per il valore medio.

**Soluzione 3** (18Set96). – Riferimento: §20.

Scriviamo l'equazione di Schrödinger per la parte di spin della funzione d'onda nella forma

$$i\hbar\partial_t f(t) = -B (\mu_1 \sigma_z^1 + \mu_2 \sigma_z^2) f(t)$$

e, per risolverla, sviluppiamo  $f(t)$  nella base (ortonormale)

$$\begin{aligned} \chi_{++} &= \chi_+^1 \chi_+^2, & \chi_{+-} &= \chi_+^1 \chi_-^2, \\ \chi_{--} &= \chi_-^1 \chi_-^2, & \chi_{-+} &= \chi_-^1 \chi_+^2, \\ \chi_+ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, & \chi_- &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, & \sigma_z \chi_{\pm} &= \pm \chi_{\pm}. \end{aligned}$$

Posto  $\omega_{\pm} = B(\mu_1 \pm \mu_2)/\hbar$  si ottiene

$$\begin{aligned} \dot{f}(t) &= \dot{a}\chi_{++} + \dot{b}\chi_{+-} + \dot{c}\chi_{-+} + \dot{d}\chi_{--} = i(a\omega_+\chi_{++} + b\omega_-\chi_{+-} - c\omega_-\chi_{-+} - d\omega_+\chi_{--}), \\ f(0) &= \frac{\chi_{+-} - \chi_{-+}}{\sqrt{2}}, \quad b(0) = -c(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad a(0) = d(0) = 0, \end{aligned}$$

dove  $f(0)$  è lo stato di singoletto. Integrando si ha

$$b(t) = \frac{e^{i\omega_- t}}{\sqrt{2}}, \quad c(t) = -\frac{e^{-i\omega_- t}}{\sqrt{2}}, \quad a(t) = d(t) = 0.$$

La probabilità che al tempo  $t$  il sistema sia ancora nello stato di singoletto è data da

$$|(f(0), f(t))|^2 = \cos^2 \omega_- t$$

e la probabilità di transizione al tripletto è ovviamente  $1 - \cos^2 \omega_- t = \sin^2 \omega_- t$ . Si osservi che la media temporale è  $1/2$ .

Allo stesso risultato si perviene ovviamente usando le tecniche usuali. Le autofunzioni della hamiltoniana sono  $\chi_{++}, \chi_{+-}, \chi_{-+}, \chi_{--}$  con energie  $-\hbar\omega_+, -\hbar\omega_-, \hbar\omega_-, \hbar\omega_+$  rispettivamente. Si ha dunque

$$f(t) = c_1 \chi_{++} e^{i\omega_+ t} + c_2 \chi_{+-} e^{i\omega_- t} + c_3 \chi_{-+} e^{-i\omega_- t} + c_4 \chi_{--} e^{-i\omega_+ t}$$

e dalla condizione iniziale  $f(0) = (\chi_{+-} - \chi_{-+})/\sqrt{2}$  si ricava  $c_1 = c_4 = 0$  e  $c_2 = -c_3 = 1/\sqrt{2}$ . La funzione così ottenuta è evidentemente quella precedente.

**Soluzione 4** (8Ott96). – Riferimento: §19.

I possibili risultati della prima misura sono ovviamente  $\pm 1/2$  (in unità  $\hbar$ ) come si ha lungo una qualunque direzione. Per trovare gli autostati basta risolvere l'equazione

$$s_n \phi = \frac{\hbar}{2\sqrt{3}} \bar{n} \cdot \sigma \phi = \frac{\hbar}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1-i \\ 1+i & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \pm \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix},$$

che ha le seguenti soluzioni corrispondenti agli autovalori  $\pm 1/2$

$$\phi_{\pm} = \sqrt{\frac{3 \mp \sqrt{3}}{6}} \begin{pmatrix} \mp(1-i)\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\mp(1-i)\sqrt{3}}{\sqrt{6(3 \mp \sqrt{3})}} \chi_+ + \sqrt{\frac{3 \mp \sqrt{3}}{6}} \chi_-,$$

dove  $\chi_{\pm}$  sono gli autostati di  $s_z$ . Immediatamente dopo la prima misura il sistema si troverà in uno degli autostati  $\phi$ , diciamo  $\phi_+$  con spin  $1/2$ . La probabilità di ottenere il valore  $1/2$  nella seconda misura è data da

$$|\langle \chi_+, \phi_+ \rangle|^2 = \frac{3 + \sqrt{3}}{6} \sim 0.788.$$

Volendo si può procedere anche nel modo seguente, che permette di ricavare la soluzione in maniera rapida, senza calcolare esplicitamente  $\phi_{\pm}$ . Si osserva che, data un'terna di versori  $\bar{n}, \bar{u}, \bar{v}$  arbitraria, si ha

$$\bar{s} = \bar{i}s_x + \bar{j}s_y + \bar{k}s_z = \bar{n}s_n + \bar{u}s_u + \bar{v}s_v.$$

La stessa relazione vale per i valori medi rispetto ad uno stato qualunque. In particolare, se lo stato su cui si media è un autostato di  $s_n$ , (diciamo  $\phi_+$ ) allora  $\langle s_u \rangle_{\phi_+} = \langle s_v \rangle_{\phi_+} = 0$ . In tal modo si ricava la relazione

$$\langle s_z \rangle_{\phi_+} = \bar{k} \cdot \bar{n} \langle s_n \rangle_{\phi_+}$$

e relazioni analoghe per le altre componenti. Nel caso in questione, posto  $\phi_+ = c_+ \chi_+ + c_- \chi_-$  ( $|c_+|^2 + |c_-|^2 = 1$ ) si ha anche

$$\langle s_z \rangle_{\phi_+} = \frac{\hbar}{2} (|c_+|^2 - |c_-|^2) = \frac{\hbar}{2} (2|c_+|^2 - 1) = \frac{\hbar}{2\sqrt{3}}.$$

$|c_+|^2$  è la probabilità cercata, che ovviamente dipende solo dall'angolo fra  $\bar{n}$  e  $\bar{k}$ .

**Soluzione 5** (26Set97). – Riferimento: §19.

E' immediato verificare che  $\chi$  è autostato di  $S_x$  con autovalore  $\hbar/2$ . Infatti

$$S_x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Questo significa che il valore medio di  $S_x$  in questo stato è  $\hbar/2$  (l'autovalore) e questo è anche il risultato della misura (probabilità uguale ad 1).

**Soluzione 6** (25Gen99). – Riferimento: §18.

Siano

$$\chi_1 = |\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi_2 = |\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

gli autostati di  $\sigma_z$  e  $\phi_{\pm}$  gli autostati di  $\bar{n} \cdot \bar{\sigma}$ , vale a dire

$$\bar{n} \cdot \bar{\sigma} \phi_{\pm} = \pm \phi_{\pm}.$$

Lo stato  $\chi$  del sistema si può sviluppare nella base  $\phi_{\pm}$  e si ha

$$\chi = a\chi_1 + b\chi_2 = c_1\phi_+ + c_2\phi_-, \quad |c_1|^2 + |c_2|^2 = 1, \quad |a|^2 + |b|^2 = 1.$$

Il possibile risultato della misura dello spin lungo la direzione individuata dal vettore  $\bar{n}$  sarà  $\hbar/2$  con probabilità  $p_1 = |c_1|^2$  e  $-\hbar/2$  con probabilità  $p_2 = |c_2|^2$  e dopo la misura il sistema si troverà nello stato  $\phi_+$ , se la misura è  $\hbar/2$  e nello stato  $\phi_-$  se la misura è  $-\hbar/2$ . Poiché il risultato della misura non viene registrato, si può solo dire che lo stato sarà  $\phi_+$  con probabilità  $p_1$  e  $\phi_-$  con probabilità  $p_2$  e dunque si ha uno stato misto

$$\psi = p_1\phi_+ + p_2\phi_-.$$

L'operatore densità (nella notazione di Dirac) è dato da'

$$\rho = |\phi_+ \rangle p_1 \langle \phi_+| + |\phi_- \rangle p_2 \langle \phi_-|,$$

e la matrice densità, nella base  $\chi_{1,2}$  è

$$\rho_{ij} = p_1(\chi_i|\phi_+)(\phi_+, \chi_j) + p_2(\chi_i|\phi_-)(\phi_-, \chi_j), \quad i, j = 1, 2.$$

Effettuando i calcoli si ottiene

$$\begin{aligned} \phi_+ &= \cos \frac{\vartheta}{2} \begin{pmatrix} \frac{\sin \vartheta}{1+\cos \vartheta} \\ 1 \end{pmatrix}, & \phi_- &= \sin \frac{\vartheta}{2} \begin{pmatrix} \frac{\sin \vartheta}{1-\cos \vartheta} \\ 1 \end{pmatrix}, \\ p_1 &= (a \sin \frac{\vartheta}{2} - b \cos \frac{\vartheta}{2})^2, & p_2 &= (a \cos \frac{\vartheta}{2} + b \sin \frac{\vartheta}{2})^2. \end{aligned}$$

**Soluzione 7** (20Set01). – Riferimento: §19, §4.

Si scriva la funzione d'onda nella forma

$$\chi = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix},$$

Dalla normalizzazione si ha

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1,$$

e per il valore medio di  $s_z$  si ottiene

$$\langle s_z \rangle_{\chi} = \frac{\hbar}{2} (|\alpha|^2 - |\beta|^2) = \frac{\hbar}{2}.$$

In questo modo si ottiene  $|\alpha| = 1$  e  $|\beta| = 0$ . Si ha quindi

$$\chi = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix} = c_+\chi_+ + c_-\chi_-, \quad \chi_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \pm 1 \end{pmatrix},$$

dove  $\chi_{\pm}$  sono le autofunzioni di  $s_x$  con autovalori  $\pm\hbar/2$ .

Poiché  $\chi$  è autofunzione di  $s_z$ , si può subito dire che la probabilità di ottenere il valore  $\hbar/2$  in una misura dello spin in una qualunque direzione del piano  $(x, y)$  è  $1/2$ .

Volendo eseguire il calcolo esplicitamente si ha

$$c_{\pm} = (\chi_{\pm}, \chi) = \frac{\alpha}{\sqrt{2}}.$$

$|c_+|^2 = 1/2$  rappresenta la probabilità di ottenere  $\hbar/2$  in una misura di  $s_x$ .

**Soluzione 8** (17Apr03). – Riferimento: §20.

Trascurando l'interazione fra le due particelle e i gradi di libertà traslazionali, la hamiltoniana del sistema assume la forma

$$H = -\mu_1 \bar{B} \cdot \bar{\sigma}^{(1)} - \mu_2 \bar{B} \cdot \bar{\sigma}^{(2)},$$

dove  $\bar{\sigma}$  sono le matrici di Pauli e gli apici  $(1)$  e  $(2)$  distinguono le due particelle. Orientiamo gli assi in maniera che  $\bar{B}$  sia parallelo a  $z$ . Allora

$$H = -\mu_1 B \bar{\sigma}_z^{(1)} - \mu_2 B \bar{\sigma}_z^{(2)}.$$

Gli autostati di  $H$  sono

$$\begin{aligned} \chi_{++} &= \chi_+^{(1)} \chi_+^{(2)}, & \chi_{+-} &= \chi_+^{(1)} \chi_-^{(2)}, & \chi_{-+} &= \chi_-^{(1)} \chi_+^{(2)}, & \chi_{--} &= \chi_-^{(1)} \chi_-^{(2)}, \\ \chi_+ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, & \chi_- &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, & \sigma_z \chi_{\pm} &= \pm \chi_{\pm}, \end{aligned}$$

con i rispettivi autovalori

$$-\hbar\omega_+, \quad -\hbar\omega_-, \quad \hbar\omega_-, \quad \hbar\omega_+,$$

dove si è posto  $\omega_{\pm} = B(\mu_1 \pm \mu_2)/\hbar$ . Gli stati stazionari precedenti formano una base per lo spazio di Hilbert (la parte di spin) del sistema e quindi, un generico stato al tempo  $t$  si può scrivere nella forma

$$f(t) = c_1 \chi_{++} e^{i\omega_+ t} + c_2 \chi_{+-} e^{i\omega_- t} + c_3 \chi_{-+} e^{-i\omega_- t} + c_4 \chi_{--} e^{-i\omega_+ t}.$$

I coefficienti  $c_k$  dell'espansione si determinano dalla condizione iniziale  $f(0)$ .

Nel caso in esame, inizialmente il sistema si trova in un generico stato di tripletto. Ciò significa che

$$f(0) = \alpha \chi_{++} + \frac{\beta}{\sqrt{2}} (\chi_{+-} + \chi_{-+}) + \gamma \chi_{--},$$

da cui  $c_1 = \alpha$ ,  $c_2 = c_3 = \beta/\sqrt{2}$ ,  $c_4 = \gamma$ . L'ampiezza di transizione fra lo stato di singoletto e  $f(t)$  è

$$\begin{aligned} &\left( \frac{\chi_{+-} - \chi_{-+}}{\sqrt{2}}, \alpha \chi_{++} e^{i\omega_+ t} + \frac{\beta}{\sqrt{2}} \chi_{+-} e^{i\omega_- t} + \frac{\beta}{\sqrt{2}} \chi_{-+} e^{-i\omega_- t} + \gamma \chi_{--} e^{-i\omega_+ t} \right) \\ &= \frac{\beta}{2} (e^{i\omega_- t} - e^{-i\omega_- t}) = -i\beta \sin \omega_- t, \end{aligned}$$

da cui segue la probabilità di transizione

$$\mathcal{P} = \beta^2 \sin^2 \omega_- t.$$

Si noti che la probabilità di transizione è non nulla solo se lo stato iniziale ha una componente con  $s_z = 0$ . Questo è dovuto al fatto che lo spin del sistema lungo la direzione del campo è conservato.

## Potenziale centrale - Testi

**Esercizio 1.** (4Gen95) – Una particella di massa  $m$  si muove in un potenziale centrale dato da

$$V(r) = -e^2 r^{-1} e^{-\alpha r}.$$

Si determini la correzione ai livelli energetici al primo ordine in  $\alpha$ .

**Esercizio 2.** (5Giu95) – Una molecola biatomica è approssimata come un sistema composto di due punti materiali di massa  $m$  interagenti con un potenziale centrale

$$V(r) = \frac{\kappa(r-a)^2}{2}.$$

Si scriva l'equazione radiale e si sviluppi il potenziale che vi compare (che comprende il "potenziale centrifugo") in serie attorno al minimo  $r_0$  tralasciando i termini di grado superiore al secondo. Si calcolino in questa approssimazione i livelli energetici. (Si consiglia di lasciare indicato  $r_0$  e sostituirlo solo alla fine con un valore approssimato ottenuto supponendo  $r_0 - a \ll a$ ).

# Potenziale centrale - Soluzioni

**Soluzione 1** (4Gen95). – Riferimento: §22.

Sviluppando il potenziale si ricava  $V(r) = -\frac{e^2}{r} + \alpha e^2 + O(\alpha^2)$ . Al primo ordine in  $\alpha$  il potenziale differisce per una costante ( $\alpha e^2$ ) da quello dell'atomo di idrogeno. Per i livelli energetici si ha quindi (ovviamente non serve usare la teoria delle perturbazioni)

$$E_n^{(1)} = E_n^{(0)} + \alpha e^2 = -2\pi\hbar \frac{R}{n^2} + \alpha e^2,$$

dove  $R$  è la costante di Rydberg.

**Soluzione 2** (5Giu95). – Riferimento: §21, §12.

L'equazione radiale per il sistema è data da

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\chi'' + V_{eff}\chi = E\chi,$$

dove  $\chi(r) = rR(r)$ ,  $\mu = m/2$  è la massa ridotta e

$$V_{eff} = \frac{k(r-a)^2}{2} + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2}.$$

Se  $r_0$  è il minimo di  $V_{eff}$  si ha

$$V'_{eff}(r_0) = k(r-a) - \frac{\hbar^2 l(l+1)}{\mu r^3} = 0, \quad V_{eff}(r) \sim V_{eff}(r_0) + V''_{eff}(r_0) \frac{(r-r_0)^2}{2}.$$

In questa approssimazione l'equazione diventa

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\chi'' + V''_{eff}(r_0) \frac{(r-r_0)^2}{2}\chi = [E - V_{eff}(r_0)]\chi,$$

che è l'equazione di un oscillatore armonico con frequenza angolare

$$\omega^2 = \frac{V''_{eff}(r_0)}{\mu}.$$

Le autofunzioni  $\chi_n(r)$  sono le funzioni di Hermite  $\phi_n(r-r_0)$  mentre lo spettro è dato da

$$E_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega + V_{eff}(r_0).$$

Nell'approssimazione  $r_0 - a \ll a$ , il valore di  $r_0$  si determina analiticamente. Infatti

$$\hbar^2 l(l+1) = k\mu(r-a)r^3 = k\mu a^3(r-a) \left(1 + \frac{r-a}{a}\right)^3 \sim k\mu a^3(r-a) \left(1 + 3\frac{r-a}{a}\right),$$

da cui  $r_0 = a + \frac{2\hbar^2 l(l+1)}{mka^3}$

## Buche di potenziale sferiche - Testi

**Esercizio 1.** (1Set94) – Una particella di massa  $m$  si trova in una buca di potenziale sferica con  $V(r) = -v_0$  per  $r < a$  e  $V(r) = 0$  per  $r > a$ . a) Scrivere l'equazione di Schrödinger per questo sistema; b) determinare il valore massimo di  $v_0$  per cui non esistono stati legati; c) determinare per quale valore di  $v_0$  lo stato fondamentale ha energia  $-\frac{1}{2}v_0$ ; d) usando per  $v_0$  il valore determinato in c), calcolare la probabilità di trovare la particella dentro la buca se il sistema si trova nello stato fondamentale;

**Esercizio 2.** (7Ott97) – Una particella di massa  $m$  si muove liberamente nel volume limitato da due sfere concentriche di raggi  $a$  e  $b$  ( $a > b$ ), con barriere di potenziale impenetrabili sulle superfici.

a) calcolare i livelli energetici e le funzioni d'onda normalizzate con momento angolare nullo; b) discutere la possibilità di calcolare perturbativamente i livelli energetici con momento angolare non nullo quando  $b$  è molto grande (rispetto a cosa?); c) calcolare esplicitamente i livelli usando una ulteriore approssimazione valida per  $a - b \ll b$ .

**Esercizio 3.** (21Lug98) – Una particella di massa  $m$  si muove liberamente nel guscio sferico definito da  $r_1 \leq r \leq r_2 = r_1 + \varepsilon$ , con barriere impenetrabili sulle due sfere  $r = r_1$  e  $r = r_2$ . Si imposti il problema del calcolo dei livelli energetici (si noti che se  $\varepsilon$  è molto piccolo, il potenziale centrifugo varia di poco nella regione in cui si trova la particella).

a) Si calcolino i livelli energetici nell'approssimazione in cui il potenziale centrifugo è costante (uguale al suo valore in  $r = (r_1 + r_2)/2$ ).

b) Si migliori l'approssimazione usando il metodo perturbativo.

**Esercizio 4.** (27Lug99) – Una particella di massa  $m$  si trova in una buca di potenziale sferica con  $V(r) = -v_0$  per  $r \leq a$  e  $V(r) = 0$  per  $r > a$  ( $v_0 > 0$ ).

a) Scrivere l'equazione differenziale che determina tutte le soluzioni con momento angolare nullo;

b) determinare i valori di  $v_0$  per cui si hanno  $n$  stati legati con momento angolare nullo.

**Esercizio 5.** (18Feb01) – Una particella di massa  $m$  è libera di muoversi all'interno di una sfera di raggio  $a$  ( $V(r) = 0$  per  $r < a$ ,  $V(r) = \infty$  per  $r \geq a$ ). La sua funzione d'onda è

$$\psi = A \cos \frac{\pi r}{a},$$

con  $A$  costante di normalizzazione.

Si effettua una misura dell'energia della particella. Dire quali sono i possibili risultati della misura e quali sono le probabilità di ottenerli.

**Esercizio 6.** (27Giu01) – Una particella di massa  $m$  si trova in una buca di potenziale sferica con  $V(r) = -v_0$  ( $v_0 > 0$ ) per  $r < a$  e  $V(r) = 0$  per  $r > a$  e i parametri  $(m, a, v_0)$  sono tali per cui si ha un solo stato legato.

a) Scrivere l'equazione di Schrödinger per questo sistema;

b) scrivere le condizioni (disuguaglianze) che devono soddisfare i parametri del problema affinché esista un solo stato legato;

c) sapendo che il sistema si trova nello stato fondamentale con energia  $E$  ( $|E| \ll v_0$ ), determinare la probabilità di trovare la particella nella zona  $r < a$ .

**Esercizio 7.** (19Set02) – Una particella di massa  $m$  è libera di muoversi all'interno di una sfera di raggio  $a$  (barriere di potenziale impenetrabili in  $r = a$ ). La particella si trova in uno stato rappresentato dalla funzione d'onda

$$\psi(\vec{r}) = \begin{cases} Ar(a-r), & 0 < r < a, \\ 0, & r > a. \end{cases}$$

Determinare:

a) il valore medio di  $H$ ;

b) i possibili valori dell'energia;

c) il valore più probabile in una misura di  $E$ ;

d) la probabilità di trovare il sistema nel primo livello eccitato.

## Buche di potenziale sferiche - Soluzioni

**Soluzione 1** (1Set94). – Riferimento: §21.

Supponiamo che  $v_0 < v_{max}$ , dove  $v_{max}$  è il massimo valore di  $v_0$  per cui non esistono stati legati. Se  $v_0$  è vicino a  $v_{max}$  esisterà un solo stato legato, lo stato fondamentale ( $E < 0, l = 0$ ). Posto  $\alpha = \sqrt{2m|E|}/\hbar$ ,  $k = \sqrt{2m(v_0 - |E|)}/\hbar$  e  $\chi(r) = R(r)/r$  si ha

$$\begin{aligned} \chi'' + k^2\chi &= 0, & r < a, & \implies \chi = A \sin kr, \\ \chi'' - \alpha^2\chi &= 0, & r > a, & \implies \chi = Be^{-\alpha r}. \end{aligned}$$

Imponendo la continuità della funzione e della derivata si ottiene la condizione

$$k \cot ka = -\alpha \implies \sin \xi = \pm \frac{\hbar}{\sqrt{2mv_0a^2}} \xi, \quad \tan \xi < 0,$$

dove  $\xi = ka$ . Le soluzioni accettabili stanno negli intervalli  $\xi \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ ,  $\xi \in (\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$ , ... Il minimo si ha per  $\xi = \pi/2$  a cui corrisponde  $v_{max} = \hbar^2 \pi^2 / 8ma^2$ .

Per  $E = -v_0/2$  si ha  $k^2 = \alpha^2$  e  $\cot \xi = -1$ . Dunque  $\xi = 3\pi/4$  e  $v_0 = 9\hbar^2 \pi^2 / 16ma^2$ . Per le soluzioni si ha

$$A \sin ka = Be^{-\alpha a} \implies B = \frac{Ae^{3\pi/4}}{\sqrt{2}}.$$

Dalla normalizzazione si ricava  $A = \sqrt{\frac{6\pi}{(4+3\pi)a}}$  e infine

$$\mathcal{P}(r < a) = \int_0^a |\chi(r)|^2 dr = \frac{3\pi + 2}{3\pi + 4} \sim 0.85.$$

**Soluzione 2** (7Ott97). – Riferimento: §21, §13, 7.

Il potenziale è di tipo centrale. Le autofunzioni della hamiltoniana sono della forma

$$\psi(r, \vartheta, \varphi) = R(r) Y_l^m(\vartheta, \varphi),$$

dove  $Y_l^m$  sono le armoniche sferiche e la parte radiale soddisfa l'equazione differenziale

$$\left[ \frac{1}{2m} \left( p_r^2 + \frac{l(l+1)}{r^2} \right) + V(r) - E \right] R(r) = 0, \quad V(r) = \begin{cases} 0 & b < r < a, \\ \infty & r \notin (b, a). \end{cases}$$

Per gli stati con  $l = 0$  (posto  $R = \chi/r$  e  $k = \sqrt{2mE}/\hbar$ ) si ha

$$\chi'' + k^2\chi = 0, \quad \chi(b) = \chi(a) = 0, \quad \int_0^a |\chi(r)|^2 dr = 1,$$

che è l'equazione di Schrödinger per una buca di larghezza  $a - b$ , traslata in  $r = x + b$ . La soluzione normalizzata è quindi data da

$$\begin{aligned} \chi &= \sqrt{\frac{2}{a-b}} \sin \frac{n\pi(r-b)}{a-b}, & n &\geq 1, \\ \psi_{n00} &= \sqrt{\frac{2}{a-b}} \frac{1}{r} \sin \frac{n\pi(r-b)}{a-b}, & E_n^{(0)} &= \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{2m(a-b)^2}. \end{aligned}$$

Per applicare la teoria delle perturbazioni, il valore medio del potenziale dalla perturbazione stessa deve essere molto minore dell'energia del livello corrispondente. Dunque

$$\left\langle \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2} \right\rangle \ll E_n^{(0)}.$$

Poichè  $\langle r \rangle > b$  si ottiene la condizione

$$b \gg \frac{\sqrt{l(l+1)}}{n\pi} (a-b).$$

In questa situazione ha senso applicare la teoria delle perturbazioni. Per la correzione all'energia si ottiene

$$\begin{aligned} E_n^{(1)} &= \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2m} \frac{2}{(a-b)} \int_b^a \sin^2 \frac{n\pi(r-b)}{a-b} \frac{dr}{r^2} \\ &\sim \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2m} \frac{1}{b^2} \frac{2}{(a-b)} \int_b^a \sin^2 \frac{n\pi(r-b)}{a-b} dr \\ &= \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mb^2}. \end{aligned}$$

**Soluzione 3** (21Lug98). – Riferimento: §21, §8, §13.

Il potenziale ha simmetria centrale e quindi l'equazione di Schrödinger per la parte radiale della funzione d'onda assume la forma

$$\begin{aligned} \chi''(r) + \frac{2m}{\hbar^2} [E - V_c(r)] \chi(r) &= 0, & V_c(r) &= \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2}, \\ \chi(r_1) = \chi(r_2) &= 0, & \int_{r_1}^{r_2} |\chi(r)|^2 dr &= 1. \end{aligned}$$

E' utile eseguire il cambiamento di variabile  $x = r - r_0$ ,  $r_0 = (r_1 + r_2)/2 = r_1 + \varepsilon/2$ . In tal modo si ha

$$\begin{aligned} \chi''(x) + \frac{2m}{\hbar^2} [E - V_c(x + r_0)] \chi(x) &= 0, \\ \chi(0) = \chi(\varepsilon) &= 0, & \int_{-\varepsilon/2}^{\varepsilon/2} |\chi(x)|^2 dx &= 1. \end{aligned}$$

Nell'approssimazione in cui il potenziale centrifugo è costante e pari al suo valore in  $r_0$ , l'equazione diventa quella di una buca unidimensionale a pareti infinite. Posto  $k^2 = 2m[E^{(0)} - V_c(r_0)]/\hbar^2 \geq 0$  (gli autovalori del laplaciano sono sempre negativi e quindi, in questo caso approssimato, l'energia  $E^{(0)}$  deve essere maggiore del potenziale centrifugo), si ottiene

$$\chi_n(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\varepsilon}} \cos \frac{n\pi x}{\varepsilon}, & n = 1, 3, 5, \dots \\ \sqrt{\frac{2}{\varepsilon}} \sin \frac{n\pi x}{\varepsilon}, & n = 2, 4, 6, \dots \end{cases}$$

$$k = \frac{n\pi}{\varepsilon}, \quad E_n^{(0)} = \frac{\hbar^2}{2m} \left[ \frac{\pi^2 n^2}{\varepsilon^2} + \frac{4l(l+1)}{(r_1 + r_2)^2} \right], \quad n \geq 1.$$

Per applicare la teoria delle perturbazioni si sviluppa il potenziale in serie di potenze di  $x$  ( $|x| \geq \varepsilon/2$ ). Si ha

$$V_c(x + r_0) = \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2m} \frac{1}{(r_0 + x)^2} \sim V_c(r_0) + V_c^{(1)}, \quad V_c^{(1)} = V_c(r_0) \left[ -\frac{2x}{r_0} + \frac{2x^2}{r_0^2} \right].$$

Le correzioni ai livelli energetici sono date da  $E_n^{(1)} = (\chi_n, V_c^{(1)} \chi_n)$ . La parte dispari della perturbazione non dà contributi e dunque per  $n$  dispari si ottiene

$$E_n^{(1)} = \frac{4V_c(r_0)}{r_0^2 \varepsilon} \int_{-\varepsilon/2}^{\varepsilon/2} \left( \cos \frac{n\pi x}{\varepsilon} \right)^2 x^2 dx = \frac{2\varepsilon^2 V_c(r_0)}{r_0^2 \pi^2} \left( \frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{n^2} \right),$$

mentre per  $n$  pari

$$E_n^{(1)} = \frac{4V_c(r_0)}{r_0^2 \varepsilon} \int_{-\varepsilon/2}^{\varepsilon/2} \left( \sin \frac{n\pi x}{\varepsilon} \right)^2 x^2 dx = \frac{2\varepsilon^2 V_c(r_0)}{r_0^2 \pi^2} \left( \frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{n^2} \right).$$

**Soluzione 4** (27Lug99). – Riferimento: §21.

Gli stati stazionari con momento angolare nullo ( $l = 0$ ) hanno la forma  $R(r)Y_0^0$  dove la parte radiale soddisfa l'equazione di Schrödinger con  $l = 0$ . Posto  $E = -|E|$  (stati legati),  $\alpha = \sqrt{2m|E|}/\hbar$ ,  $k = \sqrt{2m(v_0 - |E|)}/\hbar$  e  $\chi(r) = R(r)/r$  si ha

$$\begin{aligned} \chi'' + k^2\chi &= 0, & r < a, & \implies \chi = A \sin kr, \\ \chi'' - \alpha^2\chi &= 0, & r > a, & \implies \chi = B e^{-\alpha r}. \end{aligned}$$

Imponendo la continuità della funzione e della derivata si ottiene la condizione

$$\eta = -\xi \cot \xi, \quad \xi = ak, \quad \eta = \alpha a.$$

Inoltre si ha  $\xi^2 + \eta^2 = 2ma^2v_0/\hbar^2 \equiv \rho^2$ . Gli stati legati si ottengono graficamente dalle intersezioni positive della funzione  $\eta(\xi)$  con la circonferenza di raggio  $\rho$ . Per avere almeno uno stato legato,  $\rho$  deve essere maggiore di  $\pi/2$  e per avere un numero arbitrario  $n$  di stati legati deve essere soddisfatta la condizione

$$(n - \frac{1}{2})\pi < \rho < (n + \frac{1}{2})\pi \quad \longrightarrow \quad \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2}(n - \frac{1}{2})^2 < v_0 < \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2}(n + \frac{1}{2})^2.$$

**Soluzione 5** (18Feb01). – Riferimento: §21,§1.

Dalla normalizzazione della funzione d'onda

$$1 = \|\psi\|^2 = |A|^2 \int_0^a \cos^2 \frac{\pi r}{a} r^2 dr \int d\Omega = \frac{|A|^2(3 + 2\pi^2)a^3}{3\pi},$$

si ottiene la costante

$$|A|^2 = \frac{3\pi}{(3 + 2\pi^2)a^3}.$$

La funzione d'onda della particella è funzione soltanto di  $r$  (non degli angoli) e quindi è invariante per rotazione. Ciò significa che è autofunzione del momento angolare con  $l = m = 0$ . Il suo sviluppo in termini delle autofunzioni  $\psi_{nlm}$  del sistema avrà dunque la forma

$$\psi = \sum_n c_n \psi_{n00}, \quad \psi_{nlm}(r, \vartheta, \varphi) = R_{nl}(r)Y_l^m(\vartheta, \varphi) = \frac{\chi_{nl}(r)}{r} Y_l^m(\vartheta, \varphi).$$

La parte radiale delle autofunzioni soddisfa l'equazione unidimensionale

$$\chi'' + \left[ \frac{2mE}{\hbar^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] \chi = 0, \quad \int_0^a |\chi|^2 dr = 1, \quad r \leq a.$$

Per i nostri scopi è sufficiente calcolare le autofunzioni con  $l = 0$ . In tal caso l'equazione diventa quella della buca unidimensionale a pareti infinite

$$\chi'' + k^2\chi = 0, \quad r \leq a, \quad k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}, \quad \chi(0) = \chi(a) = 0,$$

le cui soluzioni sono

$$\chi_n(r) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi r}{a}, \quad E_n = E_{n00} = \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{2ma^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Quelli sopra sono i possibili risultati se si misura l'energia della particella. Per trovare le probabilità corrispondenti si devono calcolare i coefficienti dello sviluppo. Si ha

$$\begin{aligned} c_n = (f, \psi_{n00}) &= \int_0^a f(r) R_{n0}(r) r^2 dr \int Y_0^0 d\Omega \\ &= \sqrt{4\pi} \int_0^a f(r) \chi_n(r) r dr, \end{aligned}$$

da cui segue

$$c_1 = -\frac{A a^{3/2}}{\sqrt{2\pi}}, \quad c_n = (-1)^n \frac{4A a^{3/2}}{\sqrt{2\pi}} \frac{n}{n^2 - 1}, \quad n \geq 2.$$

La probabilità di ottenere uno dei possibili valori dell'energia è dunque

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{E=E_1} = |c_1|^2 &= \frac{3}{2(3 + 2\pi^2)} \sim 0.66, \\ \mathcal{P}_{E=E_n} = |c_n|^2 &= \frac{24}{3 + 2\pi^2} \frac{n^2}{(n^2 - 1)^2}, \quad n \geq 2. \end{aligned}$$

Lo stato più probabile è quello fondamentale.

**Soluzione 5** (18Feb01). – Riferimento: §21,§1.

Dalla normalizzazione della funzione d'onda

$$1 = \|\psi\|^2 = |A|^2 \int_0^a \cos^2 \frac{\pi r}{a} r^2 dr \int d\Omega = \frac{|A|^2 (3 + 2\pi^2) a^3}{3\pi},$$

si ottiene la costante

$$|A|^2 = \frac{3\pi}{(3 + 2\pi^2) a^3}.$$

La funzione d'onda della particella è funzione soltanto di  $r$  (non degli angoli) e quindi è invariante per rotazione. Ciò significa che è autofunzione del momento angolare con  $l = m = 0$ . Il suo sviluppo in termini delle autofunzioni  $\psi_{nlm}$  del sistema avrà dunque la forma

$$\psi = \sum_n c_n \psi_{n00}, \quad \psi_{nlm}(r, \vartheta, \varphi) = R_{nl}(r) Y_l^m(\vartheta, \varphi) = \frac{\chi_{nl}(r)}{r} Y_l^m(\vartheta, \varphi).$$

La parte radiale delle autofunzioni soddisfa l'equazione unidimensionale

$$\chi'' + \left[ \frac{2mE}{\hbar^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] \chi = 0, \quad \int_0^a |\chi|^2 dr = 1, \quad r \leq a.$$

Per i nostri scopi è sufficiente calcolare le autofunzioni con  $l = 0$ . In tal caso l'equazione diventa quella della buca unidimensionale a pareti infinite

$$\chi'' + k^2 \chi = 0, \quad r \leq a, \quad k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}, \quad \chi(0) = \chi(a) = 0,$$

le cui soluzioni sono

$$\chi_n(r) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi r}{a}, \quad E_n = E_{n00} = \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{2ma^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Quelli sopra sono i possibili risultati se si misura l'energia della particella. Per trovare le probabilità corrispondenti si devono calcolare i coefficienti dello sviluppo. Si ha

$$\begin{aligned} c_n = (f, \psi_{n00}) &= \int_0^a f(r) R_{n0}(r) r^2 dr \int Y_0^0 d\Omega \\ &= \sqrt{4\pi} \int_0^a f(r) \chi_n(r) r dr, \end{aligned}$$

da cui segue

$$c_1 = -\frac{A a^{3/2}}{\sqrt{2\pi}}, \quad c_n = (-1)^n \frac{4A a^{3/2}}{\sqrt{2\pi}} \frac{n}{n^2 - 1}, \quad n \geq 2.$$

La probabilità di ottenere uno dei possibili valori dell'energia è dunque

$$\mathcal{P}_{E=E_1} = |c_1|^2 = \frac{3}{2(3+2\pi^2)} \sim 0.66,$$

$$\mathcal{P}_{E=E_n} = |c_n|^2 = \frac{24}{3+2\pi^2} \frac{n^2}{(n^2-1)^2}, \quad n \geq 2.$$

Lo stato più probabile è quello fondamentale.

**Soluzione 6** (27Giu01). – Riferimento: §21.

Posto  $\alpha = \sqrt{2m|E|}/\hbar$ ,  $k = \sqrt{2m(v_0 - |E|)}/\hbar$  e  $\chi(r) = r R(r)$  si ha

$$\begin{aligned} \chi'' + k^2 \chi &= 0, & r < a, & \implies \chi = A \sin kr, \\ \chi'' - \alpha^2 \chi &= 0, & r > a, & \implies \chi = B e^{-\alpha r}. \end{aligned}$$

Imponendo la continuità della funzione e della derivata si ottiene la condizione

$$\xi \cot \xi = -\eta, \quad \xi \geq 0, \quad \eta \geq 0,$$

dove

$$\xi^2 + \eta^2 = \frac{2mv_0 a^2}{\hbar^2} = R_0^2, \quad \xi = ak, \quad \eta = a\alpha.$$

Le soluzioni accettabili stanno negli intervalli  $\xi \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ ,  $\xi \in (\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$ , ... e si trovano graficamente facendo l'intersezione delle due curve precedenti. Si ha un solo stato legato (una sola intersezione) se

$$\frac{\pi}{2} < R_0 < \frac{3\pi}{2} \implies \frac{\pi^2}{8} < \frac{mv_0 a^2}{\hbar^2} < \frac{9\pi^2}{8}.$$

Come si vede dal grafico, se l'energia è piccola  $\eta \sim 0$  e  $\xi \sim \pi/2$ . Conviene porre  $\xi = \pi/2 + \varepsilon$  e fare lo sviluppo in  $\varepsilon$ . Dall'equazione sopra si ottiene banalmente

$$\eta = -\left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon\right) \cot\left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon\right) \implies \varepsilon \sim \frac{2\eta}{\pi}, \quad \xi = \frac{\pi}{2} + \frac{2\eta}{\pi}$$

Dalla continuità della soluzione segue anche

$$A \sin \xi = B e^{-\eta} \implies A \sim B(1 - \eta),$$

e dalla normalizzazione si ottiene

$$|A|^2 \int_0^a \sin^2 kx \, dx + |B|^2 \int_a^\infty e^{-2\alpha x} \, dx = 1 \implies |B|^2 \sim \frac{2\eta}{a}.$$

Infine si ha

$$\mathcal{P}(r < a) = \int_0^a |\chi|^2 \, dr \int_\Omega |Y_0^0|^2 \, d\Omega = \eta \left(1 - \frac{\sin 2\xi}{2\xi}\right) \sim \eta.$$

**Soluzione 7** (19Set02). – Riferimento: §21, §1.

La funzione d'onda della particella è funzione soltanto di  $r$  (non degli angoli) e quindi è invariante per rotazione. Ciò significa che è autofunzione del momento angolare con  $l = m = 0$ . Conviene perciò scriverla nella forma

$$\psi = B r(a-r) Y_0^0, \quad B = \sqrt{4\pi} A.$$

Dalla normalizzazione della funzione d'onda

$$1 = \|\psi\|^2 = |B|^2 \int_0^a [r(a-r)]^2 r^2 \, dr \int_\Omega |Y_0^0|^2 \, d\Omega = \frac{a^7 |B|^2}{105},$$

si ottiene la costante  $|B|^2 = 105/a^7$ .

Il valore medio dell'energia si ricava direttamente dalla definizione  $\langle H \rangle = (\psi, H\psi)$ . Poiché  $l = 0$  si ha

$$H\psi = \frac{p_r^2}{2m}\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\right)^2 Br(a-r)Y_0^0 = \frac{\hbar^2 B}{2m}\left(\frac{2a}{r} - 6\right)Y_0^0,$$

$$\langle H \rangle = \frac{\hbar^2|B|^2}{2m}\int_0^a r(a-r)\left(\frac{2a}{r} - 6\right)r^2 dr \int_{\Omega} |Y_0^0|^2 d\Omega = \frac{\hbar^2|B|^2 a^5}{15m} = \frac{\hbar^2}{7ma^2}.$$

Lo sviluppo di  $\psi$  in termini delle autofunzioni  $\psi_{nlm}$  del sistema avrà la forma

$$\psi = \sum_n c_n \psi_{n00}, \quad \psi_{nlm}(r, \vartheta, \varphi) = R_{nl}(r)Y_l^m(\vartheta, \varphi) = \frac{\chi_{nl}(r)}{r}Y_l^m(\vartheta, \varphi).$$

La parte radiale delle autofunzioni soddisfa l'equazione unidimensionale

$$\chi'' + \left[\frac{2mE}{\hbar^2} - \frac{l(l+1)}{r^2}\right]\chi = 0, \quad \int_0^a |\chi|^2 dr = 1, \quad r \leq a.$$

Per i nostri scopi è sufficiente calcolare le autofunzioni con  $l = 0$ . In tal caso l'equazione diventa quella della buca unidimensionale a pareti infinite

$$\chi'' + k^2\chi = 0, \quad r \leq a, \quad k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}, \quad \chi(0) = \chi(a) = 0,$$

le cui soluzioni sono

$$\chi_n(r) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi r}{a}, \quad E_{n00} = \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{2ma^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Quelli sopra sono i possibili risultati se si misura l'energia della particella (Nota: non sono tutte le possibili energie del sistema!). Per trovare le probabilità corrispondenti si devono calcolare i coefficienti dello sviluppo. Si ha

$$c_n = (\psi_{n00}, \psi) = \int_0^a \int_{\Omega} R_{n0}(r)Y_0^0 \psi r^2 dr d\Omega = B \int_0^a r(a-r)\chi_n(r)r dr,$$

da cui segue

$$|c_n|^2 = \frac{840}{\pi^6 n^6} \sim \frac{0.87}{n^6}, \quad n = 1, 3, 5, \dots$$

$$|c_n|^2 = \frac{7560}{\pi^6 n^6} < 0.13, \quad n = 2, 4, 6, \dots$$

Si vede che il valore più probabile per l'energia è quello corrispondente allo stato fondamentale  $\psi_{100}$ . Ci si aspetta che il primo livello eccitato del sistema sia compreso tra  $E_{100}$  ed  $E_{200}$  ed abbia  $l = 1$ . La probabilità richiesta è pertanto nulla. La verifica si può fare studiando gli zeri della funzione di Bessel  $J_{3/2}(\sqrt{2mE} a/\hbar)$ , che è autofunzione con  $l = 1$ .

## Atomo di idrogeno - Testi

**Esercizio 1.** (30Mag94) – Un elettrone in un atomo di idrogeno si trova nello stato fondamentale quando viene posto per un tempo  $T$  in un campo elettrico dipendente dal tempo  $\vec{E} = \vec{u}E_0 \cos \omega t$ , dove  $\vec{u}$  è un versore generico. Al tempo  $t > T$  si misura il momento angolare e l'energia della particella. Determinare: a) la probabilità di ottenere un valore  $m = 1$  per la proiezione del momento angolare lungo la direzione individuata da  $\vec{u}$ ; b) la probabilità di ottenere un valore  $E = -m_0 e^4 / 8\hbar^2$  per l'energia (si usi la teoria delle perturbazioni al primo ordine nel campo).

**Esercizio 2.** (1Dic95) – L'elettrone di un atomo di idrogeno si trova nello stato fondamentale. Calcolare: a) la probabilità di trovare l'elettrone ad una distanza dal nucleo maggiore della distanza classica; b)  $\Delta x$

e  $\Delta p_x$  in tale stato, e verificare esplicitamente che soddisfano alla relazione di correlazione del Principio di indeterminazione (si osservi, senza eseguire il calcolo, che i valori medi di  $x$  e  $p_x$  in tale stato sono nulli).

**Esercizio 3.** (24Giu97) – Si consideri un atomo di idrogeno (senza spin) nel livello fondamentale e si calcolino i valori medi e le dispersioni dell'energia potenziale e cinetica.

**Esercizio 4.** (21Jun00) – Una particella di massa  $m$  e carica  $e$  è attratta da un nucleo pesante mediante un potenziale centrale della forma (potenziale di Yukawa)

$$V(r) = -\frac{\alpha e^{-\lambda r}}{r}, \quad \alpha > 0, \quad \lambda > 0.$$

- a) Si scriva l'equazione di Schrödinger per gli stati stazionari del sistema e si studi l'andamento asintotico delle soluzioni;  
 b) si calcolino esplicitamente le energie e gli autostati di  $H$  al primo ordine in  $\lambda$ ;  
 c) usando la teoria delle perturbazioni, si calcoli l'energia dello stato fondamentale al secondo ordine in  $\lambda$ .

## Atomo di idrogeno - Soluzioni

**Soluzione 1** (30Mag94). – Riferimento: §22, §14.

Scegliamo il sistema di riferimento con l'asse  $z$  parallelo a  $\vec{u}$ . In tal modo il potenziale dell'elettrone di carica  $-e$  e massa  $m_0$  dovuto al campo elettrico esterno è dato da

$$V = e\vec{E} \cdot \vec{r} = rE_0 \cos \omega t \cos \vartheta = rE_0 \cos \omega t \sqrt{\frac{4\pi}{3}} Y_1^0.$$

Il generico stato dell'elettrone imperturbato (trascurando lo spin) ha la forma

$$\psi_{nlm} = R_{nl} Y_l^m, \quad \psi_{100} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} R_{10}$$

e dunque

$$V_{nlm,100} = \frac{E_0 \cos \omega t}{\sqrt{3}} (R_{nl} Y_l^m, r R_{10} Y_1^0) = \frac{E_0 \cos \omega t}{\sqrt{3}} \delta_{l1} \delta_{m0} \int_0^\infty R_{n1} R_{10} r^3 dr.$$

Dopo la perturbazione, l'elettrone può trovarsi in uno stato con  $l = 1$  e  $m = 0$  (regole di selezione). La probabilità di ottenere  $m = 1$  è evidentemente nulla (poiché la perturbazione non dipende da  $\varphi$  si conserva la componente lungo  $z$  del momento angolare). L'energia cercata corrisponde a quella del primo livello eccitato ( $n = 2$ ) e dunque

$$V_{210,100} = \frac{E_0 \cos \omega t}{3\sqrt{2}a_H} \int_0^\infty e^{-3r/2a_H} r^4 dr = \frac{E_0 \cos \omega t}{3\sqrt{2}} \left(\frac{4a_H}{3}\right)^4,$$

$$a_H = \frac{\hbar^2}{m_0 e^2} \text{ raggio di Bohr.}$$

La probabilità cercata è data da

$$|a_{210,100}|^2 = \frac{E_0^2}{18\hbar^2} \left(\frac{4a_H}{3}\right)^8 \left| \int_0^T e^{i(\omega_{21} t \cos \omega t} dt \right|^2$$

$$= \frac{E_0^2}{18\hbar^2} \left(\frac{4a_H}{3}\right)^8 \left\{ \left[ \frac{\sin \frac{(\omega_{21} + \omega)T}{2}}{\omega_{21} + \omega} \right]^2 + \left[ \frac{\sin \frac{(\omega_{21} - \omega)T}{2}}{\omega_{21} - \omega} \right]^2 \right.$$

$$\left. + 2 \cos \omega T \frac{\sin \frac{(\omega_{21} + \omega)T}{2} \sin \frac{(\omega_{21} - \omega)T}{2}}{\omega_{21}^2 - \omega^2} \right\},$$

dove  $\omega_{21} = (E_2 - E_1)/\hbar = 3m_0e^4/8\hbar^3$ .

**Soluzione 2** (1Dic95). – Riferimento: §22.

La funzione d'onda del sistema è data da

$$\psi(r, \vartheta, \varphi; s) = 2a_H^{-\frac{3}{2}} e^{-r/a_H} f(\vartheta, \varphi; s), \quad a_H = \frac{\hbar^2}{me^2},$$

dove la parte angolare e di spin  $f(\vartheta, \varphi; s) = \chi(s)/4\pi$  non interviene nei conti che seguono e possiamo tralasciarla (è normalizzata per proprio conto). Il raggio classico dell'atomo con energia arbitraria  $E$  è dato da  $r_{cl} = e^2/2|E|$ . Nello stato fondamentale l'elettrone ha energia  $E_1 = -e^2/2a_H$  da cui  $r_{cl} = a_H$  (raggio di Bohr). Si ha ( $N_e \sim 2.72$  è il numero di Nepero).

$$\mathcal{P}(r > r_{cl}) = \frac{4}{a_H^3} \int_{a_H}^{\infty} e^{-2r/a_H} r^2 dr = N_e^{-2} \sim 0.135.$$

I valori medi di  $x$  e  $p$  sono nulli perché lo stato fondamentale è una funzione pari di  $x$  (un valore medio non nullo farebbe distinzione fra destra e sinistra). I valori medi di  $x^2$  e  $p_x^2$  si possono calcolare usando direttamente la definizione, però in tal caso si ottengono integrali abbastanza complicati. Osservando che lo stato su cui si media è invariante per rotazione, si deve avere

$$\begin{aligned} \langle x^2 \rangle &= \langle y^2 \rangle = \langle z^2 \rangle = \frac{1}{3} \langle r^2 \rangle, \\ \langle p_x^2 \rangle &= \langle p_y^2 \rangle = \langle p_z^2 \rangle = \frac{1}{3} \langle \vec{p}^2 \rangle = \frac{2m}{3} [\langle H \rangle - \langle V \rangle]. \end{aligned}$$

Si ricava facilmente

$$\langle r^2 \rangle = \frac{4}{a_H^3} \int_0^{\infty} e^{-2r/a_H} r^4 dr = 3a_H^2,$$

$$\langle H \rangle = E_1 = -\frac{e^2}{2a_H}, \quad \langle V \rangle = -\frac{4e^2}{a_H^3} \int_0^{\infty} e^{-2r/a_H} r dr = -\frac{e^2}{a_H},$$

da cui  $\Delta x = a_H$ ,  $\Delta p_x = e\sqrt{\frac{m}{3a_H}}$  e  $\Delta x \Delta p_x = \frac{\hbar}{\sqrt{3}} > \frac{\hbar}{2}$ .

**Soluzione 3** (24Giu97). – Riferimento: §22, §4.

Posto  $H = T + V$  si ha

$$\begin{aligned} \langle T \rangle &= \langle H - V \rangle = \langle H \rangle - \langle V \rangle, \\ \langle T^2 \rangle &= \langle (H - V)^2 \rangle = \langle H^2 \rangle + \langle V^2 \rangle - \langle HV \rangle - \langle VH \rangle. \end{aligned}$$

Se il valore medio è calcolato rispetto ad un qualunque autostato di  $H$  allora si ha

$$\langle H \rangle = E, \quad \langle H^2 \rangle = E^2, \quad \langle HV \rangle = \langle VH \rangle = E \langle V \rangle,$$

dove  $E$  è l'energia dell'autostato corrispondente. Per la dispersione si ottiene

$$(\Delta T)^2 = \langle T^2 \rangle - \langle T \rangle^2 = \langle V^2 \rangle - \langle V \rangle^2 = (\Delta V)^2.$$

E' dunque sufficiente calcolare le grandezze corrispondenti a  $V$  (che è più semplice). Per lo stato fondamentale dell'atomo di idrogeno si ha

$$\psi = \frac{2}{a_H^{3/2}} e^{-r/a_H} Y_0^0, \quad E = -\frac{e^2}{2a_H}, \quad a_H = \frac{\hbar^2}{me^2},$$

da cui

$$\begin{aligned} \langle V \rangle &= (\psi, V\psi) = -\frac{4e^2}{a_H^3} \int_0^{\infty} e^{-2r/a_H} r dr \int |Y_0^0|^2 d\Omega = -\frac{e^2}{a_H}, \\ \langle V^2 \rangle &= (\psi, V^2\psi) = \frac{4e^4}{a_H^3} \int_0^{\infty} e^{-2r/a_H} dr \int |Y_0^0|^2 d\Omega = \frac{2e^4}{a_H^2}. \end{aligned}$$

E infine

$$\begin{aligned}\langle T \rangle &= E - \langle V \rangle = \frac{e^2}{2a_H}, \\ \langle T^2 \rangle &= E^2 + \langle V^2 \rangle - 2E\langle V \rangle = \frac{5e^4}{4a_H^2}, \\ \Delta T = \Delta V &= \frac{e^2}{a_H}.\end{aligned}$$

**Soluzione 4** (21Jun00). – Riferimento: §22, §13.

Il potenziale è di tipo centrale, pertanto le autofunzioni di  $H$  sono della forma

$$\psi_{nlm}(r, \vartheta, \varphi) = \frac{\chi_{nl}(r)}{r} Y_l^m(\vartheta, \varphi),$$

dove  $\chi(r)$  soddisfa l'equazione di Schrödinger ridotta

$$\chi'' + \left\{ \frac{2m}{\hbar^2} [E - V(r)] - \frac{l(l+1)}{r^2} \right\} \chi = 0,$$

con  $E < 0$  (stati legati). Poichè  $V(r) \rightarrow 0$  per  $r \rightarrow \infty$  e  $V(r) \sim -\alpha/r$  per  $r \rightarrow 0$ , l'andamento asintotico delle soluzioni è lo stesso di quello che si ha per il potenziale coulombiano (atomo di idrogeno).

Al primo ordine in  $\lambda$ , il potenziale diventa

$$V(r) \sim V_0(r) = -\frac{\alpha}{r} + \lambda\alpha,$$

che è un potenziale coulombiano a meno di una costante positiva  $\lambda\alpha$ . Pertanto le autofunzioni e gli autovalori di  $H$  sono

$$\Phi_{nlm} = \left( \frac{2}{na} \right)^{3/2} \left[ \frac{(n-l-1)!}{2n[(n+1)!]^3} \right]^{1/2} \varrho^l e^{-\varrho/2} L_{n+l}^{2l+1}(\varrho),$$

$$E_n = -\frac{\alpha}{2an^2} + \lambda\alpha, \quad \varrho = \frac{2r}{na}, \quad a = \frac{\hbar^2}{m\alpha},$$

( $L_p^q$  sono i polinomi di Laguerre). Si osservi che l'approssimazione ha senso se  $\lambda \ll 1/2a$ .

Al secondo ordine in  $\lambda$  il potenziale diventa

$$V(r) \sim V_0(r) + V_1(r), \quad V_1(r) = \frac{\lambda^2 \alpha r}{2}.$$

Per la hamiltoniana  $H_0 = \bar{p}^2/2m + V_0$  si conosce la soluzione esatta e il termine  $V_1$  si può pensare come una piccola perturbazione. È quindi possibile calcolare la correzione ai livelli energetici usando la teoria delle perturbazioni al primo ordine nel parametro  $\lambda^2$ . In tal modo si ha

$$\begin{aligned}\Delta E_1 = (\Phi_{100}, V_1 \Phi_{100}) &= -\frac{4\lambda^2 \alpha}{2a^3} \int_0^\infty e^{-2r/a} r^3 dr \\ &= -\frac{3}{4} \lambda^2 \alpha a\end{aligned}$$

e infine, al secondo ordine in  $\lambda^2$ ,

$$E_1 = -\frac{\alpha}{2a} + \lambda\alpha - \frac{3}{4} \lambda^2 \alpha a = -\frac{m\alpha^2}{2\hbar^2} + \lambda\alpha - \frac{3\lambda^2 \hbar^2}{m}.$$

Si osservi che la correzione all'ordine  $\lambda^2$  non dipende da  $\alpha$ .

Nota: si ottiene lo stesso risultato applicando la teoria delle perturbazioni al secondo ordine in  $\lambda$  alla hamiltoniana  $\bar{p}^2/2m - \alpha/r$  con perturbazione  $\lambda\alpha - \lambda^2 \alpha r/2$ .

## Diffusione - Testi

**Esercizio 1.** (24Lug95) – Una particella (senza spin) di massa  $m$  ed energia  $E$  urta contro un potenziale centrale repulsivo  $V(r) = \gamma/r^2$ , ( $\gamma > 0$ , costante). Si chiede: a) scrivere l'equazione di Schrödinger per questo sistema; b) calcolare (esattamente) gli sfasamenti  $\delta_l$  per tutti i valori di  $l$  e verificare che non dipendono dall'energia della particella; c) discutere la convergenza della serie che dà la sezione d'urto totale.

## Diffusione - Soluzioni

**Soluzione 1** (24Lug95). – Riferimento: §24, §21, §27.

Per la parte radiale dell'equazione di Schrödinger si ottiene

$$\chi'' + \left[ k^2 - \frac{\nu^2}{r^2} \right] \chi = 0, \quad \nu^2 = \left( l + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{2m\gamma}{\hbar^2}.$$

La soluzione per  $\chi(r)$  (che si annulla nell'origine), a meno di una costante inessenziale, è data da

$$\chi_l(r) = \sqrt{\frac{kr\pi}{2}} J_\nu(kr),$$

che per  $r \rightarrow \infty$  ha il comportamento asintotico

$$\chi_l(r) \sim \sin\left(kr - \frac{\nu\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(kr - \frac{l\pi}{2} + \frac{[l+1/2-\nu]\pi}{2}\right),$$

e dunque  $\delta_l = (l + 1/2 - \nu)\pi/2$  non dipende dall'energia. Per valutare la convergenza della serie che dà la sezione d'urto totale osserviamo che

$$\nu = \left( l + \frac{1}{2} \right) \sqrt{1 + \frac{2m\gamma}{(l + 1/2)^2 \hbar^2}} \sim l + \frac{1}{2} + \frac{2m\gamma}{(2l + 1)\hbar^2}, \quad \delta_l \sim -\frac{m\pi\gamma}{(2l + 1)\hbar^2}$$

e quindi la serie diverge. Infatti

$$\sigma_{tot} = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l + 1) \sin^2 \delta_l \sim \left( \frac{2\pi m\gamma}{\hbar^2 k} \right)^2 \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{2l + 1}.$$

## Metodo variazionale - Testi

**Esercizio 1.** (20Apr95) – Un elettrone di carica  $-e$  è sottoposto ad un potenziale centrale

$$V(r) = \frac{e}{r} [1 + (Z - 1)e^{-\beta r}],$$

che assomiglia al potenziale di un nucleo schermato dagli altri  $(Z - 1)$  elettroni. Usando il metodo variazionale con la funzione di prova  $\psi = C \exp(-tr)$ , trovare un limite superiore all'energia dello stato fondamentale.

**Esercizio 2.** (4Ott95) – Una particella di massa  $m$  si muove all'interno del triangolo definito dalle disuguaglianze  $x > 0$ ,  $y > 0$ ,  $x + y < a$  con barriere infinite sui tre lati e potenziale nullo all'interno. Utilizzando una funzione di prova del tipo  $\psi(x, y) = Cxy(a - x - y)$  si trovi un limite superiore all'energia dello stato fondamentale.

**Esercizio 3.** (18Set96) – Una particella di massa  $m$  si muove su di una retta ed è soggetta al potenziale

$$V(x) = 0, \quad |x| > a, \quad V(x) = -v, \quad |x| < a.$$

a) Si trovi l'energia dello stato fondamentale e la relativa funzione d'onda normalizzata nel limite in cui  $a \rightarrow 0$ ,  $v \rightarrow \infty$ ,  $av = \text{costante}$ .

b) Si consideri un potenziale composto da due buche molto strette e molto profonde simili a quella sopra descritta, ma centrate nei punti  $x = \pm d/2$ . Usando il metodo variazionale, si trovi un'approssimazione per eccesso dell'energia del livello fondamentale. Nella scelta della funzione di prova, si utilizzino le funzioni d'onda ottenute in presenza di una sola buca e si ricordi che la funzione d'onda dello stato fondamentale è simmetrica per  $x \rightarrow -x$ .

**Esercizio 4.** (16Dic96) – Una particella di massa  $m$  si muove sul segmento  $-a < x < a$  con barriere impenetrabili alle estremità. Si indichino con  $E_1^{(0)}, E_2^{(0)}, \dots$  e con  $\psi_1(x), \psi_2(x), \dots$  i livelli energetici e le relative autofunzioni quando il potenziale all'interno della buca è nullo. Si introduca poi un potenziale

$$V(x) = v x$$

e si calcoli l'energia dello stato fondamentale a) usando il metodo perturbativo al primo ordine; b) usando il metodo variazionale con la funzione di prova

$$\psi(x) = (1 + |\lambda|^2)^{-1/2} (\psi_1 + \lambda \psi_2).$$

**Esercizio 5.** (24Feb97) – Una particella di massa  $m$  è vincolata a stare nel segmento  $|x| \leq a/2$  (barriere impenetrabili agli estremi) ed è soggetta al potenziale

$$V(x) = \begin{cases} \frac{va}{\varepsilon}, & |x| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \\ 0, & \frac{\varepsilon}{2} < |x| < \frac{a}{2}, \end{cases}$$

con  $v > 0$  e  $\varepsilon \ll a$ . Usando la teoria delle perturbazioni (al primo ordine in  $v$ ) e per  $\varepsilon \rightarrow 0$ , calcolare a) l'energia di un generico livello; b) la funzione d'onda dello stato fondamentale e di un generico stato eccitato.

**Esercizio 6.** (28Gen98) –

Una particella di massa  $m$  si muove sull'asse  $x$  ed è soggetta al potenziale  $V(x) = -a \exp(-\alpha x^2)$ . Usando il metodo variazionale con la funzione di prova  $\psi(x) = b \exp(-\beta x^2)$ , dimostrare che esiste almeno uno stato legato e trovare una maggiorazione della sua energia ( $a, \alpha, \beta$  costanti reali positive).

**Esercizio 7.** (12Lug00) – Un oscillatore anarmonico unidimensionale è descritto dalla hamiltoniana

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{kq^2}{2} + \lambda q^4, \quad m, k, \lambda > 0.$$

Usando la teoria delle perturbazioni al primo ordine in  $\lambda$  si determini l'energia e la funzione d'onda dello stato fondamentale.

Usando il metodo variazionale con le funzioni di prova gaussiane

$$\psi(q) = A(\beta) e^{-\beta q^2/2}, \quad \beta > 0,$$

si determini un limite superiore per l'energia dello stato fondamentale. Si determini inoltre il migliore valore ottenibile per l'energia dello stato fondamentale al primo ordine in  $\lambda$  e si confronti il risultato con quello ottenuto precedentemente.

(aiuto: per rispondere all'ultima parte si ponga  $\beta \sim \sqrt{km}/\hbar + \beta' \lambda$  e si sviluppi l'energia al primo ordine in  $\lambda$ )

# Metodo variazionale - Soluzioni

**Soluzione 1** (20Apr95). – Riferimento: §21, §15.

La costante  $C$  si ricava dalla normalizzazione a meno di un inessenziale fattore di fase. Si ha

$$1 = |C|^2 \int d\Omega \int_0^\infty e^{-2tr} r^2 dr = \frac{\pi |C|^2}{t^3} \implies |C|^2 = \frac{t^3}{\pi}.$$

Poichè la funzione d'onda è simmetrica per rotazione (dipende solo dal modulo di  $r$ ), si ha  $L^2\psi = 0$  e quindi

$$H\psi(r) = \left[ \frac{1}{2m} p_r^2 - eV(r) \right] \psi(r) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\chi''}{r} - eV(r) \frac{\chi}{r},$$

dove  $\chi(r) = r\psi(r)$  e  $-eV(r)$  è l'energia potenziale dell'elettrone. Per il valore medio di  $H$  si ottiene

$$\langle H \rangle_\psi = 4\pi \int_0^\infty \chi \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \chi'' - eV(r)\chi \right] dr = \frac{\hbar^2 t^2}{2m} - e^2 t - \frac{4(Z-1)e^2 t^3}{(\beta+2t)^2}.$$

Qualunque valore di  $t > 0$  fornisce un limite superiore all'energia dello stato fondamentale. Se  $\beta = 0$  allora si riesce a trovare il minimo analiticamente che si ha per

$$t_0 = \frac{Zme^2}{\hbar^2}, \quad \langle H \rangle_{min} = \langle H \rangle(t_0) = -\frac{Z^2 me^4}{2\hbar^2}, \quad \psi(r) = Ce^{-Zme^2 r/\hbar^2},$$

che coincide con il risultato esatto (vedi §22).

**Soluzione 2** (4Ott95). – Riferimento: §15.

Dalla normalizzazione ricaviamo

$$1 = \|\psi\|^2 = |C|^2 \int_0^a dx \int_0^{a-x} dy [xy(a-x-y)]^2 = \frac{|C|^2 a^8}{5040}, \implies |C|^2 = \frac{5040}{a^8}$$

e dunque  $(\psi, H\psi) = 28\hbar^2/ma^2 \geq E_0$ .

**Soluzione 3** (18Set96). – Riferimento: §1, §15.

Lo stato fondamentale è descritto da una funzione d'onda simmetrica e dunque, posto  $k = \sqrt{2m(v-|E|)}/\hbar$  e  $\alpha = \sqrt{2m|E|}/\hbar$  si ha la soluzione

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \begin{cases} A \cos kx, & |x| < a, \\ B e^{-\alpha|x|}, & |x| > a, \end{cases} \\ A \cos ka &= B e^{-\alpha a}, \quad k \tan ka = \alpha. \end{aligned}$$

E' richiesto il limite  $a \rightarrow 0$ ,  $v \rightarrow \infty$  con  $av = \text{costante}$ . Quindi  $ka \rightarrow 0$ . In questa approssimazione si ottiene

$$\begin{aligned} \phi(x) &\sim \begin{cases} A, & |x| < a, \\ B e^{-\alpha|x|}, & |x| > a, \end{cases} \quad \alpha \sim k^2 a \sim \frac{2mva}{\hbar^2}, \\ E_0 &\sim -\frac{2mv^2 a^2}{\hbar^2}, \quad A \sim B \sim \sqrt{\alpha}. \end{aligned}$$

Per rispondere alla seconda domanda scegliamo la funzione di prova

$$\psi(x) = C[\phi(x + \frac{d}{2}) + \phi(x - \frac{d}{2})], \quad |C|^2 = \{2[1 + e^{-\alpha d}(1 + \alpha d)]\}^{-1}$$

con  $C$  costante di normalizzazione, e osserviamo che

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(x - \frac{d}{2}) + V(x + \frac{d}{2}), \quad V(x) \rightarrow -2av\delta(x),$$

dove  $\delta(x)$  è la distribuzione di Dirac e il limite è inteso per  $a \rightarrow 0$  e  $v \rightarrow \infty$  (come sopra). Si ha

$$\begin{aligned} H\psi(x) &= C \left[ \frac{p^2}{2m} + V(x - \frac{d}{2}) \right] \phi(x - \frac{d}{2}) + C \left[ \frac{p^2}{2m} + V(x + \frac{d}{2}) \right] \phi(x + \frac{d}{2}) \\ &\quad + CV(x - \frac{d}{2})\phi(x + \frac{d}{2}) + CV(x + \frac{d}{2})\phi(x - \frac{d}{2}) \\ &\sim E_0\psi(x) - 2avC \left[ \delta(x - \frac{d}{2})\phi(d) + \delta(x + \frac{d}{2})\phi(-d) \right] \end{aligned}$$

e dunque l'energia dello stato fondamentale per questo sistema è inferiore o uguale a

$$(\psi, H\psi) = E_0 - 4av|C|^2\phi(d) [\phi(0) + \phi(d)] = E_0 \left[ 1 + \frac{2e^{-\alpha d}}{1 + \frac{\alpha d}{1 + e^{\alpha d}}} \right].$$

**Soluzione 4** (16Dic96). – Riferimento: §7, §13, §15.

Poiché il potenziale è antisimmetrico rispetto al centro della buca, le correzioni a tutti i livelli energetici (e quindi anche allo stato fondamentale), al primo ordine in  $v$  sono nulle.

Per rispondere alla seconda domanda osserviamo innanzitutto che la funzione d'onda è normalizzata per ogni valore di  $\lambda$ . Calcoliamo quindi il valore medio di  $H = H_0 + V$  e cerchiamo il minimo al variare di  $\lambda$ . Si ricava facilmente

$$f(\lambda) = \langle H \rangle_\psi = \frac{1}{1 + |\lambda|^2} \left[ E_1^{(0)} + |\lambda|^2 E_2^{(0)} + 2 \operatorname{Re} \lambda (\psi_1, V\psi_2) \right].$$

Si vede che l'eventuale parte immaginaria di  $\lambda$  aggiunge un contributo positivo alla funzione precedente. Il minimo si avrà quindi per  $\lambda$  reale. Si può quindi assumere  $\lambda \in \mathbb{R}$  e cercare il minimo di  $f(\lambda)$ . Si ricava facilmente

$$\lambda_{\pm} = \frac{E_2^{(0)} - E_1^{(0)} \pm \sqrt{(E_2^{(0)} - E_1^{(0)})^2 + 4(\psi_1, V\psi_2)^2}}{2(\psi_1, V\psi_2)},$$

che corrispondono al minimo e al massimo (per  $\lambda \in \mathbb{R}$ ) della funzione  $f(\lambda)$ . La soluzione per  $V$  generico è piuttosto complicata e si ottiene sostituendo  $\lambda_-$  in  $f$ . Se  $V$  è piccolo rispetto a  $E_1^{(0)}$  allora approssimativamente

$$\lambda_- \sim -\frac{(\psi_1, V\psi_2)}{E_2^{(0)} - E_1^{(0)}},$$

da cui

$$E_1 \leq E_1^{(0)} - \frac{(\psi_1, V\psi_2)^2}{E_2^{(0)} - E_1^{(0)}}, \quad (\psi_1, V\psi_2) = \frac{32av}{9\pi^2}.$$

**Soluzione 5** (24Feb97). – Riferimento: §13, §8.

Le autofunzioni del sistema imperturbato  $\phi_n^{\pm}$  sono coseni (parità positiva) e seni (parità negativa). Abbiamo

$$V_{jk}^{\pm\pm} = \frac{va}{\varepsilon} \int_{-\varepsilon/2}^{\varepsilon/2} \phi_j^{\pm} \phi_k^{\pm} dx.$$

Si osservi che i termini misti  $V_{jk}^{\pm\mp}$  sono banalmente nulli per parità. Poiché l'intervallo di integrazione è un piccolo intorno dell'origine (è richiesto il limite  $\varepsilon \rightarrow 0$ ), prima di integrare conviene sviluppare le autofunzioni in serie di Taylor attorno all'origine, cioè

$$\begin{aligned} \phi_k^+ &\sim \sqrt{\frac{2}{a}} \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{(2k-1)\pi x}{a} \right)^2 + \dots \right], \\ \phi_k^- &\sim \sqrt{\frac{2}{a}} \left[ \frac{2k\pi x}{a} + \dots \right], \quad k = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

In tal modo si ottiene rapidamente

$$V_{jk}^{++} = 2v + O(\varepsilon^2), \quad V_{jk}^{--} = O(\varepsilon^2),$$

da cui, al primo ordine nella teoria delle perturbazioni

$$E_{2k-1} = \frac{\hbar^2 \pi^2 (2k-1)^2}{2ma^2} + 2v, \quad E_{2k} = \frac{\hbar^2 \pi^2 (2k)^2}{2ma^2},$$

$$\psi_j^+ = \phi_j^+ + 2v \sum_{k \neq j} \frac{\phi_k^+}{E_{2j-1}^{(0)} - E_{2k-1}^{(0)}}, \quad \psi_j^- = \phi_j^-,$$

dove  $\psi^\pm$  sono le funzioni d'onda del sistema perturbato.

**Soluzione 6** (28Gen98). – Riferimento: §15.

Dalla normalizzazione della funzione d'onda si ha  $|b|^2 = \sqrt{2\beta/\pi}$ , mentre per il valore medio di  $H$  nello stato  $\psi$  si ottiene

$$\begin{aligned} E = \langle H \rangle &= \left( \psi, \left[ \frac{p^2}{2m} + V \right] \psi \right) = \frac{1}{2m} \|p\psi\|^2 + (\psi, V\psi) \\ &= \frac{\beta \hbar^2}{2m} - \frac{a\sqrt{2\beta}}{\sqrt{\alpha + 2\beta}}. \end{aligned}$$

E' immediato verificare che  $E$ , come funzione di  $\beta$  (positivo), ha due radici:  $\beta_0 = 0$  e

$$\beta_+ = \frac{1}{4} \left( \sqrt{\alpha^2 + \frac{64am^2}{\hbar^2}} - \alpha \right).$$

La funzione  $E(\beta)$  è negativa per  $\beta$  piccolo (vedi espansione sotto), passa per l'origine e per  $\beta_+$  e diverge all'infinito. Esiste dunque un minimo per  $\beta = \tilde{\beta}$  ( $0 < \tilde{\beta} < \beta_+$ ) e si ha

$$E_0 \leq E(\tilde{\beta}) < 0$$

e dunque esiste almeno uno stato legato ( $E_0 < 0$ ).

Espansione:

$$E(\beta) = -a\sqrt{\frac{2\beta}{\alpha}} + \frac{\hbar^2 \beta}{2m} + \frac{a}{2} \left( \frac{2\beta}{\alpha} \right)^{3/2} + \dots$$

Nota: Il comportamento per  $\beta$  piccolo e l'andamento asintotico sarebbero sufficienti per stabilire che esiste un minimo negativo, senza bisogno di calcolare le radici della funzione.

**Soluzione 7** (12Lug00). – Riferimento: §12, §15 §13.

Sia  $H = H_0 + V$ , con  $V = \lambda q^4$  il potenziale perturbativo,  $\omega = \sqrt{k/m}$  e  $\alpha = m\omega/\hbar$ .  $H_0$  è la hamiltoniana di un oscillatore armonico di frequenza angolare  $\omega$  e pertanto

$$E_n^{(0)} = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega, \quad q = \sqrt{\frac{1}{2\alpha}}(a + a^\dagger).$$

Se  $\phi_n$  ( $n \geq 0$ ) sono gli autostati di  $H_0$ , si ha

$$V\phi_0 = \frac{\lambda}{4\alpha^2} [3\phi_0 + 6\sqrt{2}\phi_2 + 2\sqrt{6}\phi_4].$$

Pertanto si ottiene  $V_{n0} = 0$  tranne

$$V_{00} = \frac{3\lambda}{4\alpha^2}, \quad V_{20} = \frac{3\sqrt{2}\lambda}{2\alpha^2}, \quad V_{40} = \frac{\sqrt{6}\lambda}{2\alpha^2}.$$

La correzione alla funzione d'onda dello stato fondamentale è

$$\psi_0^{(1)} = \frac{V_{20}\phi_2}{E_0^{(0)} - E_2^{(0)}} + \frac{V_{40}\phi_4}{E_0^{(0)} - E_4^{(0)}} = -\frac{\sqrt{2}\lambda}{8\hbar\omega\alpha^2} [6\phi_2 + \sqrt{3}\phi_4].$$

Per l'energia si ha invece

$$E_0^{(1)} = V_{00} = \frac{3\lambda}{4\alpha^2}.$$

Supponendo  $A(\beta)$  reale, dalla normalizzazione si ricava  $A(\beta) = (\beta/\pi)^{1/4}$  e quindi

$$H\psi(q) = \left[ \frac{\beta\hbar^2}{2m} + \left( \frac{k}{2} - \frac{\beta\hbar^2}{2m} \right) q^2 + \lambda q^4 \right] \left( \frac{\beta}{\pi} \right)^{1/4} e^{-\beta q^2/2}.$$

Per l'energia media si ottiene

$$\begin{aligned} E(\beta) = (\psi, H\psi) &= \frac{\beta\hbar^2}{2m} \|\psi\|^2 + \left( \frac{\beta}{\pi} \right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \left( \frac{k}{2} - \frac{\beta\hbar^2}{2m} \right) q^2 + \lambda q^4 \right] e^{-\beta q^2} dq \\ &= \frac{3\lambda}{4\beta^2} + \frac{k}{4\beta} + \frac{\hbar^2\beta}{4m}. \end{aligned}$$

Qualunque valore di  $\beta > 0$  fornisce un limite superiore  $E_0 \leq E(\beta)$  all'energia dello stato fondamentale. Il minimo si ottiene per  $\beta$  dato dalla soluzione reale dell'equazione

$$\frac{dE}{d\beta} = -\frac{1}{4} \left( \frac{6\lambda}{\beta^3} + \frac{k}{\beta^2} - \frac{\hbar^2}{m} \right) = 0,$$

ossia

$$\beta^3 = \alpha^2\beta + \frac{6\alpha^2\lambda}{k}.$$

Per  $\lambda = 0$  si ha ovviamente la soluzione  $\beta = \alpha$ . Pertanto, posto  $\beta \sim \alpha + \beta'\lambda$ , al primo ordine in  $\lambda$  si ricava

$$\beta' = \frac{3\lambda}{k}, \quad \beta \sim \alpha + \frac{3\lambda}{k}.$$

Si osservi tuttavia che al primo ordine in  $\lambda$  il valore di  $\beta'$  non influenza l'energia dello stato fondamentale. Infatti si ha

$$E_0 = \frac{\hbar\omega}{2} + \frac{3\lambda}{4\alpha^2} + O(\lambda^2),$$

che coincide con il risultato ottenuto usando la teoria delle perturbazioni.

## Perturbazioni indipendenti dal tempo - Testi

**Esercizio 1.** (25Lug94) – Una particella di massa  $m$  e carica  $q$  si muove nello spazio ed è soggetta ad un potenziale elastico  $kr^2/2$ . Inoltre è immersa in un campo magnetico costante di intensità  $B$ , diretto lungo l'asse  $z$ . Si chiede: a) scrivere la hamiltoniana del sistema introducendo gli operatori di "creazione" e "distruzione" dell'oscillatore armonico libero; b) usando il metodo perturbativo al primo ordine in  $B$ , trovare un'espressione approssimata per i primi quattro livelli.

**Esercizio 2.** (1Set94) – Una particella di massa  $m$  è vincolata a muoversi su un segmento di lunghezza  $a$  ed è sottoposta ad un potenziale lineare  $V(x) = -\varepsilon x$  ( $x \in [0, a]$ ). Usando la teoria delle perturbazioni al primo ordine in  $\varepsilon$ , determinare le energie degli stati stazionari del sistema.

**Esercizio 3.** (23Set94) – Un nucleo atomico di carica totale  $Ze$  e massa  $M \gg m$  è approssimato per mezzo di una sfera di raggio  $a$ , con densità di carica costante. Attorno al nucleo ruota un solo elettrone di carica  $-e$  e massa  $m$ . Si chiede: a) trovare il potenziale elettrostatico  $V(r)$  del nucleo; b) usando il metodo perturbativo al primo ordine, trovare la correzione all'energia dello stato fondamentale dovuta alle dimensioni finite del nucleo.

**Esercizio 4.** (14Giu95) – Una particella di massa  $m$  è vincolata a muoversi sul segmento  $0 \leq x \leq a$  (barriere di potenziale infinite agli estremi) e si trova nel suo stato fondamentale. Si aggiunge un potenziale infinitesimo

$$V(x) = v \cos \frac{\pi x}{a}.$$

Usando il metodo perturbativo al primo ordine in  $v$ , si calcoli la modifica della funzione d'onda e la probabilità che la particella si trovi nel segmento  $0 \leq x \leq a/2$ .

**Esercizio 5.** (25Set95) – Una particella di massa  $m$  si muove nella striscia bidimensionale  $|x| < a$ ,  $-\infty < y < \infty$  con barriere impenetrabili ai bordi. Essa è soggetta ad una forza di potenziale  $V_0 = ky^2/2$ . Si trovino le autofunzioni e gli autovalori dell'energia. Si usi inoltre il metodo perturbativo al primo ordine per calcolare lo spostamento dell'energia del livello fondamentale quando si aggiunge un potenziale  $V = v/\varepsilon^2$  nel quadrato  $|x| < \varepsilon$ ,  $|y| < \varepsilon$  e nullo fuori. Si supponga che  $\varepsilon$  sia abbastanza piccolo in modo che la funzione d'onda si possa considerare costante nel quadrato.

**Esercizio 6.** (18Dic95) – Si consideri un oscillatore armonico bidimensionale con hamiltoniana

$$H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2) + \frac{k^2}{2}(x^2 + y^2)$$

ed un potenziale aggiuntivo  $V(x, y)$  diverso da zero in un piccolo cerchio di centro  $(x_0, y_0)$  in cui la funzione d'onda si può considerare costante. Si consideri la grandezza

$$v = \int V(x, y) dx dy$$

come infinitesima ed, utilizzando il metodo perturbativo al primo ordine, si calcolino i primi tre livelli energetici del sistema.

**Esercizio 7.** (27Mag96) – Una particella di massa  $m$  si muove sul segmento  $-a \leq x \leq a$  ed è soggetta al potenziale  $V(x) = -\varepsilon x$ . a) Si calcoli perturbativamente al primo ordine in  $\varepsilon$  la funzione d'onda dello stato fondamentale, esprimendola con una serie di Fourier. b) Utilizzando questa funzione d'onda si calcoli il valor medio di  $x$ .

**Esercizio 8.** (8Ott96) – Una particella di massa  $m$  è vincolata a muoversi in un segmento di larghezza  $a$  (barriere impenetrabili agli estremi) ed è sottoposta al potenziale

$$V(x) = \varepsilon x^2, \quad |x| < \frac{a}{2}, \quad \varepsilon > 0.$$

Usando la teoria delle perturbazioni determinare i livelli energetici e l'autofunzione dello stato fondamentale al primo ordine in  $\varepsilon$ .

**Esercizio 9.** (26Set97) – Una particella di massa  $m$  è vincolata a muoversi all'interno di una sfera di raggio  $a$  (buca di potenziale sferica a pareti infinite). Determinare: a) l'energia dello stato fondamentale; b) la funzione d'onda (normalizzata) dello stato fondamentale; c) il valore medio di  $r$  se il sistema si trova nello stato fondamentale.

Viene introdotto un potenziale perturbativo  $V(r) = \varepsilon r^2$ . Usando la teoria delle perturbazioni (al primo ordine in  $\varepsilon$ ), determinare: d) l'energia dello stato fondamentale del sistema perturbato.

**Esercizio 10.** (22Dic97) – Un oscillatore armonico bidimensionale di massa  $m$  e frequenza angolare  $\omega$  è perturbato mediante un potenziale centrale della forma

$$V(r) = \begin{cases} \frac{v}{\varepsilon^2}, & \text{per } r \leq \varepsilon, \\ 0, & \text{per } r > \varepsilon, \end{cases}$$

( $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ). Si supponga che  $\varepsilon$  sia abbastanza piccolo in modo che la funzione d'onda si possa considerare costante nel cerchio  $r < \varepsilon$ . Usando la teoria delle perturbazioni al primo ordine, calcolare lo spostamento dei livelli energetici imperturbati  $E_n^{(0)}$  per  $n \leq 2$ .

**Esercizio 11.** (18Feb98) – Due particelle di massa  $m$  si muovono sull'asse  $x$  e sono soggette al potenziale

$$V = \frac{m\omega^2}{2}(x_1^2 + x_2^2),$$

dove  $x_1$  e  $x_2$  sono le coordinate delle particelle. Usando il metodo perturbativo al primo ordine, calcolare l'effetto sui primi tre livelli di un potenziale del tipo

$$V^{(1)} = \varepsilon\delta(x_1 - x_2).$$

Volendo evitare l'uso della  $\delta$  di Dirac, si può scrivere

$$V^{(1)} = \begin{cases} \frac{\varepsilon}{2\eta}, & |x_1 - x_2| < \eta, \\ 0, & |x_1 - x_2| > \eta, \end{cases}$$

con  $\eta$  molto piccolo.

**Esercizio 12.** (2Apr98) –

Una particella di massa  $m$  si muove nel quadrato

$$0 < x < a, \quad 0 < y < a,$$

con barriere di potenziale impenetrabili sui lati. Trovare i livelli energetici e le corrispondenti funzioni d'onda. Usando il metodo perturbativo al primo ordine, calcolare l'effetto sui primi tre livelli di un potenziale del tipo

$$V^{(1)} = \varepsilon\delta(x - y).$$

Volendo evitare l'uso della  $\delta$  di Dirac, si può anche scrivere

$$V^{(1)} = \begin{cases} \frac{\varepsilon}{2\eta}, & |x - y| < \eta \\ 0, & |x - y| > \eta \end{cases}$$

**Esercizio 13.** (11Giu98) – Un sistema fisico è costituito da due elettroni non interagenti immersi in un campo magnetico uniforme  $B$ . Se si trascurano i gradi di libertà di traslazione, la hamiltoniana del sistema assume la forma

$$H = \mu \left( \bar{B} \cdot \sigma^{(1)} + \bar{B} \cdot \bar{\sigma}^{(2)} \right),$$

dove  $-\mu\sigma^{(1)}$  e  $-\mu\bar{\sigma}^{(2)}$  sono i momenti magnetici dei due elettroni e  $\bar{\sigma}$  le matrici di Pauli.

a) Determinare gli autostati dell'energia e i corrispondenti autovalori.

Si introduca un termine di interazione della forma

$$H' = \alpha \bar{\sigma}^{(1)} \cdot \bar{\sigma}^{(2)},$$

e si calcolino le correzioni a tutti gli autovalori dell'energia usando la teoria delle perturbazioni al primo ordine in  $\alpha$ .

**Esercizio 14.** (16Ott98) – Una particella di massa  $m$  e carica  $q$  è racchiusa in una buca di potenziale di larghezza  $a$  (pareti impenetrabili in  $x = 0$  e  $x = a$ ) ed è inoltre soggetta ad un campo elettrico  $\varepsilon E$  costante, diretto lungo  $x$ . Usando la teoria delle perturbazioni al primo ordine in  $\varepsilon$ , determinare la correzione all'energia di tutti i livelli.

**Esercizio 15.** (16Feb99) – Si consideri un pendolo di lunghezza  $a$ , massa  $m$  e peso  $mg$ . Si scriva la Hamiltoniana, si sviluppi il potenziale in serie di potenze e si trovi sotto quali condizioni lo stato fondamentale e gli stati eccitati si possono trattare approssimando il potenziale con un potenziale elastico (quadratico). Si calcoli poi con il metodo perturbativo al primo ordine l'energia dei vari stati.

**Esercizio 16.** (13Mag99) – Un oscillatore armonico tridimensionale, isotropo, di massa  $m$ , frequenza angolare  $\omega$  e carica  $q$  è immerso in un campo magnetico uniforme  $\vec{B}$ .

- a) Scrivere la hamiltoniana del sistema in presenza del campo magnetico;
- b) scrivere il termine lineare in  $B$  in termini degli operatori di creazione e distruzione;
- c) usando la teoria delle perturbazioni al primo ordine in  $B$ , calcolare l'energia dei primi quattro livelli del sistema.
- b') scrivere il termine lineare in  $B$  mediante il momento angolare;
- b'') scrivere le prime quattro autofunzioni imperturbate in coordinate polari (usando le armoniche sferiche);
- c') usando la teoria delle perturbazioni al primo ordine in  $B$ , calcolare l'energia dei primi quattro livelli del sistema, usando l'espressione in (b').

aiuto: per rispondere a (b''), si osservi che la perturbazione dipende soltanto dal momento angolare e quindi, ai fini del calcolo, non è necessario esplicitare la parte radiale delle autofunzioni. E' conveniente lasciarla indicata e supporla normalizzata.

**Esercizio 17.** (15Feb00) – Una particella di massa  $m$  e carica  $q$  si muove nel quadrato

$$0 < x < a, \quad 0 < y < a,$$

con barriere di potenziale impenetrabili ai lati. Trovare i livelli energetici, le corrispondenti funzioni d'onda e la degenerazione del primo livello eccitato.

Si consideri ora un campo elettrico uniforme  $\mathcal{E}$  diretto lungo l'asse  $x$  e, usando il metodo perturbativo al primo ordine in  $\mathcal{E}$ , si calcoli l'energia dei primi tre livelli energetici.

**Esercizio 18.** (19Set00) – Una particella di massa  $m$  è vincolata a muoversi in un quadrato di lato  $a$  ( $|x| \leq a/2$ ,  $|y| \leq a/2$ ) ed è soggetta ad una forza di tipo elastico

$$\vec{F} = -\lambda \vec{r}, \quad \vec{r} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y.$$

Usando la teoria delle perturbazioni al primo ordine in  $\lambda$ , calcolare l'energia dei primi tre livelli.

**Esercizio 19.** (18Lug01) – Una particella di massa  $m$  si trova in una buca di potenziale sferica con  $V(r) = 0$  per  $r < a$  e  $V(r) = \infty$  per  $r > a$ .

a) Scrivere l'equazione di Schrödinger per questo sistema.

Il sistema si trova nello stato fondamentale quando, per un tempo  $T$ , viene sottoposto ad una perturbazione della forma  $H^{(1)} = \varepsilon r^2$ . Usando la teoria delle perturbazioni, calcolare la probabilità di trovare il sistema in un generico stato eccitato con  $l = 0$  per  $t > T$ .

**Esercizio 20.** (5Feb02) – Un sistema fisico è descritto dalla hamiltoniana

$$H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2) + \frac{m\omega^2}{2}(x^2 + y^2) + \varepsilon xy, \quad \varepsilon < m\omega^2.$$

- a) Usando la teoria delle perturbazioni, determinare l'energia dei primi tre livelli al primo ordine in  $\varepsilon$ ;
- b) determinare esattamente lo spettro energetico e le autofunzioni di  $H$  e confrontare le energie dei primi tre livelli con quelle precedenti.

Aiuto: per rispondere a b) effettuare il cambiamento di coordinate

$$x = a(q_1 + q_2), \quad y = a(q_1 - q_2).$$

**Esercizio 21.** (1Lug03) – Una particella di massa  $m$  e carica  $q$  è vincolata a muoversi sulla semiretta  $x \geq 0$  (barriera di potenziale impenetrabile in  $x = 0$ ), in presenza di un campo elettrico costante  $\mathcal{E} > 0$  (diretto lungo  $x$ ) e sotto l'azione di una forza elastica  $F = -kx$ .

Trascurando dapprima il campo elettrico, determinare:

- a) le autofunzioni e gli autovalori della hamiltoniana.
- Considerando successivamente anche il campo elettrico, determinare:
- b) l'energia del generico livello del sistema al primo ordine in  $\mathcal{E}$ .

# Perturbazioni indipendenti dal tempo - Soluzioni

**Soluzione 1** (25Lug94). – Riferimento: §12, §13

Scegliamo il potenziale vettore della forma  $\vec{A} = -\vec{r} \times \vec{B}/2$ , cioè  $A_x = -By/2$ ,  $A_y = Bx/2$  e  $A_z = 0$ . La hamiltoniana del sistema diventa

$$H = \frac{1}{2m}(\vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A})^2 + \frac{m\omega^2 r^2}{2} = \frac{\vec{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2 r^2}{2} - \frac{qB}{2mc}L_z + \frac{q^2}{8mc^2}(\vec{r} \times \vec{B})^2,$$

dove  $\omega = \sqrt{k/m}$  e  $L_z = xp_y - yp_x$ . In termini di operatori di creazione e distruzione con un breve calcolo si ottiene

$$L_z = i\hbar(a_x a_y^\dagger - a_y a_x^\dagger),$$

da cui, posto come al solito  $N = a^\dagger a$  e trascurando i termini quadratici in  $\vec{B}$ , si ha

$$H \sim (N_x + N_y + N_z + \frac{3}{2})\hbar\omega - i\frac{q\hbar B}{2mc}(a_x a_y^\dagger - a_y a_x^\dagger).$$

Come si vede, la perturbazione è proporzionale alla componente lungo il campo del momento angolare. Lo stato fondamentale è invariante per rotazione e dunque  $L_z \psi_{000} = 0$ . Questo significa che l'energia del livello fondamentale non cambia. Per le autofunzioni corrispondenti al primo livello eccitato, che è triplamente degenere, si ottiene facilmente

$$L_z \psi_{100} = i\hbar \psi_{010}, \quad L_z \psi_{010} = -i\hbar \psi_{100}, \quad L_z \psi_{001} = 0.$$

Le correzioni all'energia si ricavano dall'equazione

$$\begin{vmatrix} \lambda & i\frac{q\hbar B}{2mc} & 0 \\ -i\frac{q\hbar B}{2mc} & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Le energie dei primi quattro livelli (al primo ordine in  $B$ ) sono quindi

$$\frac{3}{2}\hbar\omega, \quad \frac{5}{2}\hbar\omega - \frac{q\hbar B}{2mc}, \quad \frac{5}{2}\hbar\omega, \quad \frac{5}{2}\hbar\omega + \frac{q\hbar B}{2mc}.$$

**Soluzione 2** (1Set94). – Riferimento: §7, §13.

Le correzioni alle energie degli stati stazionari al primo ordine in  $\varepsilon$  sono date da

$$E_n^{(1)} = -\frac{2\varepsilon}{a} \int_0^a \sin^2 \frac{n\pi x}{a} x dx = -\frac{a\varepsilon}{2}, \quad n \geq 1$$

e dunque  $E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{2ma^2} - \frac{a\varepsilon}{2}$ .

**Soluzione 3** (23Set94). – Riferimento: §21, §13.

Scegliamo l'origine delle coordinate (polari) nel centro della sfera. Per ragioni di simmetria il campo elettrico  $\vec{\mathcal{E}}$  dipende solo da  $r$ . Quindi  $\vec{\mathcal{E}} = \mathcal{E}\vec{n}$ , dove  $\vec{n}$  è il versore normale alla sfera. Dalla legge di Gauss si ha

$$\int_{\Sigma} \vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{n} d\sigma = 4\pi \int_V \varrho dV, \quad \varrho = \frac{Ze}{\frac{4}{3}\pi a^3},$$

da cui si ricava facilmente il campo elettrico e quindi il potenziale. Imponendo che questo sia continuo si ha infine

$$\begin{aligned} V(r) &= -\frac{Ze^2}{r}, & r > a, \\ V(r) &= -\frac{Ze^2}{a} \left( \frac{3}{2} - \frac{r^2}{2a^2} \right), & r < a. \end{aligned}$$

Si vede dunque che  $V(r) = -\frac{Ze^2}{r} + H^1$  dove la perturbazione ha la forma

$$H^1 = \frac{Ze^2}{a} \left( \frac{a}{r} + \frac{r^2}{2a^2} - \frac{3}{2} \right), \quad r < a.$$

La correzione all'energia del livello fondamentale al primo ordine è

$$\begin{aligned} E_1^{(1)} &= (\psi_{100}, H^1 \psi_{100}) = \frac{4Z^3}{a_H^3} \int_0^a \frac{Ze^2}{a} \left( \frac{a}{r} + \frac{r^2}{2a^2} - \frac{3}{2} \right) e^{-2Zr/a_H} r^2 dr \\ &= 2|E_1^{(0)}| \left[ 1 - 3 \frac{(\alpha + 2)^2 e^{-\alpha} + \alpha^2 - 4}{\alpha^3} \right], \end{aligned}$$

dove  $a_H = \hbar^2/m_e^2$  è il raggio di Bohr,  $E_1^{(0)} = -Z^2 e^2/a_H$  è l'energia dello stato fondamentale e  $\alpha = 2Za/a_H$  è un parametro adimensionale. Uno sviluppo per piccoli valori di  $\alpha$  da

$$\frac{E_1^{(1)}}{|E_1^{(0)}|} \sim \frac{\alpha^2}{10}.$$

**Soluzione 4** (14Giu95). – Riferimento: §7, §13.

Gli elementi di matrice del potenziale sono dati da

$$V_{kn} = V_{nk} = \frac{2v}{a} \int_0^a \cos \frac{\pi x}{a} \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{n\pi x}{a} dx = \frac{v}{2} (\delta_{k,n+1} + \delta_{k,n-1}).$$

Si vede immediatamente che al primo ordine in  $v$  non c'è correzione ai livelli energetici, mentre per gli autostati si ha

$$\psi_n^{(1)} = \frac{ma^2v}{\hbar^2\pi^2} \left[ \frac{\psi_{n-1}^{(0)}}{2n-1} - \frac{\psi_{n+1}^{(0)}}{2n+1} \right].$$

Ovviamente se  $n = 1$  (stato fondamentale), nell'espressione precedente rimane solo l'ultimo termine. La probabilità di trovare la particella in  $0 \leq x \leq a/2$  è data da

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(0 \leq x \leq a/2) &= \int_0^{a/2} |\psi_n^{(0)}|^2 dx + 2 \int_0^{a/2} \psi_n^{(0)} \psi_n^{(1)} dx \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{8ma^2v}{9\hbar^2\pi^3}, & n = 1, \\ \frac{1}{2} + \frac{2ma^2v}{\hbar^2\pi^3} \frac{1}{4n^2-1} \left[ 1 + \frac{(-1)^n 4n}{4n^2-1} \right], & n > 1. \end{cases} \end{aligned}$$

**Soluzione 5** (25Set95). – Riferimento: paragrafi 8, 12 e 13.

Il sistema è a variabili separabili e dunque per le autofunzioni e le energie degli stati imperturbati si ha

$$\begin{aligned} \psi_{n_1 n_2}(x, y) &= f_{n_1}(x) \phi_{n_2}(y), \quad n_1 \geq 1, n_2 \geq 0 \\ E_{n_1 n_2} &= \frac{\hbar^2 \pi^2 n_1^2}{8ma^2} + (n_2 + \frac{1}{2})\hbar\omega, \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \end{aligned}$$

dove  $f_n(x)$  sono le autofunzioni di una particella in una buca di potenziale simmetrica di larghezza  $2a$  (coseni per  $n$  dispari e seni per  $n$  pari), mentre  $\phi_n(y)$  sono le funzioni di Hermite. Lo stato fondamentale è dato da

$$\psi_{10}(x, y) = \left( \frac{\alpha}{\pi a^2} \right)^{\frac{1}{4}} \cos \frac{\pi x}{2a} e^{-\alpha y^2/2}, \quad E_{10} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{8ma^2} + \frac{\hbar\omega}{2},$$

dove si è posto  $\alpha = m\omega/\hbar$ . Poichè la perturbazione è concentrata nell'origine delle coordinate, per la correzione all'energia dello stato fondamentale si ottiene immediatamente

$$E_{10}^{(1)} = (\psi_{10}, V\psi_{10}) \sim 4v|\psi_{10}(0, 0)|^2 = \frac{4v}{a} \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}.$$

**Soluzione 6** (18Dic95). – Riferimento: §12, §13.

Posto  $\omega = k/\sqrt{m}$ , gli autostati e le energie del sistema imperturbato sono dati da

$$\phi_{ij}(x, y) = \phi_i(x)\phi_j(y), \quad E_n^{(0)} = (n+1)\hbar\omega, \quad n = i+j, \quad i, j \geq 0,$$

dove  $\phi_i$  sono le funzioni di Hermite (reali). Si vede che il generico stato ha degenerazione  $n+1$  ( $n = i+j$ ). In particolare, il primo livello eccitato è doppiamente degenere. Si ha

$$V_{ij,rs} = (\phi_{ij}, V\phi_{rs}) = v\phi_i(x_0)\phi_r(x_0)\phi_j(y_0)\phi_s(y_0).$$

La correzione al livello fondamentale è data da

$$E_0^{(1)} = V_{00,00} = v\frac{\alpha}{\pi}e^{-\alpha(x_0^2+y_0^2)^2},$$

mentre per il primo livello eccitato si ha

$$\begin{vmatrix} \lambda - V_{01,01} & -V_{01,10} \\ -V_{10,01} & \lambda - V_{10,10} \end{vmatrix} = \lambda[\lambda - (V_{01,01} + V_{10,10})] = 0.$$

La degenerazione è rimossa e si ha (al primo ordine in  $v$ )

$$E_1^{(0)} \longrightarrow \begin{cases} E_1^{(0)} = 2\hbar\omega, \\ 2\hbar\omega + \frac{2v\alpha^2}{\pi}(x_0^2 + y_0^2)e^{-\alpha(x_0^2+y_0^2)}. \end{cases}$$

**Soluzione 7** (27Mag96). – Riferimento: §8, §13.

Poiché la perturbazione è una funzione dispari, avrà elementi di matrice non nulli solo fra stati di parità diverse. Lo stato fondamentale è pari e dunque, per gli elementi non nulli si ha

$$V_{n1} = -\varepsilon (\psi_n^{(0)}, x\psi_1^{(0)}) = -\frac{\varepsilon}{a} \int_{-a}^a x \sin \frac{n\pi x}{2a} \cos \frac{\pi x}{2a} dx = -\varepsilon b_n,$$

$$b_n = -\frac{16a}{\pi^2} \frac{(-1)^{n/2} n}{(n^2 - 1)^2},$$

dove  $n \geq 2$  è un intero pari. La correzione alla funzione d'onda è data da

$$\psi_1^{(1)} = -\varepsilon \sum_{n \geq 2 \text{ pari}} c_n \psi_n^{(0)}, \quad \psi_n^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{a}} \sin \frac{n\pi x}{2a},$$

$$c_n = \frac{128 ma^3 (-1)^{n/2} n}{\hbar^2 (n^2 - 1)^3},$$

da cui

$$\begin{aligned} \langle x \rangle &= (\psi_1^{(0)} + \psi_1^{(1)}, x[\psi_1^{(0)} + \psi_1^{(1)}]) = 2(\psi_1^{(0)}, x\psi_1^{(1)}) = -2\varepsilon \sum_{n \geq 2 \text{ pari}} c_n b_n \\ &= \varepsilon \frac{4096 ma^4}{\hbar^2 \pi^2} \sum_{n \geq 2 \text{ pari}} \frac{n^2}{(n^2 - 1)^5}. \end{aligned}$$

**Soluzione 8** (8Ott96). – Riferimento: §8, §13.

Le correzioni ai livelli energetici degli stati imperturbati sono date dagli elementi di matrice diagonali della perturbazione. Si osserva che

$$\frac{2\varepsilon}{a} \int_{-a/2}^{a/2} x^2 \cos^2 \frac{n\pi x}{a} dx = \varepsilon a^2 \left( \frac{1}{12} - \frac{1}{2\pi^2 n^2} \right), \quad n = 1, 3, 5, \dots$$

$$\frac{2\varepsilon}{a} \int_{-a/2}^{a/2} x^2 \sin^2 \frac{n\pi x}{a} dx = \varepsilon a^2 \left( \frac{1}{12} - \frac{1}{2\pi^2 n^2} \right), \quad n = 2, 4, 6, \dots$$

e dunque

$$E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{2ma^2} + \varepsilon a^2 \left( \frac{1}{12} - \frac{1}{2\pi^2 n^2} \right), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Per trovare la funzione d'onda dello stato fondamentale si deve calcolare l'integrale

$$V_{n1} = \frac{2\varepsilon}{a} \int_{-a/2}^{a/2} x^2 \cos \frac{n\pi x}{a} \cos \frac{\pi x}{a} dx = -(-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{8\varepsilon a^2}{\pi^2} \frac{n}{(n^2-1)^2}, \quad n = 3, 5, 7, \dots$$

da cui

$$\psi_1^{(1)} = \frac{16\varepsilon m a^4}{\hbar^2 \pi^4} \sum_{n \geq 3, \text{dispari}} (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{n}{(n^2-1)^3} \cos \frac{n\pi x}{a}.$$

**Soluzione 9** (26Set97). – Riferimento: §21, §13.

Il potenziale è di tipo centrale e quindi le autofunzioni della hamiltoniana sono della forma

$$\psi(r, \vartheta, \varphi) = R(r) Y_l^m(\vartheta, \varphi),$$

dove  $Y_l^m$  sono le armoniche sferiche e la parte radiale soddisfa l'equazione differenziale

$$\left[ \frac{1}{2m} \left( p_r^2 + \frac{l(l+1)}{r^2} \right) + V(r) - E \right] R(r) = 0, \quad V(r) = \begin{cases} 0 & r < a, \\ \infty & r \geq a. \end{cases}$$

Per lo stato fondamentale  $l = 0$ . Posto inoltre  $R = \chi/r$ ,  $k = \sqrt{2mE}/\hbar$  si ha

$$\chi'' + k^2 \chi = 0, \quad \chi(0) = \chi(a) = 0, \quad \int_0^a |\chi(r)|^2 dr = 1.$$

Dall'equazione precedente si ottengono tutte le autofunzioni per gli stati  $S$ .

La soluzione normalizzata è

$$\begin{aligned} \chi &= \sqrt{\frac{2}{a}} \sin(kr), & k &= \frac{n\pi}{a}, \\ \psi_{n00} &= \sqrt{\frac{1}{2\pi a}} \frac{\sin(kr)}{r}, & E_n &= \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{2ma^2}, \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

Ovviamente per  $r \geq a$  la soluzione è identicamente nulla! Lo stato fondamentale è quello con energia più bassa, quindi

$$\psi_{100} = \sqrt{\frac{1}{2\pi a}} \frac{\sin(\pi r/a)}{r}, \quad E_1 = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2}.$$

Il valore medio di  $r$  nello stato fondamentale è dato da

$$\langle r \rangle = \frac{2}{a} \int_0^a \left| \sin \frac{\pi r}{a} \right|^2 r dr = \frac{a}{2}.$$

La correzione all'energia dello stato fondamentale al primo ordine perturbativo è data da

$$E_1^{(1)} = \frac{2\varepsilon}{a} \int_0^a \left| \sin \frac{\pi r}{a} \right|^2 r^2 dr = \varepsilon a^2 \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{2\pi^2} \right) \sim 0.28\varepsilon a^2.$$

$0.28 a^2$  è anche il valore medio di  $r^2$ .

**Soluzione 10** (22Dic97). – Riferimento: §12, §13.

Il potenziale perturbativo è diverso da zero solo in un intorno dell'origine (nel limite in cui  $\varepsilon \rightarrow 0$  tende a  $\pi v \delta(r)$ ). Ciò significa che

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} V f(x, y) dx dy = \pi v f(0, 0) + O(\varepsilon).$$

In particolare si ha

$$V_{ij,rs} = \pi v \psi_{ij}^*(0,0) \psi_{rs}(0,0).$$

Le autofunzioni e gli autovalori dell'energia dell'oscillatore armonico sono della forma

$$\begin{aligned} \psi_{ij}(x,y) &= A_i A_j e^{-\alpha r^2/2} H_i(\sqrt{\alpha}x) H_j(\sqrt{\alpha}y), & \alpha &= \frac{m\omega}{\hbar}, \\ E_n &= (n+1)\hbar\omega, & n &= i+j, \quad n \geq 0, \\ H_0 &= 1, & H_1(0) &= 0, \quad H_2(0) = -2. \end{aligned}$$

La degenerazione è  $d_n = n+1$ . Le correzioni agli autovalori sono date dalle equazioni

$$E_0^{(1)} - V_{00,00}^2 = 0,$$

$$\begin{vmatrix} E_1^{(1)} & 0 \\ 0 & E_1^{(1)} \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} E_2^{(1)} - V_{02,02}^2 & -V_{02,20}^2 & 0 \\ -V_{20,02}^2 & E_2^{(1)} - V_{20,20}^2 & 0 \\ 0 & 0 & E_2^{(1)} \end{vmatrix} = 0.$$

Risolviendo si ottiene infine

$$E_0^{(1)} = \alpha v, \quad E_1^{(1)} = \begin{cases} 0, \\ 0, \end{cases} \quad E_2^{(1)} = \begin{cases} \alpha v, \\ 0, \\ 0. \end{cases}$$

**Soluzione 11** (18Feb98). – Riferimento: §13, §12.

I primi tre livelli imperturbati sono lo stato fondamentale,

$$\Psi_{00}(x_1, x_2) = \phi_0(x_1)\phi_0(x_2), \quad E_{00}^{(0)} = \hbar\omega$$

e il primo livello eccitato, che è due volte degenere

$$\begin{aligned} \Psi_{01}(x_1, x_2) &= \phi_0(x_1)\phi_1(x_2), & E_{01}^{(0)} &= 2\hbar\omega, \\ \Psi_{10}(x_1, x_2) &= \phi_1(x_1)\phi_0(x_2), & E_{10}^{(0)} &= 2\hbar\omega. \end{aligned}$$

Con  $\phi_n(x)$  si sono indicate le funzioni di Hermite. Date due funzioni  $f(x_1, x_2)$  e  $g(x_1, x_2)$  si ha

$$(f, V^{(1)}g) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,x)g(x,x) dx$$

e quindi

$$E_{00}^{(1)} = V_{00,00}^{(1)} = \varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} \phi_0^4(x) dx = \varepsilon \sqrt{\frac{m\omega}{2\pi\hbar}},$$

$$V_{01,01}^{(1)} = V_{01,10}^{(1)} = V_{10,01}^{(1)} = V_{10,10}^{(1)} = \varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} \phi_0^2(x)\phi_1^2(x) dx = \frac{\varepsilon}{2} \sqrt{\frac{m\omega}{2\pi\hbar}},$$

e la degenerazione è rimossa, poichè

$$E_{01}^{(0)} = E_{10}^{(0)} \longrightarrow \begin{cases} E_{01}^{(0)}, \\ E_{01}^{(0)} + \varepsilon \sqrt{\frac{m\omega}{2\pi\hbar}}. \end{cases}$$

**Soluzione 12** (2Apr98). – Riferimento: §13, §7.

Le autofunzioni e gli autovalori della hamiltoniana del sistema imperturbato sono

$$\phi_{n_1 n_2}(x, y) = \frac{2}{a} \sin \frac{n_1 \pi x}{a} \sin \frac{n_2 \pi y}{a}, \quad E_{n_1 n_2}^{(0)} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2} (n_1^2 + n_2^2), \quad n_1, n_2 \geq 1.$$

Si osservi che, date due funzioni  $f_1(x, y)$  e  $f_2(x, y)$  con supporto nel quadrato, per le proprietà della distribuzione  $\delta$  si ha

$$(f_1, V^{(1)} f_2) = \varepsilon \int_0^a f_1^*(x, x) f_2(x, x) dx,$$

per cui

$$V_{11,11}^{(1)} = \frac{4\varepsilon}{a} \int_0^a \left( \sin \frac{\pi x}{a} \right)^4 dx = \frac{3\varepsilon}{2a},$$

$$V_{12,12}^{(1)} = V_{21,21}^{(1)} = V_{12,21}^{(1)} = V_{21,12}^{(1)} = \frac{4\varepsilon}{a} \int_0^a \left( \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{2\pi x}{a} \right)^2 dx = \frac{\varepsilon}{a}.$$

Per lo stato fondamentale, che non è degenere si ha

$$E_{11} = E_{11}^{(0)} + V_{11,11}^{(1)} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{ma^2} + \frac{3\varepsilon}{2a},$$

mentre il primo livello eccitato, che è due volte degenere, si separa nei due livelli

$$\begin{aligned} E_{12}^{(0)} + \lambda_1 &= \frac{5\hbar^2 \pi^2}{2ma^2}, \\ E_{12}^{(0)} + \lambda_2 &= \frac{5\hbar^2 \pi^2}{2ma^2} + \frac{2\varepsilon}{a}, \end{aligned}$$

dove  $\lambda_{1,2}$  sono le radici dell'equazione

$$\begin{vmatrix} V_{12,12}^{(1)} - \lambda & V_{12,21}^{(1)} \\ V_{21,12}^{(1)} & V_{21,21}^{(1)} - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = \frac{2\varepsilon}{a}.$$

**Soluzione 13** (11Giu98). – Riferimento: §19, §13.

Scegliendo l'asse  $z$  parallelo al campo magnetico, la hamiltoniana imperturbata diventa

$$H = \mu B (\sigma_z^{(1)} + \sigma_z^{(2)}),$$

che ha quattro autostati che si possono scrivere nella forma (singoletto e tripletto)

$$\begin{aligned} f_0 &= \frac{\chi_{+-} - \chi_{-+}}{\sqrt{2}}, & g_1 &= \chi_{++}, \\ g_0 &= \frac{\chi_{+-} + \chi_{-+}}{\sqrt{2}}, & g_{-1} &= \chi_{--}, \end{aligned}$$

dove

$$\chi_{\pm\pm} = \chi_{\pm}^{(1)} \chi_{\pm}^{(2)}, \quad \chi_{\pm\mp} = \chi_{\pm}^{(1)} \chi_{\mp}^{(2)},$$

e  $\chi_{\pm}$  sono gli autostati di  $s_z$  per ogni singola particella.  $f_0$  e  $g_0$  corrispondono ad energia nulla ( $E_0 = 0$ ), quindi questo stato è doppiamente degenere, mentre  $g_{\pm 1}$  corrispondono ad energie  $E_{\pm 1} = \pm 2\mu B$ . Si ha

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}^{(1)} \cdot \bar{\sigma}^{(2)} f_0 &= -3f_0; & \bar{\sigma}^{(1)} \cdot \bar{\sigma}^{(2)} g_1 &= g_1 + 2g_{-1}; \\ \bar{\sigma}^{(1)} \cdot \bar{\sigma}^{(2)} g_0 &= g_0; & \bar{\sigma}^{(1)} \cdot \bar{\sigma}^{(2)} g_{-1} &= g_{-1} + 2g_1 \end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned} (f_0, H' f_0) &= -3\alpha, & (f_0, H' g_0) &= 0, \\ (g_0, H' f_0) &= 0, & (g_0, H' g_0) &= \alpha, \end{aligned}$$

$$(g_1, H'g_1) = (g_{-1}, H'g_{-1}) = \alpha.$$

Si vede dunque che la correzione ai due livelli non degeneri è uguale ad  $\alpha$ , mentre il livello degeneri si separa nei due livelli con energie  $\alpha$  e  $-3\alpha$ .

**Soluzione 14** (16Ott98). – Riferimento: §13, §7.

Le autofunzioni e le energie del sistema imperturbato sono

$$\psi_n = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi x}{a}, \quad E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{2ma^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

e la perturbazione è  $V = -\varepsilon q E x$ . Le correzioni ai livelli energetici (al primo ordine) si ricavano dalla formula

$$E_n^{(1)} = (\psi_n, V\psi_n) = -\varepsilon q E \frac{2}{a} \int_0^a \sin^2 \frac{n\pi x}{a} x dx = -\varepsilon q E \frac{a}{2}.$$

**Soluzione 15** (16Feb99). – Riferimento: §13, §12.

Si indichi con  $\varphi$  l'angolo che il pendolo forma con la verticale. Per l'energia potenziale si ha

$$V(\varphi) = -mga \cos \varphi \simeq -mga \left(1 - \frac{\varphi^2}{2} + \frac{\varphi^4}{24} + \dots\right)$$

e la hamiltoniana approssimata del sistema diventa

$$\begin{aligned} H &= \frac{p^2}{2m} + \frac{mg}{2a} x^2 - mga - \frac{mg}{24a^3} x^4 = H_0 + H', \\ H_0 &= \frac{p^2}{2m} + \frac{mg}{2a} x^2 - mga & H' &= -\frac{mg}{24a^3} x^4, \end{aligned}$$

dove si è usata la variabile  $x = a\varphi$ .  $H_0$  è la hamiltoniana di un oscillatore armonico con frequenza angolare  $\omega = \sqrt{g/a}$  ed energie

$$E_n^{(0)} = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega - mga.$$

Conviene scrivere  $H'$  in termini di operatori di creazione e distruzione. Si ha

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (a + a^\dagger),$$

$$(\psi_0, x^4 \psi_0) = \|x^2 \psi_0\|^2 = \left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^2 \|(a + a^\dagger)(a + a^\dagger)\psi_0\|^2 = 3 \left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^2$$

La correzione al livello fondamentale è pertanto

$$E_0^{(1)} = -\frac{\hbar^2}{32ma^2}.$$

L'approssimazione è buona se

$$ma^{3/2} \gg \frac{\hbar}{16\sqrt{g}}.$$

**Soluzione 16** (13Mag99). – Riferimento: §12, §13.

Conviene scegliere l'asse  $z$  parallelo al campo magnetico e  $\bar{A} = \bar{B} \times \bar{r}/2$ . In tal modo la hamiltoniana del sistema diventa

$$H = H_0 + V + O(B^2) = H_0 - \frac{qB}{2mc} L_z + O(B^2), \quad L_z = i\hbar (a_x a_y^\dagger - a_x^\dagger a_y).$$

Usando le proprietà degli operatori di creazione e distruzione si ha

$$\begin{aligned} L_z \phi_{000} &= 0, & L_z \phi_{001} &= 0, \\ L_z \phi_{100} &= i\hbar \phi_{010}, & L_z \phi_{010} &= -i\hbar \phi_{100}, \end{aligned}$$

dove  $\phi_{ijk}$  sono gli autostati dell'oscillatore armonico. Il livello fondamentale è invariante per rotazione e quindi la sua energia non cambia (al primo ordine in  $B$ ). Il primo livello eccitato è tre volte degenero e le correzioni all'energia sono date dalle radici dell'equazione

$$\begin{vmatrix} V_{100,100} - \lambda & V_{100,010} & V_{100,001} \\ V_{010,100} & V_{010,010} - \lambda & V_{010,001} \\ V_{001,100} & V_{001,010} & V_{001,001} - \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda & -\frac{i\hbar q B}{2mc} & 0 \\ \frac{i\hbar q B}{2mc} & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

La degenerazione è rimossa e si ha

$$E_1^{(0)} \rightarrow \begin{cases} E_1^{(0)} + \frac{i\hbar q B}{2mc} \\ E_1^{(0)} \\ E_1^{(0)} - \frac{i\hbar q B}{2mc} \end{cases}.$$

Le funzioni d'onda del primo livello eccitato sono polinomi del primo ordine in  $x, y, z$  e pertanto sono combinazioni di armoniche sferiche con  $l = 1$ . Scrivendo  $x, y, z$  in coordinate polari e ricordando l'espressione delle armoniche sferiche si ha infatti

$$\begin{aligned} \phi_{000} &= f(r), & \phi_{001} &= g(r)Y_1^0, \\ \phi_{100} &= g(r)\frac{Y_1^{-1} - Y_1^1}{\sqrt{2}}, & \phi_{010} &= ig(r)\frac{Y_1^{-1} + Y_1^1}{\sqrt{2}}, \end{aligned}$$

dove  $f, g$  sono funzioni normalizzate. Applicando  $L_z$  alle funzioni sopra si ottiene ovviamente il risultato precedente.

E' interessante notare che per calcolare la correzione ai primi quattro livelli non era necessario ricavare esplicitamente le autofunzioni imperturbate in termini delle armoniche sferiche. E' infatti sufficiente osservare che lo stato fondamentale è invariante rispetto alla perturbazione e quindi non riceve correzioni ( $\phi_{000}$  è autofunzione di  $H$  con autovalore  $E_0^{(0)}$ ), mentre le autofunzioni corrispondenti al primo livello eccitato hanno  $l = 1$ . Per questo sottospazio tridimensionale è quindi possibile scegliere una base  $\psi_k$  della forma

$$\psi_1 = A_1(r)Y_1^1, \quad \psi_2 = A_2(r)Y_1^{-1}, \quad \psi_3 = A_1(r)Y_1^0.$$

Queste sono ovviamente autofunzioni di  $H_0$  con autovalore  $E_1^{(0)}$ , e, contemporaneamente, autofunzioni di  $H$  con autovalori, rispettivamente

$$E_1^{(0)} - \frac{\hbar q B}{2mc}, \quad E_1^{(0)} + \frac{\hbar q B}{2mc}, \quad E_1^{(0)}.$$

**Soluzione 17** (15Feb00). – Riferimento: §13, §7.

Le autofunzioni e gli autovalori della hamiltoniana del sistema imperturbato sono

$$\phi_{n_1 n_2}(x, y) = \frac{2}{a} \sin \frac{n_1 \pi x}{a} \sin \frac{n_2 \pi y}{a}, \quad E_{n_1 n_2}^{(0)} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2} (n_1^2 + n_2^2),$$

$n_1, n_2 \geq 1$ . Lo stato fondamentale è non degenero mentre il primo livello eccitato ha degenerazione uguale a 2. Le autofunzioni corrispondenti sono

$$\begin{aligned} \phi_{12} &= \frac{2}{a} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{a}, \\ \phi_{21} &= \frac{2}{a} \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{a}, \\ E_{12}^{(0)} &= E_{21}^{(0)} = \frac{5\hbar^2 \pi^2}{2ma^2}. \end{aligned}$$

Il potenziale perturbativo è  $V(x, y) = -q\mathcal{E}x$ , che ha elementi di matrice

$$\begin{aligned} V_{rs,rs} &= (\phi_{rs}, V\phi_{rs}) = -\frac{q\mathcal{E}a}{2}, \\ V_{ij,rs} &= (\phi_{ij}, V\phi_{rs}) \\ &= -q\mathcal{E} \left(\frac{2}{a}\right)^2 \int_0^a x \sin \frac{i\pi x}{a} \sin \frac{r\pi x}{a} dx \int_0^a \sin \frac{j\pi y}{a} \sin \frac{s\pi y}{a} dy \\ &= -q\mathcal{E}\delta_{js} \frac{4air}{\pi^2(i^2 - r^2)^2} [(-1)^{i+r} - 1]. \end{aligned}$$

La correzione all'energia dello stato fondamentale è  $V_{11,11}$  e dunque

$$E_{11}^{(1)} = \frac{\hbar^2\pi^2}{ma^2} - \frac{q\mathcal{E}a}{2}.$$

le correzioni al primo livello eccitato, che è due volte degenere, sono date dalle soluzioni  $\lambda_{1,2}$  dell'equazione

$$\begin{vmatrix} V_{12,12} - \lambda & V_{12,21} \\ V_{21,12} & V_{21,21} - \lambda \end{vmatrix} = \left(-\frac{q\mathcal{E}a}{2} - \lambda\right)^2 = 0,$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{q\mathcal{E}a}{2}.$$

La degenerazione non è rimossa.

**Soluzione 18** (19Set00). – Riferimento: §8, §13.

Nel calcolo richiesto intervengono soltanto il livello fondamentale e il primo livello eccitato, che è due volte degenere. Si ha

$$E_{11}^{(0)} = \frac{2\hbar^2\pi^2}{ma^2}, \quad \phi_{11} = \frac{2}{a} \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{a},$$

$$E_{12}^{(0)} = E_{21}^{(0)} = \frac{5\hbar^2\pi^2}{2ma^2}, \quad \phi_{12} = \frac{2}{a} \cos \frac{\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{a}, \quad \phi_{21} = \frac{2}{a} \sin \frac{2\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{a}.$$

Il potenziale perturbativo è  $V = \frac{\lambda}{2}(x^2 + y^2)$  i cui elementi di matrice sono

$$\begin{aligned} V_{11,11} &= \lambda a^2 \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{2\pi^2}\right), \\ V_{12,12} &= V_{21,21} = \lambda a^2 \left(\frac{1}{12} - \frac{5}{16\pi^2}\right), \\ V_{12,21} &= V_{21,12} = 0. \end{aligned}$$

La correzione al livello fondamentale è

$$E_{11}^{(1)} = V_{11,11} = \lambda a^2 \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{2\pi^2}\right),$$

mentre le correzioni  $\mu$  al primo livello eccitato sono

$$\begin{vmatrix} \mu - V_{12,12} & V_{12,21} \\ V_{21,12} & \mu - V_{21,21} \end{vmatrix} = 0,$$

da cui

$$E_{12}^{(0)} = E_{21}^{(0)} \longrightarrow \frac{5\hbar^2\pi^2}{2ma^2} + \lambda a^2 \left(\frac{1}{12} - \frac{5}{16\pi^2}\right)$$

e la degenerazione non è rimossa.

**Soluzione 19** (18Lug01). – Riferimento: §21, §14.

Il potenziale è di tipo centrale, per cui le autofunzioni della hamiltoniana hanno la forma  $\psi(r, \vartheta, \varphi) = R(r)Y_l^m(\vartheta, \varphi)$ . Posto  $\chi(r) = r R(r)$  e  $k = \sqrt{2mE}/\hbar$  si ha

$$\chi'' + \left( k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) \chi = 0, \quad r \leq a.$$

Le funzioni  $\chi(r)$  devono soddisfare le condizioni

$$\int_0^a |\chi(r)|^2 dr = 1, \quad \chi(0) = \chi(a) = 0.$$

Per le soluzioni con momento angolare nullo ( $l = 0$ , onda  $s$ ), l'equazione è formalmente la stessa che si ha per una particella in una buca di potenziale a pareti infinite. Pertanto, per  $l = 0$  si ottiene

$$\psi_{n00} = \sqrt{\frac{2}{a}} r \sin \frac{n\pi r}{a} Y_0^0, \quad E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{2ma^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

La perturbazione dipende solo dal modulo della posizione e pertanto non agisce sulle armoniche sferiche. Si ha quindi

$$\begin{aligned} H_{n00,100}^{(1)} &= \left( \psi_{n00}, H^{(1)} \psi_{100} \right) = \frac{2\varepsilon}{a} \int_0^a \sin \frac{n\pi r}{a} r^2 \sin \frac{\pi r}{a} dr \\ &= (-1)^n \frac{8\varepsilon na^2}{\pi^2(n^2-1)^2}, \end{aligned}$$

che vale per ogni  $n \geq 2$ . La probabilità di transizione richiesta è data dalla formula

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\psi_{100} \rightarrow \psi_{n00}) &= \left| \frac{1}{i\hbar} \int_0^T H_{n00,100}^{(1)} e^{i(E_{n00}-E_{100})t/\hbar} dt \right|^2 \\ &= \left( \frac{8\varepsilon na^2}{\hbar^2 \pi^2 (n^2-1)^2} \right)^2 \left| \int_0^T \exp \frac{i\hbar \pi^2 (n^2-1)t}{2ma^2} dt \right|^2 \\ &= \left( \frac{32\varepsilon nma^3}{\hbar^3 \pi^4 (n^2-1)^3} \sin \frac{\hbar \pi^2 (n^2-1)T}{4ma^2} \right)^2. \end{aligned}$$

**Soluzione 20** (5Feb02). – Riferimento: §12, §13.

Siano  $\phi_n(x; \alpha)$  le autofunzioni dell'oscillatore armonico unidimensionale di frequenza  $\omega$  e massa  $m$  ( $\alpha = m\omega/\hbar$ ). Il sistema in perturbato ha autofunzioni ed energie

$$\psi_{n_1 n_2}^{(0)}(x, y) = \phi_{n_1}(x; \alpha) \phi_{n_2}(y; \alpha), \quad E_n^{(0)} = (n+1)\hbar\omega, \quad n = n_1 + n_2 \geq 0.$$

Lo stato fondamentale è non degenero per cui si ha

$$E_0^{(1)} = V_{00,00} = \int |\psi_{00}^{(0)}|^2 dx dy = 0,$$

dove  $V = \varepsilon xy$ . Il primo livello eccitato è due volte degenero. Si ha

$$V_{01,01} = V_{10,10} = 0, \quad V_{01,10} = V_{10,01} = \frac{\varepsilon}{2\alpha}.$$

Per calcolare l'ultimo termine conviene scrivere  $xy$  usando gli operatori di creazione e distruzione, mentre tutti gli altri elementi sono banalmente nulli per ragioni di parità delle funzioni integrande. Le correzioni all'energia sono

$$E_1^{(1)} = \pm \frac{\varepsilon \hbar}{2m\omega}.$$

In termini delle nuove variabili (posto  $a = 1/\sqrt{2}$ ), la hamiltoniana diventa

$$H = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{m\omega_1^2 q_1^2}{2} + \frac{p_2^2}{2m} + \frac{m\omega_2^2 q_2^2}{2}, \quad \omega_1 = \sqrt{\omega^2 + \frac{\varepsilon}{m}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\omega^2 - \frac{\varepsilon}{m}}.$$

Le energie e le autofunzioni esatte sono perciò

$$\psi_{n_1 n_2}(x, y) = \phi_{n_1}([x + y]/2\sqrt{2}; \alpha_1) \phi_{n_2}([x - y]/2\sqrt{2}; \alpha_2),$$

$$E_{n_1 n_2} = \left(n_1 + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega_1 + \left(n_2 + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega_2,$$

dove  $\alpha_k = m\omega_k/\hbar$ . Al primo ordine in  $\varepsilon$ , per i primi tre livelli si ottiene

$$E_{00} \sim \hbar \omega, \quad E_{10} \sim 2\hbar \omega + \frac{\varepsilon \hbar}{2m\omega}, \quad E_{01} \sim 2\hbar \omega - \frac{\varepsilon \hbar}{2m\omega},$$

che coincide con il risultato ottenuto usando la teoria delle perturbazioni.

**Soluzione 21** (1Lug03). – Riferimento: §12, §1.

In assenza del campo elettrico, la hamiltoniana del sistema è

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2}, \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad x \geq 0.$$

Le funzioni di Hermite  $\phi_n(x)$  sono ovviamente soluzioni dell'equazione agli autovalori

$$H\phi_n(x) = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega,$$

però solo quelle con  $n$  dispari si annullano nell'origine (come richiesto dal problema). Le autofunzioni (normalizzate in  $(0, \infty)$ ) e gli autovalori del sistema sono perciò

$$\psi_n(x) = \sqrt{2}\phi_n(x), \quad E_n^{(0)} = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega, \quad n = 1, 3, 5, \dots$$

In presenza del campo elettrico, il potenziale perturbativo diventa  $V = -q\mathcal{E}x$  e la correzione all'energia del generico livello

$$E_n^{(1)} = V_{nn} = -q\mathcal{E} \langle \psi_n, x\psi_n \rangle, \quad n = 1, 3, 5, \dots$$

L'azione di  $x$  sulle funzioni d'onda si può calcolare usando la sua espressione in termini degli operatori di creazione e distruzione (si noti tuttavia che  $a$  e  $a^\dagger$  non mandano autostati in autostati, come avviene per l'oscillatore armonico).

Indicando con  $\alpha = m\omega/\hbar$  e  $A_n$  la costante di normalizzazione delle funzioni di Hermite, si ha

$$V_{nn} = -2q\mathcal{E} \int_0^\infty dx \phi_n(x) x \phi_n(x) = -\frac{2A_n^2 q\mathcal{E}}{\alpha} \int_0^\infty d\xi e^{-\xi^2} H_n(\xi) \xi H_n(\xi).$$

$H_n$  è un polinomio contenente solo potenze dispari e quindi è della forma

$$H_n(\xi) = \sum_{i=0}^{(n-1)/2} c_{2i+1} \xi^{2i+1}.$$

Si ha allora

$$\begin{aligned} \int_0^\infty d\xi e^{-\xi^2} H_n(\xi) \xi H_n(\xi) &= \sum_{i,j=0}^{(n-1)/2} c_{2i+1} c_{2j+1} \int_0^\infty d\xi \xi e^{-\xi^2} \xi^{2(i+j+1)} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=0}^{(n-1)/2} c_{2i+1} c_{2j+1} \Gamma(i+j+2). \end{aligned}$$

In conclusione,

$$V_{nn} = -\frac{A_n^2 q\mathcal{E}}{\alpha} \sum_{i,j=0}^{(n-1)/2} c_{2i+1} c_{2j+1} (i+j+1)! = -\frac{q\mathcal{E}}{\sqrt{\alpha}} \left[ \frac{1}{2^n n! \sqrt{\pi}} \sum_{i,j=0}^{(n-1)/2} c_{2i+1} c_{2j+1} (i+j+1)! \right]$$

# Perturbazioni dipendenti dal tempo - Testi

**Esercizio 1.** (7Gen94) – Una particella di massa  $m$  e carica  $q$  è sottoposta al potenziale

$$V(x) = \frac{m\omega^2}{2}x^2 - q\mathcal{E}(t/\tau)x,$$

dove  $\mathcal{E}(t/\tau)$  (campo elettrico indipendente da  $x$ ) è una funzione pari del tempo che si annulla per  $|t| > \tau$  ( $\tau > 0$ ). Sapendo che per  $t < -\tau$  il sistema si trova nello stato fondamentale, determinare la probabilità, al primo ordine perturbativo in  $\mathcal{E}$ , di trovarlo in uno stato eccitato generico per  $t > \tau$ .

**Esercizio 2.** (23Giu94) – Un oscillatore armonico perturbato è descritto dalla hamiltoniana

$$H = H^0 + H^1, \quad H^0 = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2}, \quad H^1 = \epsilon q^2 \exp(-|t|/\tau).$$

Al tempo  $t_1 \ll -\tau$  l'oscillatore si trova nello stato fondamentale. Usando il metodo perturbativo al primo ordine in  $\epsilon$  trovare la probabilità che l'oscillatore si trovi in uno stato eccitato al tempo  $t_2 \gg \tau$ .

**Esercizio 3.** (16Dic94) – Una particella di massa  $m$  è vincolata a muoversi sul segmento  $|x| \leq a$  ed è sottoposta al potenziale  $V(x) = \epsilon \sin(\pi x/a) \exp(-\alpha t^2)$ . Per  $t \ll -\alpha^{-1/2}$  il potenziale è trascurabile e il sistema si trova nello stato fondamentale. Trovare la probabilità che per  $t \gg \alpha^{-1/2}$  il sistema si trovi in uno stato eccitato (al primo ordine in  $\epsilon$ ).

**Esercizio 4.** (28Feb95) – Una particella di massa  $m$  si muove su un segmento di lunghezza  $a$  con barriere impenetrabili agli estremi e inizialmente ( $t = 0$ ) si trova nello stato fondamentale. Durante l'intervallo di tempo  $T$ , viene fatta agire una forza costante di intensità  $f$ . Usando il metodo perturbativo al primo ordine, calcolare la probabilità di trovare la particella in un generico stato eccitato per  $t > T$ .

**Esercizio 5.** (20Apr95) – Due oscillatori armonici interagenti sono descritti dalla hamiltoniana

$$H = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q_1^2}{2} + \frac{p_2^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q_2^2}{2} + f(t)q_1q_2,$$

dove la funzione  $f(t)$  si annulla fuori di un intervallo di tempo. Prima della interazione, gli oscillatori si trovano in stati stazionari con numeri quantici rispettivamente  $n_1$  e  $n_2$ . Usando il metodo perturbativo, trovare la probabilità che dopo l'interazione i numeri quantici siano scambiati

**Esercizio 6.** (24Apr95) – Una particella di massa  $m$  e carica  $q$  è vincolata a stare sul segmento  $0 \leq x \leq a$  e all'istante  $t = 0$  si trova nello stato descritto dalla funzione d'onda  $\psi(x, 0) = A[\sin(2\pi x/a) + \sin(4\pi x/a)]$ . Calcolare: a) la probabilità di ottenere il generico autovalore  $E_n$  in una misura dell'energia; b) l'energia media della particella.

Per un tempo  $T$  il sistema viene posto in un campo elettrico uniforme  $\mathcal{E}$  diretto lungo  $x$ . Determinare la probabilità che al tempo  $t \geq T$  il sistema si trovi nello stato fondamentale (all'ordine più basso in  $\mathcal{E}$ ).

(Aiuto: si osservi che lo stato iniziale  $\psi(x, 0)$  non è un autostato della hamiltoniana imperturbata e quindi le condizioni iniziali sono diverse da quelle usuali).

**Esercizio 7.** (27Mag96) – Un oscillatore armonico tridimensionale isotropo di massa  $m$ , frequenza angolare  $\omega$  e carica  $e$  si trova in uno stato stazionario generico  $\psi_{\vec{n}}$ . Per un tempo  $T$  il sistema viene immerso in un campo magnetico uniforme  $B$ . a) Scrivere la hamiltoniana del sistema in presenza del campo magnetico; b) calcolare la probabilità di transizione ad un generico autostato  $\psi_{\vec{k}}$  (al primo ordine in  $B$ ).

**Esercizio 8.** (27Giu96) – Un oscillatore armonico bidimensionale è descritto dalla hamiltoniana

$$H^{(0)} = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2m} + \frac{m\omega_x^2 x^2 + m\omega_y^2 y^2}{2}.$$

Per  $t \rightarrow -\infty$  l'oscillatore si trova nello stato fondamentale e viene sottoposto ad una perturbazione

$$H^{(1)}(t) = \epsilon L_z e^{-|\alpha t|}.$$

Si calcoli perturbativamente (al primo ordine in  $\varepsilon$ ) la probabilità che l'oscillatore si trovi in un altro livello energetico per  $t \rightarrow +\infty$ . Si discuta il caso particolare in cui  $\omega_x = \omega_y$ .

**Esercizio 9.** (7Ott97) – Un elettrone (con momento angolare  $\frac{1}{2}\hbar\bar{\sigma}$  e momento magnetico  $\mu\bar{\sigma}$ ) si trova in un campo magnetico costante di intensità  $B_0$  diretto lungo l'asse  $z$ . Si trascurino i gradi di libertà traslazionali.

a) Trovare i due livelli energetici. b) Se inoltre è presente un campo magnetico diretto lungo  $x$  con intensità variabile

$$B' = be^{-\alpha|t|}, \quad \alpha > 0,$$

trovare le probabilità di transizione tra i due livelli al primo ordine perturbativo in  $b$ . (Si considerino gli stati iniziali e finali rispettivamente ai tempi  $\pm T$  con  $\alpha T \gg 1$ ).

**Esercizio 10.** (28Gen98) –

Un atomo di idrogeno (senza spin) si trova nello stato  $\psi_{nlm}$  e subisce per un tempo  $T$  una perturbazione data da  $H^{(1)} = aL_x$ , dove  $L_x$  è una componente del momento angolare. Usando il metodo perturbativo al primo ordine, calcolare la probabilità di trovare l'atomo nello stato  $\psi_{n'l'm'}$ .

**Esercizio 11.** (17Set98) –

Il moto nello spazio di una particella con carica  $q$  è descritto dalle equazioni

$$X = a, \quad Y = vt, \quad Z = 0.$$

La velocità  $v$  è molto minore della velocità della luce e si può trascurare il campo magnetico ed il ritardo della propagazione del campo elettrico. Si sviluppi in serie di potenze il potenziale elettrico vicino all'origine trascurando termini di grado superiore al primo nelle coordinate  $x, y, z$ . Attorno all'origine oscilla un oscillatore armonico con massa  $m$ , carica  $q$  e frequenza  $\omega$ . L'ampiezza delle oscillazioni è piccola in modo che si possa usare l'approssimazione sopra suggerita per il potenziale. Se per  $t_1 \rightarrow -\infty$  l'oscillatore sta nel suo stato fondamentale, calcolare con il metodo perturbativo al primo ordine in  $q^2$  la probabilità che per  $t_2 \rightarrow +\infty$  esso si trovi in uno stato eccitato. Non è necessario calcolare esplicitamente gli integrali.

**Esercizio 12.** (8Giu99) – Un elettrone è immerso in un campo magnetico uniforme di intensità  $B_0$  diretto lungo l'asse  $z$ . Trascurando i gradi di libertà di traslazione, scrivere a) la hamiltoniana  $H_0$  del sistema e determinarne b) gli autovalori e c) gli autovettori.

Il sistema si trova in un autostato di  $H_0$  quando viene perturbato, per un tempo  $T$ , da un campo magnetico oscillante  $B \cos \omega t$  diretto lungo l'asse  $x$  ( $B = \text{costante}$ ). Usando la teoria delle perturbazioni al primo ordine in  $B$ , d) calcolare la probabilità di transizione ad un altro autostato per  $t > T$  (spin-flip).

**Esercizio 13.** (27Lug99) – Un oscillatore armonico bidimensionale di massa  $m$  e frequenza angolare  $\omega$  si trova in uno stato stazionario  $\psi_{n_1 n_2}$ . Il sistema viene quindi perturbato mediante un termine di interazione dipendente dal tempo della forma

$$H^{(1)} = f(t)(x + y)^2,$$

dove  $x, y$  sono le coordinate della particella e  $f(t)$  è non nulla solo nell'intervallo  $0 \leq t \leq T$ .

Usando la teoria delle perturbazioni dipendente dal tempo (al primo ordine), dire

- a) quali sono i possibili risultati se si misura l'energia del sistema al tempo  $t > T$ ;  
b) la probabilità che il sistema si trovi in uno stato con numeri quantici scambiati.

**Esercizio 14.** (23Set99) – Una particella di massa  $m$  e carica  $q$ , vincolata a muoversi su un segmento di lunghezza  $a$  ( $0 \leq x \leq a$ ), si trova nello stato fondamentale quando viene sottoposta, per un tempo limitato  $T$ , all'azione di un campo elettrico oscillante  $\mathcal{E} \cos \omega t$  diretto lungo  $x$ . Determinare la probabilità di trovare la particella in un generico stato eccitato al tempo  $t > T$  (all'ordine più basso in  $\mathcal{E}$ ).

**Esercizio 15.** (11Gen00) – Un oscillatore armonico bidimensionale anisotropo (particella di massa  $m$  e carica  $q$ ) è descritto dalla hamiltoniana

$$H^{(0)} = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2m} + \frac{m\omega_x^2 x^2 + m\omega_y^2 y^2}{2}.$$

Per  $t = 0$  l'oscillatore si trova in un generico stato stazionario con numeri quantici  $n_1, n_2$  quando viene sottoposto, per un tempo  $T$ , all'azione di un campo magnetico uniforme ortogonale al piano

$$\vec{B} = B\vec{k}; \quad B = \text{costante.}$$

a) Si scriva la hamiltoniana del sistema in presenza del campo magnetico trascurando i termini di ordine superiore al primo in  $B$ ; b) si calcoli perturbativamente al primo ordine in  $B$  la probabilità che l'oscillatore, al tempo  $t > T$ , si trovi in uno stato stazionario con numeri quantici scambiati; c) si determinino i possibili valori di  $n_1, n_2$  per i quali tale probabilità è non nulla.

**Esercizio 16.** (30Mag00) – Di un oscillatore armonico tridimensionale e isotropo, di massa  $m_0$ , frequenza angolare  $\omega$  e carica  $q$  si misura l'energia e la componente del momento angolare lungo  $z$ , trovando rispettivamente i valori  $5\hbar\omega/2$  e  $0$ .

a) Scrivere la funzione d'onda del sistema dopo le due misure.

Il sistema viene immerso, per un tempo  $T$ , in un campo elettrico costante  $\mathcal{E}$  diretto lungo  $x$ . Usando la teoria delle perturbazioni al primo ordine,

b) calcolare la probabilità che al tempo  $t > T$  il sistema si trovi in un generico autostato.

**Esercizio 17.** (18Nov02) – Un sistema fisico è costituito da una particella di massa  $m$  e carica  $q$  soggetta ad una forza elastica  $\vec{F} = -k\vec{r}$ . Il sistema si trova inizialmente in un autostato generico quando viene sottoposto all'azione di un campo elettrico uniforme  $\vec{\mathcal{E}}$ , per un tempo  $T$ . Si osserva il sistema al tempo  $t > T$  e si misura l'energia. Usando la teoria delle perturbazioni al primo ordine in  $|\mathcal{E}|$ , determinare:

a) la probabilità di trovare il sistema in uno stato diverso da quello iniziale;

b) la probabilità che l'energia non sia cambiata.

## Perturbazioni dipendenti dal tempo - Soluzioni

**Soluzione 1** (7Gen94). – Riferimento: §12, §14.

Calcoliamo gli elementi di matrice della perturbazione  $\mathcal{V} = -q\mathcal{E}x$  fra uno stato generico e lo stato fondamentale dell'oscillatore armonico. Si ha

$$\mathcal{V}_{n0} = -q\mathcal{E}\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (\psi_n, (a + a^\dagger)\psi_0) = -q\mathcal{E}\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \delta_{n1}.$$

Quindi l'unico contributo non nullo si ha per  $n = 1$  ( $\omega_{10} = \omega$ ). Per le probabilità otteniamo

$$|a_{10}^{(1)}|^2 = \frac{2q^2\tau^2}{\hbar m\omega} \left| \int_0^1 \mathcal{E}(t) \cos(\omega\tau t) dt \right|^2$$

e zero in tutti gli altri casi.

**Soluzione 2** (23Giu94). – Riferimento: §12, §14.

Usando gli operatori di creazione e distruzione si ha

$$H^1 = \frac{\varepsilon\hbar}{2m\omega} e^{-|t|/\tau} (a + a^\dagger)^2,$$

da cui facilmente si ricava

$$H_{k0}^1 = \frac{\varepsilon\hbar}{2m\omega} e^{-|t|/\tau} ([a + a^\dagger]\psi_k, [a + a^\dagger]\psi_0) = \frac{\varepsilon\hbar}{2m\omega} e^{-|t|/\tau} (\sqrt{k}\delta_{1,k-1} + \sqrt{k+1}\delta_{1,k+1}).$$

L'unico elemento non nullo è  $H_{20}^1$  ( $k \geq 0$ ). La probabilità che il sistema si trovi in tale stato dopo la perturbazione è data da

$$|a_{20}^{(1)}|^2 = \frac{\varepsilon^2}{2m^2\omega^2} \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t|/\tau} e^{2i\omega t} dt \right|^2 = \frac{\varepsilon^2}{2m^2\omega^2} \frac{1}{1 + 4\omega^2\tau^2}.$$

**Soluzione 3** (16Dic94). – Riferimento: §8, §14.

La perturbazione  $V$  è una funzione dispari e perciò tutti gli elementi di matrice di  $V$  fra uno stato pari e lo stato fondamentale (che è pari) sono nulli. Si ottiene

$$V_{n1} = (\psi_n, V\psi_1) = \begin{cases} 0, & n \geq 1 \text{ dispari}, \\ \frac{4\epsilon e^{-\alpha t^2}}{\pi} \frac{(-1)^{n/2} n(n^2-5)}{(n^2-9)(n^2-1)}, & n \geq 2 \text{ pari}, \end{cases}$$

$$\omega_{n1} = \frac{\pi^2(n^2-1)}{8ma^2}.$$

Per calcolare le probabilità possiamo integrare in  $t$  fra  $-\infty$  e  $+\infty$ . In questo modo si ha

$$|a_{n1}|^2 = \begin{cases} 0 & n \geq 3 \text{ dispari}, \\ \frac{16\pi\epsilon^2 e^{-\omega_{n0}^2/2\alpha}}{\alpha\hbar^2} \frac{n^2(n^2-5)^2}{(n^2-9)^2(n^2-1)^2}, & n \geq 2 \text{ pari}. \end{cases}$$

Come al solito, la probabilità che il sistema rimanga nello stato fondamentale è data da

$$|a_{11}|^2 = 1 - \sum_{n>1}^{\infty} |a_{n1}|^2.$$

**Soluzione 4** (28Feb95). – Riferimento: §14, §7 oppure §8.

Prendiamo la buca simmetrica  $|x| \leq a/2$ . La perturbazione  $V = -fx$  è una funzione dispari di  $x$ . Questo significa che gli elementi di matrice di  $V$  fra lo stato fondamentale (che è pari) e un qualunque altro autostato pari sono nulli. Si ha

$$V_{n1} = (\psi_n, V\psi_1) = \begin{cases} 0, & n \geq 1 \text{ dispari}, \\ (-1)^{n/2} \frac{8afn}{\pi^2(n^2-1)^2}, & n \geq 2 \text{ pari}, \end{cases}$$

$$\omega_{n1} = \frac{\pi^2(n^2-1)^2}{2ma^2}, \quad n \geq 1.$$

Le probabilità di transizione ai vari livelli sono date da

$$|a_{n1}^{(1)}|^2 = \begin{cases} 0, & n \geq 3 \text{ dispari}, \\ \left[ \frac{32ma^3fn}{\hbar^2\pi^4(n^2-1)^3} \sin \frac{\hbar^2\pi^2(n^2-1)T}{4ma^2} \right]^2, & n \geq 2 \text{ pari}. \end{cases}$$

La probabilità che la particella rimanga nello stato fondamentale è  $|a_{11}^{(1)}|^2 = 1 - \sum_{n=2}^{\infty} |a_{n1}^{(1)}|^2$ .

**Soluzione 5** (20Apr95). – Riferimento: §12, §14.

Gli elementi di matrice del potenziale perturbativo  $V = f(t)q_1q_2$  sono dati da ( $j, k, r, s \geq 0$ )

$$V_{jk,rs}(t) = (\psi_{jk}^{(0)}, V\psi_{rs}^{(0)}) = f(t)(\phi_j, q_1\phi_r)(\phi_k, q_2\phi_s)$$

$$= \frac{f(t)\hbar}{2m\omega} [\sqrt{r}\delta_{j,r-1} + \sqrt{r+1}\delta_{j,r+1}] [\sqrt{s}\delta_{k,s-1} + \sqrt{s+1}\delta_{k,s+1}],$$

dove  $\phi_j$  sono gli autostati dell'oscillatore armonico unidimensionale. Lo spettro del sistema imperturbato è  $E_{jk}^{(0)} = (j+k+1)\hbar\omega$  e dunque  $\omega_{jk,rs} = (j+k-r-s)\omega$ . Se  $(0, T)$  è l'intervallo temporale durante il quale agisce la forza, allora si ha

$$a_{jk, n_1 n_2}^{(1)}(T) = \frac{1}{i\hbar} \int_0^T e^{-i\omega_{jk, n_1 n_2} t} V_{jk, n_1 n_2}(t) dt.$$

Al primo ordine, la probabilità che i numeri quantici siano scambiati è data da  $|a_{n_2 n_1, n_1 n_2}^{(1)}(T)|^2$  ed è diversa da zero solo se  $|n_2 - n_1| = 1$ . Per la simmetria del problema, è sufficiente considerare il caso  $n_2 = n_1 + 1$ . Si ottiene

$$|a_{n_1+1 n_1, n_1 n_1+1}^{(1)}(T)|^2 = \left| \frac{n_1+1}{2m\omega} \int_0^T f(t) dt \right|^2.$$

**Soluzione 6** (24Apr95). – Riferimento: §7, §14.

Si vede immediatamente che la funzione d'onda è data dalla sovrapposizione del primo e del terzo livello eccitati. Cioè  $\psi(x, 0) = [\phi_2(x) + \phi_4(x)]/\sqrt{2}$ .  $\phi_n$  sono gli autostati della particella nella buca. Si è posto  $A = \sqrt{a}$  (normalizzazione). Gli unici possibili valori in una misura dell'energia sono  $E_2 = 2\hbar^2\pi^2/ma^2$  e  $E_4 = 8\hbar^2\pi^2/ma^2$  entrambi con probabilità 1/2. L'energia media è data da

$$E = \frac{E_2}{2} + \frac{E_4}{2} = \frac{5\hbar^2\pi^2}{ma^2}.$$

Il potenziale perturbativo è  $V = -\mathcal{E}x$  e i coefficienti non nulli a  $t = 0$  sono

$$a_2(0) = a_4(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Nella somma che dà i contributi al primo ordine sopravvivono due termini. È richiesta la probabilità di transizione allo stato fondamentale e dunque

$$\begin{aligned} a_1^{(1)}(T) &= -\frac{\mathcal{E}}{i\hbar\sqrt{2}} \int_0^T [e^{-i\omega_{12}t}(\phi_1, x\phi_2) + e^{-i\omega_{14}t}(\phi_1, x\phi_4)] dt, \\ |a_1^{(1)}(T)|^2 &= 2 \left( \frac{16a\mathcal{E}}{9\hbar\pi^2} \right)^2 \left\{ \left[ \frac{\sin(\omega_{12}T/2)}{\omega_{12}} \right]^2 + \left[ \frac{2\sin(\omega_{14}T/2)}{25\omega_{14}} \right]^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{4\sin(\omega_{12}T/2)\sin(\omega_{14}T/2)}{25\omega_{12}\omega_{14}} \cos((\omega_{14} - \omega_{12}T)/2) \right\}. \end{aligned}$$

**Soluzione 7** (27Mag96). – Riferimento: §12, §14.

Convien scegliere l'asse  $z$  parallelo al campo magnetico e  $\bar{A} = \bar{B} \times \bar{r}/2$ . In tal modo la hamiltoniana del sistema diventa

$$H = H_0 + V + O(B^2) = H_0 - \frac{eB}{2mc} L_z + O(B^2), \quad L_z = -i\hbar (a_x^\dagger a_y - a_x a_y^\dagger).$$

Per gli elementi di matrice si ottiene

$$V_{\bar{k}\bar{n}} = \frac{ieB\hbar}{2mc} \left[ \sqrt{(n_x + 1)n_y} \delta_{n_x+1, k_x} \delta_{n_y-1, k_y} - \sqrt{n_x(n_y + 1)} \delta_{n_x-1, k_x} \delta_{n_y+1, k_y} \right] \delta_{n_z k_z}.$$

Si vede quindi che le transizioni possono avvenire solo fra stati con la stessa energia ( $n_x + n_y = 0$ ). La probabilità di transizione ad uno dei due stati permessi (se  $\psi_{\bar{n}}$  rappresenta uno stato eccitato) è data da

$$\begin{aligned} |a_{\bar{k}\bar{n}}^{(1)}|^2 &= \frac{e^2 B^2 T^2}{4m^2 c^2} [n_x(n_y + 1)] \\ &= \frac{e^2 B^2 T^2}{4m^2 c^2} [(n_x + 1)n_y]. \end{aligned}$$

La probabilità totale di transizione (senza fissare lo stato finale) è la somma delle due.

**Soluzione 8** (27Giu96). – Riferimento: §14, §12.

Convien scrivere  $L_z$  in termini di operatori di creazione e distruzione. Si ha

$$L_z = \frac{\hbar}{2i} \sqrt{\frac{\omega_y}{\omega_x}} (a_x + a_x^\dagger)(a_y - a_y^\dagger) - \frac{\hbar}{2i} \sqrt{\frac{\omega_x}{\omega_y}} (a_y + a_y^\dagger)(a_x - a_x^\dagger).$$

Applicando questo operatore allo stato fondamentale si ottiene

$$L_z \psi_{00} = -\frac{\hbar}{2i} \left[ \sqrt{\frac{\omega_y}{\omega_x}} - \sqrt{\frac{\omega_x}{\omega_y}} \right] \psi_{11}$$

e per gli elementi di matrice

$$(\psi_{11}, H^{(1)} \psi_{00}) = -\frac{\varepsilon \hbar}{2i} \left[ \sqrt{\frac{\omega_y}{\omega_x}} - \sqrt{\frac{\omega_x}{\omega_y}} \right] e^{-|\alpha t|}.$$

Tutti gli altri sono nulli. Per la probabilità di transizione dallo stato fondamentale allo stato  $\psi_{11}$  si ricava

$$\begin{aligned} |a_{11,00}^{(1)}|^2 &= \left| \frac{\varepsilon}{2} \left[ \sqrt{\frac{\omega_y}{\omega_x}} - \sqrt{\frac{\omega_x}{\omega_y}} \right] \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|\alpha t|} e^{i(\omega_x + \omega_y)t} dt \right|^2 \\ &= \frac{\varepsilon^2 \alpha^2}{[\alpha^2 + (\omega_x + \omega_y)^2]^2} \frac{(\omega_x - \omega_y)^2}{\omega_x \omega_y}. \end{aligned}$$

Si osservi che se  $\omega_x = \omega_y$  anche questa transizione non è permessa. In questo caso infatti lo stato fondamentale è invariante per rotazione attorno a  $z$  e dunque è un autostato di  $L_z$  (ossia dell'intera hamiltoniana).

**Soluzione 9** (7Ott97). – Riferimento: §19, §14.

Se si trascurano i gradi di libertà traslazionali la Hamiltoniana imperturbata è

$$H_0 = -\bar{M} \cdot \bar{B} = -\mu B_0 \sigma_z, \quad \mu = -\frac{\hbar|e|}{2mc}.$$

Si ottiene banalmente

$$\begin{aligned} \chi_+ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, & E_+ &= -\mu B_0 = \hbar\omega, \\ \chi_- &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, & E_- &= \mu B_0 = -\hbar\omega. \end{aligned}$$

La perturbazione ha la forma

$$H' = -\bar{M} \cdot \bar{B}' = -\mu b e^{-\alpha|t|} \sigma_x.$$

Supponendo che l'elettrone si trovi nello stato  $\chi_-$  al tempo  $T \ll -1/\alpha$ , la probabilità di trovarlo nello stato  $\chi_+$  al tempo  $T \gg 1/\alpha$  è data dalla formula (al primo ordine in  $b$ )

$$|a_{+-}^{(1)}|^2 \sim \left| \frac{-\mu b}{i\hbar} (\chi_+, \sigma_x \chi_-) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|t|} e^{2i\omega t} dt \right|^2 = \left[ \frac{2\alpha\mu b}{\hbar(\alpha^2 + 4\omega^2)} \right]^2$$

**Soluzione 10** (28Gen98). – Riferimento: §14, §17, §22.

Poiché la perturbazione commuta con il quadrato del momento angolare e con la hamiltoniana imperturbata, le possibili transizioni avverranno solo fra stati che differiscono per il numero quantico  $m$ . Ricordiamo che

$$L_x \psi_{nlm} = \frac{\hbar}{2} (C_{lm}^+ \psi_{nl,m+1} + C_{lm}^- \psi_{nl,m-1}), \quad C_{lm}^{\pm} = \sqrt{l(l+1) - m(m \pm 1)},$$

per cui gli elementi di matrice della perturbazione sono

$$H_{nlm,n'l'm'}^{(1)} = a (\psi_{nlm}, L_x \psi_{n'l'm'}) = \frac{a\hbar}{2} (C_{l'm'}^+ \delta_{m,m'+1} + C_{l'm'}^- \delta_{m,m'-1}) \delta_{ll'} \delta_{nn'}.$$

Si hanno due possibili transizioni date da  $\psi_{nlm} \rightarrow \psi_{nl,m \pm 1}$ , che ovviamente sono stati con la stessa energia. La probabilità di transizione al primo ordine è data da

$$\mathcal{P}_{m \rightarrow m \pm 1} = \left| \frac{a}{2} C_{l,m \mp 1}^{\pm} \int_0^T dt \right|^2 = \frac{a^2 T^2}{4} [l(l+1) - m(m \mp 1)].$$

**Soluzione 11** (17Set98). – Riferimento: §14 §12.

Se  $\{x, y, z\}$  sono le coordinate di una generica particella di carica  $q$  che interagisce con la carica in moto, per la sua energia potenziale si ha

$$\begin{aligned} V(x, y, z) &= \frac{q^2}{\sqrt{(x-X)^2 + (y-Y)^2 + (z-Z)^2}} = V(0, 0, 0) + \bar{\nabla} V(0, 0, 0) \bar{r} + o(x^2, y^2, z^2) \\ &= \frac{q^2}{(a^2 + v^2 t^2)^{1/2}} + \frac{q^2 (ax + vty)}{(a^2 + v^2 t^2)^{3/2}} + o(x^2, y^2, z^2). \end{aligned}$$

All'ordine richiesto, per l'oscillatore armonico si ha quindi  $H = H_0 + H'$ , dove  $H_0$  è la hamiltoniana dell'oscillatore e la perturbazione dipendente dal tempo è

$$H' = \frac{q^2}{(a^2 + v^2 t^2)^{1/2}} + \frac{q^2(ax + vty)}{(a^2 + v^2 t^2)^{3/2}}.$$

Gli elementi di matrice di  $H'$  fra lo stato fondamentale dell'oscillatore  $\psi_{000}$  e uno stato eccitato qualunque  $\psi_{ijk}$  ( $i + j + k > 0$ ) sono

$$\begin{aligned} H'_{ijk,000} &= (\psi_{ijk}, H' \psi_{000}) \\ &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \frac{q^2}{(a^2 + v^2 t^2)^{3/2}} [a (\psi_{ijk}, (a_x + a_x^\dagger) \psi_{000}) + vt (\psi_{ijk}, (a_y + a_y^\dagger) \psi_{000})] \\ &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \frac{q^2}{(a^2 + v^2 t^2)^{3/2}} (a \delta_{i1} \delta_{j0} \delta_{k0} + vt \delta_{i0} \delta_{j1} \delta_{k0}). \end{aligned}$$

Come si vede, si hanno transizioni possibili solo al primo livello eccitato. Si ha

$$a_{100,000} = \frac{aq^2}{i\hbar} \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t/2}}{(a^2 + v^2 t^2)^{3/2}} dt,$$

$$a_{010,000} = \frac{vq^2}{i\hbar} \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t e^{i\omega t/2}}{(a^2 + v^2 t^2)^{3/2}} dt.$$

La probabilità di transizione ad un livello eccitato qualunque è quindi

$$\mathcal{P} = |a_{010,000}|^2 + |a_{100,000}|^2.$$

**Soluzione 12** (8Giu99). – Riferimento: §13, §19.

Se si trascurano i gradi di libertà di traslazione, la hamiltoniana imperturbata diventa

$$H_0 = -\frac{eB_0}{mc} s_z = \frac{\hbar|e|B_0}{2mc} \sigma_z,$$

che ha autostati e autovalori dati da

$$\chi_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad E_{\pm} = \pm \frac{\hbar|e|B_0}{2mc} = \pm \hbar\omega_0.$$

La perturbazione è

$$H^{(1)} = -\frac{eB \cos \omega t}{mc} s_x = \frac{\hbar|e|B \cos \omega t}{2mc} \sigma_x,$$

che ha elementi di matrice

$$H_{\pm\mp}^{(1)} = (\chi_{\pm}, H^{(1)} \chi_{\mp}) = \frac{\hbar|e|B \cos \omega t}{2mc}.$$

Supponendo che lo stato iniziale sia  $\chi_+$ , la probabilità di transizione al primo ordine in  $B$  diventa

$$\begin{aligned} |a_{+-}^{(1)}|^2 &= \left| \frac{1}{i\hbar} \int_0^T H_{+-}^{(1)} e^{2i\omega_0 t} dt \right|^2 \\ &= \frac{e^2 B^2}{4m^2 c^2} \left\{ \left[ \frac{\sin[(2\omega_0 + \omega)T/2]}{2\omega_0 + \omega} \right]^2 + \left[ \frac{\sin[(2\omega_0 - \omega)T/2]}{2\omega_0 - \omega} \right]^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{2 \cos(2\omega_0 T) \sin[(2\omega_0 + \omega)T/2] \sin[(2\omega_0 - \omega)T/2]}{4\omega_0^2 + \omega^2} \right\}. \end{aligned}$$

La transizione inversa si ottiene semplicemente con la trasformazione  $\omega_0 \rightarrow -\omega_0$ .

Questo problema si può trattare anche esattamente risolvendo l'equazione di Schrödinger dipendente dal tempo.

**Soluzione 13** (27Lug99). – Riferimento: §12, §14.

L'energia del sistema prima della perturbazione è  $E_{n_1 n_2} = (n_1 + n_2 + 1)\hbar\omega \equiv E_n$  ( $n = n_1 + n_2$ ). Per trovare i possibili valori dell'energia dopo la perturbazione si devono trovare tutti gli elementi di matrice non nulli della perturbazione. La parte che interviene in questo calcolo è soltanto  $(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$ . Il fattore temporale contribuisce nel calcolo delle probabilità. Poiché la perturbazione è quadratica, ci aspettiamo una (eventuale) variazione di energia di due quanti ( $2\hbar\omega$ ). Posto  $A = \hbar/(2m\omega)$  e usando le proprietà degli operatori di creazione e distruzione si ricava facilmente

$$x^2\psi_{ij} = A(a_x + a_x^\dagger)^2\psi_{ij} = A \left[ \sqrt{i(i-1)}\psi_{i-2,j} + (2i+1)\psi_{i,j} + \sqrt{(i+1)(i+2)}\psi_{i+2,j} \right],$$

$$xy\psi_{ij} = A(a_x + a_x^\dagger)(a_y + a_y^\dagger)\psi_{ij} = A \left[ \sqrt{ij}\psi_{i-1,j-1} + \sqrt{i(j+1)}\psi_{i-1,j+1} \right. \\ \left. + \sqrt{(i+1)j}\psi_{i+1,j-1} + \sqrt{(i+1)(j+1)}\psi_{i+1,j+1} \right],$$

da cui segue che le possibili transizioni dovute al termine  $x^2$  vanno dallo stato iniziale  $\psi_{n_1 n_2}$  agli stati finali  $\psi_{n_1 \pm 2, n_2}$  (per  $y^2$  vale ovviamente lo stesso discorso, basta scambiare  $n_1$  con  $n_2$ ) mentre quelle dovute al termine misto vanno dallo stato iniziale agli stati  $\psi_{n_1 \pm 1, n_2 \pm 1}$  e  $\psi_{n_1 \pm 1, n_2 \mp 1}$ . Si vede che per tutti i casi la somma dei numeri quantici cambia di due unità (o rimane la stessa). Dunque

$$n \longrightarrow n, n-2, n+2, \quad E_n \longrightarrow E_n, E_n \pm 2\hbar\omega.$$

Questo è vero se  $n \leq 2$ . Per  $n < 2$  l'energia rimane la stessa oppure aumenta di due quanti.

Scambiando i numeri quantici  $n$  non cambia e ciò significa che la probabilità che i numeri quantici siano scambiati per effetto della perturbazione è non nulla solo se  $i + j = n$ . Si vede che solo il termine misto può portare ad una situazione di questo tipo e soltanto se  $|n_2 - n_1| = 1$ . Supponendo di essere in uno di questi due casi (ad esempio  $n_2 = n_1 + 1$ ) si ricava

$$|a_{n_1+1, n_1, n_1+1}^{(1)}(T)|^2 = \left| \frac{n_1+1}{m\omega} \int_0^T f(t) dt \right|^2.$$

(vedi Perturbazioni dipendenti dal tempo, problema 20Apr95).

**Soluzione 14** (23Set99). – Riferimento: §14.

La perturbazione ha la forma  $V = -q\mathcal{E}x \cos\omega t$  i cui elementi di matrice fra lo stato fondamentale e un generico stato eccitato sono

$$V_{n1} = -\frac{2q\mathcal{E} \cos\omega t}{a} \int_0^a \sin \frac{n\pi x}{a} x \sin \frac{\pi x}{a} dx = \begin{cases} 0, & n = 3, 5, 7, \dots \\ \frac{8qa\mathcal{E}n \cos\omega t}{\pi^2(n^2+1)^2}, & n = 2, 4, 6, \dots \end{cases}$$

Se  $n = 3, 5, 7, \dots$  la probabilità di transizione è nulla, mentre se  $n = 2, 4, 6, \dots$  si ha

$$\mathcal{P}_{(n \leftarrow 1)} = \left| \frac{8qa\mathcal{E}n}{\pi^2\hbar^2(n^2+1)^2} \int_0^T \cos\omega t e^{i\omega_{n1}t} dt \right|^2 \\ = \left[ \frac{8qa\mathcal{E}n}{\pi^2\hbar^2(n^2+1)^2} \right]^2 \left[ \frac{\sin^2 \frac{(\omega+\omega_{n1})T}{2}}{(\omega+\omega_{n1})^2} + \frac{\sin^2 \frac{(\omega-\omega_{n1})T}{2}}{(\omega-\omega_{n1})^2} \right. \\ \left. + \frac{2 \sin \frac{(\omega+\omega_{n1})T}{2} \sin \frac{(\omega-\omega_{n1})T}{2} \cos\omega T}{\omega^2 + \omega_{n1}^2} \right],$$

dove  $\omega_{n1} = (E_n - E_1)/\hbar = \hbar\pi^2(n^2 - 1)/(2ma^2)$ .

**Soluzione 15** (11Gen00). – Riferimento: §14, §12.

Scegliendo il potenziale vettore della forma  $\bar{A} = \bar{B} \times r/2$ , la hamiltoniana del sistema in presenza del campo diventa

$$H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2) + \frac{m}{2}(\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2) - \frac{q}{2mc}BL_z + O(B^2) = H^{(0)} + H^{(1)}.$$

Conviene scrivere la componente  $L_z$  del momento angolare in termini di operatori di creazione e distruzione. Si ha

$$L_z = \frac{\hbar}{2i}\sqrt{\frac{\omega_y}{\omega_x}}(a_x + a_x^\dagger)(a_y - a_y^\dagger) - \frac{\hbar}{2i}\sqrt{\frac{\omega_x}{\omega_y}}(a_y + a_y^\dagger)(a_x - a_x^\dagger).$$

Ricordando come agiscono gli operatori di creazione e distruzione sugli autostati dell'oscillatore armonico si ricava

$$\begin{aligned} L_z \psi_{n_1 n_2} &= -\frac{\hbar}{2i} \left\{ \left[ \sqrt{\frac{\omega_y}{\omega_x}} - \sqrt{\frac{\omega_x}{\omega_y}} \right] \left[ \sqrt{n_1 n_2} \psi_{n_1-1, n_2-1} - \sqrt{(n_1+1)(n_2+1)} \psi_{n_1+1, n_2+1} \right] \right. \\ &\quad \left. + \left[ \sqrt{\frac{\omega_y}{\omega_x}} + \sqrt{\frac{\omega_x}{\omega_y}} \right] \left[ \sqrt{(n_1+1)n_2} \psi_{n_1+1, n_2-1} - \sqrt{n_1(n_2+1)} \psi_{n_1-1, n_2+1} \right] \right\} \end{aligned}$$

e per gli elementi di matrice della perturbazione

$$\begin{aligned} \left( \psi_{rs}, H^{(1)} \psi_{n_1 n_2} \right) &= -\frac{Bq\hbar}{4imc} \left[ \sqrt{\frac{\omega_y}{\omega_x}} - \sqrt{\frac{\omega_x}{\omega_y}} \right] \times \\ &\quad \left[ \sqrt{n_1 n_2} \delta_{r, n_1-1} \delta_{s, n_2-1} - \sqrt{(n_1+1)(n_2+1)} \delta_{r, n_1+1} \delta_{s, n_2+1} \right] \\ &\quad - \frac{Bq\hbar}{4imc} \left[ \sqrt{\frac{\omega_y}{\omega_x}} + \sqrt{\frac{\omega_x}{\omega_y}} \right] \times \\ &\quad \left[ \sqrt{(n_1+1)n_2} \delta_{r, n_1+1} \delta_{s, n_2-1} - \sqrt{n_1(n_2+1)} \delta_{r, n_1-1} \delta_{s, n_2+1} \right]. \end{aligned}$$

Per avere numeri quantici scambiati si deve prendere  $r = n_2$  e  $s = n_1$  e in tal caso si vede che gli elementi di matrice sono non nulli solo se  $n_1$  e  $n_2$  sono numeri consecutivi. Senza perdere in generalità si può supporre  $n_2 = n_1 + 1$  e quindi

$$\begin{aligned} \left| a_{(n_1+1)n_1, n_1(n_1+1)}^{(1)} \right|^2 &= \left| \frac{qB(n_1+1)}{4mc} \left[ \sqrt{\frac{\omega_y}{\omega_x}} + \sqrt{\frac{\omega_x}{\omega_y}} \right] \int_0^T e^{i(\omega_x - \omega_y)t} dt \right|^2 \\ &= \left[ \frac{qB(n_1+1)}{2mc} \right]^2 \frac{(\omega_x + \omega_y)^2}{\omega_x \omega_y} \left[ \frac{\sin \frac{(\omega_x - \omega_y)T}{2}}{\omega_x - \omega_y} \right]^2. \end{aligned}$$

Si osservi che se  $\omega_x = \omega_y$  la probabilità di transizione non dipende dalla frequenza ed è proporzionale a  $T^2$ .

**Soluzione 16** (30Mag00). – Riferimento: §12, §14.

L'energia misurata è quella del primo livello eccitato, che è tre volte degenero. La funzione d'onda è dunque una combinazione arbitraria delle funzioni di Hermite  $\Phi_{100}, \Phi_{010}, \Phi_{001}$  e dunque una funzione della forma

$$\psi(x, y, z) = (Ax + By + Cz)e^{-\alpha r^2/2}, \quad \alpha = \frac{m_0 \omega}{\hbar},$$

con  $A, B, C$  costanti arbitrarie. La funzione precedente si può scrivere in coordinate polari e quindi sviluppare la parte angolare in armoniche sferiche. Senza applicare formule generali, basta osservare che  $x$  e  $y$  sono combinazioni lineari delle armoniche sferiche  $Y_1^1$  e  $Y_1^{-1}$  mentre  $z$  è proporzionale a  $Y_1^0$ . Poiché il valore del momento angolare lungo  $z$  è nullo, solo l'armonica sferica  $Y_1^0$  deve comparire nella funzione d'onda. Si può dunque concludere che il sistema si trova nello stato

$$\psi(x, y, z) = \Phi_{001}(x, y, z) = D r e^{-\alpha r^2/2} Y_1^0, \quad |D|^2 = \frac{8}{3} \sqrt{\frac{\alpha^5}{\pi}}.$$

La perturbazione ha la forma

$$V = -q\mathcal{E}x = -q\mathcal{E}\sqrt{\frac{\hbar}{2m_0\omega}}(a_x + a_x^\dagger),$$

da cui

$$V\psi = V\Phi_{001} = -q\mathcal{E}\sqrt{\frac{\hbar}{2m_0\omega}}\Phi_{101}.$$

Si vede dunque che dopo la perturbazione (al primo ordine nella teoria delle perturbazioni), il sistema può trovarsi soltanto nello stato  $\Phi_{101}$  con probabilità  $|a_{101,001}^{(1)}|^2$  oppure ancora nello stato iniziale con probabilità  $1 - |a_{101,001}^{(1)}|^2$ . Si ha

$$\begin{aligned} |a_{101,001}^{(1)}|^2 &= \left| \frac{1}{i\hbar} \int_0^T e^{i\omega t} (\Phi_{101}, V\Phi_{001}) dt \right|^2 \\ &= \frac{2q^2\mathcal{E}^2}{m_0\hbar\omega^3} \sin^2 \frac{\omega T}{2}. \end{aligned}$$

**Soluzione 17** (18Nov02). – Riferimento: §12, §14.

Senza perdere in generalità si può scegliere l'asse  $x$  nella direzione del campo elettrico  $\mathcal{E}$ . In tal modo la perturbazione diventa  $V = -q\mathcal{E}x$  e agisce per un tempo  $T$ . Per calcolare le probabilità richieste, occorrono gli elementi di matrice della perturbazione fra lo stato iniziale  $\psi_{\bar{n}}$  e uno stato generico  $\psi_{\bar{j}} = \psi_{j_1 j_2 j_3}$ . A questo scopo conviene porre

$$V = -q\mathcal{E}x = -\frac{q\mathcal{E}}{\sqrt{2\alpha}}(a_x + a_x^\dagger), \quad \alpha = \frac{m\omega}{\hbar},$$

da cui si ha facilmente

$$\begin{aligned} V_{\bar{n}\bar{j}} = (\psi_{\bar{n}}, V\psi_{\bar{j}}) &= -\frac{q\mathcal{E}}{\sqrt{2\alpha}} (\psi_{n_1 n_2 n_3}, [a_x + a_x^\dagger] \psi_{j_1 j_2 j_3}) \\ &= -\frac{q\mathcal{E}}{\sqrt{2\alpha}} \left( \psi_{n_1 n_2 n_3}, \sqrt{j_1} \psi_{(j_1-1)j_2 j_3} + \sqrt{j_1+1} \psi_{(j_1+1)j_2 j_3} \right) \\ &= -\frac{q\mathcal{E}}{\sqrt{2\alpha}} \left( \sqrt{j_1} \delta_{n_1(j_1-1)} \delta_{n_2 j_2} \delta_{n_3 j_3} + \sqrt{j_1+1} \delta_{n_1(j_1+1)} \delta_{n_2 j_2} \delta_{n_3 j_3} \right). \end{aligned}$$

Si possono avere transizioni solo fra stati il cui primo numero quantico differisce di una unità. I soli elementi di matrice non nulli sono pertanto

$$V_{n_1 n_2 n_3, (n_1-1) n_2 n_3} = -q\mathcal{E} \sqrt{\frac{n_1+1}{2\alpha}}, \quad V_{n_1 n_2 n_3, (n_1+1) n_2 n_3} = -q\mathcal{E} \sqrt{\frac{n_1}{2\alpha}}.$$

La probabilità di trovare il sistema in uno stato eccitato generico diverso da  $\psi_{n_1 n_2 n_3}$  è sempre nulla tranne che per i due livelli  $\psi_{(n_1 \pm 1) n_2 n_3}$ . Al primo ordine, questa è data da

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(n_1 \rightarrow n_1 - 1) &= |a_{n_1 n_2 n_3, (n_1-1) n_2 n_3}^{(1)}|^2 = \frac{(n_1+1)q^2\mathcal{E}^2}{2\alpha\hbar^2} \left| \int_0^T e^{i\omega t} dt \right|^2 \\ &= \frac{2(n_1+1)q^2\mathcal{E}^2 \sin^2(\omega T/2)}{m\hbar\omega^3}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(n_1 \rightarrow n_1 + 1) &= |a_{n_1 n_2 n_3, (n_1+1) n_2 n_3}^{(1)}|^2 = \frac{n_1 q^2 \mathcal{E}^2}{2\alpha \hbar^2} \left| \int_0^T e^{-i\omega t} dt \right|^2 \\ &= \frac{2n_1 q^2 \mathcal{E}^2 \sin^2(\omega T/2)}{m\hbar\omega^3}. \end{aligned}$$

La prima espressione perde di significato se  $n_1 = 0$ , vale a dire se lo stato iniziale è quello fondamentale. In tal caso si ha una sola transizione possibile. La probabilità di trovare il sistema in uno stato diverso da quello iniziale è

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}(0 \rightarrow 1) = \frac{2q^2 \mathcal{E}^2 \sin^2(\omega T/2)}{m\hbar\omega^3}$$

se lo stato iniziale è quello fondamentale, mentre in generale si ha

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}(n_1 \rightarrow n_1 - 1) + \mathcal{P}(n_1 \rightarrow n_1 + 1) = \frac{2(2n_1 + 1)q^2 \mathcal{E}^2 \sin^2(\omega T/2)}{m\hbar\omega^3}.$$

La probabilità che l'energia non sia cambiata coincide con la probabilità che il sistema rimanga nello stato iniziale, che ovviamente vale  $1 - \mathcal{P}$ .

## Teoria semiclassica della radiazione - Testi

**Esercizio 1.** (11Ott94) – Un punto di massa  $m$  e carica  $e$  è legato all'origine da una forza centrale elastica in modo da formare un oscillatore armonico tridimensionale di frequenza angolare  $\omega$ . Si chiede: a) le condizioni di validità dell'approssimazione di dipolo elettrico nel calcolo della probabilità di emissione di fotoni; b) dato un livello eccitato, calcolare, con il metodo perturbativo al primo ordine e nell'approssimazione di dipolo elettrico, la probabilità di emissione di fotoni ed indicare le eventuali regole di selezione.

**Esercizio 2.** (3Feb97) – Una particella di massa  $m$  e carica elettrica  $q$  è vincolata alla circonferenza  $x^2 + y^2 = a^2$ . Si trovino gli autovalori e le autofunzioni dell'energia. Il sistema è immerso in una radiazione elettromagnetica omogenea ed isotropa con densità spettrale  $u(\nu)$ . Usando l'approssimazione di dipolo elettrico si calcolino le probabilità di transizione per unità di tempo tra i vari livelli. Si discutano le condizioni di validità dell'approssimazione e le regole di selezione.

**Esercizio 3.** (24Giu97) – Una particella di massa  $m$  e carica elettrica  $q$  è vincolata a muoversi su di un segmento di lunghezza  $a$ . Si calcoli la vita media del primo livello eccitato (nell'approssimazione di dipolo elettrico).

**Esercizio 4.** (23Set98) –

Un oscillatore armonico lineare di massa  $m$ , frequenza  $\nu$  e carica elettrica  $q$  si trova in uno stato stazionario con energia  $E_n$ . Usando l'approssimazione di dipolo elettrico, si calcoli la vita media del livello.

## Teoria semiclassica della radiazione - Soluzioni

**Soluzione 1** (11Ott94). – Riferimento: §23.

L'oscillatore nello stato  $\psi_{\bar{n}}$  ha energia  $E_n = (n + 3/2)\hbar\omega$ , ( $n = n_1 + n_2 + n_3$ ) a cui corrisponde una elongazione classica  $L^2 = \frac{2E_n}{m\omega^2} = 2\langle r^2 \rangle$ . Per avere una transizione, la lunghezza d'onda della radiazione deve soddisfare la relazione  $\lambda \geq \frac{2\pi c}{\omega}$  e affinché sia valida l'approssimazione di dipolo elettrico deve essere  $\lambda \gg L$ , da cui  $E_n \ll mc^2$ . L'approssimazione di dipolo è valida se l'energia dell'oscillatore è molto minore dell'energia di riposo. Gli elementi di matrice della componente  $x$  del vettore  $\bar{r}$  sono dati da

$$x_{\bar{k}\bar{n}} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} [\sqrt{n_1} \delta_{k_1 n_1 - 1} + \sqrt{n_1 + 1} \delta_{k_1 n_1 + 1}] \delta_{k_2 n_2} \delta_{k_3 n_3}.$$

Per rotazione ciclica degli indici si ottengono gli elementi di matrice di  $y$  e  $z$ . Si vede dunque che le sole transizioni permesse sono quelle per cui  $n = n_1 + n_2 + n_3 \rightarrow n \pm 1$  (regole di selezione) a cui corrisponde l'emissione o l'assorbimento di un fotone di frequenza  $\nu_{fotone} = \omega/2\pi$ .

Fissata l'energia (cioè  $n$ ), si hanno tre possibili transizioni spontanee agli stati  $n_i \rightarrow n_i - 1$  ( $i = 1, 2, 3$ ) rispettivamente con probabilità per unità di tempo

$$w_{n_i \rightarrow n_i - 1}^{spontanea} = \frac{4e^2 \omega}{3\hbar c^3} \frac{\hbar}{2m\omega} n_i.$$

La probabilità di emissione di fotoni è la somma delle tre e dunque

$$w_{n \rightarrow n-1}^{spontanea} = \frac{4e^2 \omega}{3\hbar c^3} \frac{\hbar}{2m\omega} n.$$

**Soluzione 2** (3Feb97). – Riferimento: §11, §23.

La probabilità di transizione (indotta) per unità di tempo nell'approssimazione di dipolo elettrico è data dalla formula

$$w_{k \leftrightarrow n}^{indotta} = \frac{2\pi}{3\hbar^2} u(\nu) |\bar{d}_{kn}|^2,$$

dove  $h\nu = |E_n - E_k|/\hbar$  e  $\bar{d}_{kn}$  sono gli elementi di matrice del dipolo elettrico rispetto agli autostati dell'energia del sistema imperturbato. In questo caso si ha

$$\psi_n = \frac{e^{\pm n\varphi}}{\sqrt{2\pi}}, \quad E_n = \frac{\hbar^2 n^2}{2ma^2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\bar{d} = q\bar{r} = qa(\bar{i} \cos \varphi + \bar{j} \sin \varphi) = qa \left( \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} \bar{i} + \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i} \bar{j} \right),$$

da cui

$$|\bar{d}_{kn}|^2 = \frac{q^2 a^2}{4} |(\psi_k, \psi_{n+1} + \psi_{n-1})|^2 + |(\psi_k, \psi_{n+1} - \psi_{n-1})|^2 = \frac{q^2 a^2}{2} (\delta_{k,n+1} + \delta_{k,n-1}).$$

Si vede dunque che si hanno transizioni solo fra stati consecutivi ( $\Delta n = \pm 1$  regole di selezione). Poiché la probabilità di transizione indotta è uguale in entrambe le direzioni, scegliamo  $k = n + 1$ . Otteniamo

$$w_{n+1 \leftrightarrow n}^{indotta} = \frac{\pi a^2 q^2}{3\hbar^2} u(\nu) \Big|_{\nu=(E_{n+1}-E_n)/\hbar}.$$

L'approssimazione vale se la lunghezza d'onda della radiazione è molto maggiore di  $a$ .

**Soluzione 3** (24Giu97). – Riferimento: §23, §7.

Il sistema può passare spontaneamente dal primo livello eccitato con energia  $E_2$  allo stato fondamentale con energia  $E_1$  per l'emissione di un fotone di energia  $\hbar\omega = E_2 - E_1$ . La probabilità di transizione per unità di tempo, nell'approssimazione di dipolo elettrico, è data da

$$w^{spontanea} = \frac{4\omega^3}{3\hbar c^3} |d_{21}|^2, \quad d_{21} = q(\psi_2, x\psi_1).$$

$d = qx$  è il momento di dipolo elettrico. In questo caso si ha

$$d_{21} = \frac{2q}{a} \int_0^a \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{\pi x}{a} x dx = -\frac{16qa}{9\pi^2}, \quad \omega = \frac{3\hbar\pi^2}{2ma^2}.$$

Poiché  $w^{spontanea}$  rappresenta la probabilità di transizione per unità di tempo, la vita media del livello è data da  $\tau = (w^{spontanea})^{-1}$  e dunque

$$\tau = \frac{9m^3 c^3 a^4}{128\hbar^2 \pi^2 q^2}.$$

**Soluzione 4** (23Set98). – Riferimento: §23, §12.

La vita media del livello è data dall'inverso della probabilità (per unità di tempo) di transizione spontanea per emissione di fotoni. Nell'approssimazione di dipolo si ha

$$w_{n \rightarrow k}^{spontanea} = \frac{4\omega_{nk}^3}{3\hbar c^3} |d_{nk}|^2.$$

Per l'oscillatore armonico, gli elementi di matrice del momento di dipolo elettrico sono

$$\begin{aligned} d_{nk} &= q(\psi_n, x\psi_k) = q\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (\psi_n, (a + a^\dagger)\psi_k) \\ &= q\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (\sqrt{k}\delta_{n,k-1} + \sqrt{k+1}\delta_{n,k+1}). \end{aligned}$$

Per avere una transizione spontanea lo stato finale deve avere energia inferiore e dunque si ha che l'unico stato finale possibile ha numero quantico  $n - 1$ . In tal caso si ottiene

$$d_{n,n-1} = q\sqrt{\frac{n\hbar}{2m\omega}}, \quad \omega_{n,n-1} = \hbar\omega = h\nu.$$

Per la vita media del livello si ha infine

$$T = \frac{3\pi m c^3}{\hbar^3 q^2 \nu^2} \frac{1}{n}.$$

Maggiore è l'energia dell'oscillatore e più breve è la vita media del livello.

## Meccanica statistica quantistica - Testi

**Esercizio 1.** (16Feb95) – Un corpo rigido con simmetria sferica ha momento di inerzia  $I$ . a) Usando la relazione tra energia di rotazione e momento angolare, determinare i livelli energetici (solo energia cinetica di rotazione); b) scrivere la funzione di partizione canonica (quantistica) ed il valore medio dell'energia a temperatura  $T$  (lasciare indicate le serie); c) mostrare che nel limite classico ( $\hbar \rightarrow 0$ ) l'energia media tende al valore previsto dalla meccanica statistica classica (suggerimento: interpretare il limite della serie come un integrale).

**Esercizio 2.** (18Feb98) –

Una particella di massa  $m$  si muove sulla semiretta  $x > 0$  con una barriera impenetrabile nell'origine ed è soggetta al potenziale

$$V = \frac{1}{2} kx^2.$$

Si calcolino i livelli energetici e l'energia media della particella quando interagisce con un termostato a temperatura  $T$ .

**Esercizio 3.** (21Lug98) – Una particella di massa  $m$  è libera di muoversi in una scatola cubica di volume  $V = a^3$  ed è in contatto termico con un termostato a temperatura  $T$ .

- Scrivere l'espressione esatta (sotto forma di serie) per l'energia media del sistema.
- Trovare un'espressione approssimata per l'energia media valida per basse temperature.
- Usando l'identità di Jacobi

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha n^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi^2 n^2 / \alpha},$$

trovare un'espressione approssimata per l'energia media valida per alte temperature.

# Meccanica statistica quantistica - Soluzioni

**Soluzione 1** (16Feb95). – Riferimento: §17.

La hamiltoniana del sistema è data da  $H = L^2/2I$  e quindi gli autovalori sono proporzionali a quelli del momento angolare, cioè

$$E_l = \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2I}, \quad d_l = 2l+1, \quad l \geq 0,$$

dove  $d_l$  rappresenta la degenerazione. La funzione di partizione canonica e l'energia media a temperatura  $T = 1/\kappa\beta$  sono date da

$$Z = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)e^{-\beta E_l}, \quad \langle E \rangle_T = -\partial_{\beta} \log Z = \frac{1}{Z} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)E_l e^{-\beta E_l}.$$

Per fare il limite  $\hbar \rightarrow 0$  poniamo  $x_l = \hbar(l + \frac{1}{2})$  per cui

$$E_l = \frac{x_l^2 - \frac{\hbar^2}{4}}{2I}, \quad d_l = \frac{2x_l}{\hbar}, \quad \langle E \rangle_T = \frac{\hbar \sum_{l=0}^{\infty} x_l^3 e^{-\beta x_l^2/2I}}{2I\hbar \sum_{l=0}^{\infty} x_l e^{-\beta x_l^2/2I}}.$$

Nel limite in cui  $\hbar \rightarrow 0$  le somme precedenti diventano integrali di Riemann con le sostituzioni  $x_l \rightarrow x$  e  $\hbar \sum_{l=0}^{\infty} \rightarrow \int_0^{\infty} dx$ . In tal modo si ottiene

$$\langle E \rangle_T = -\partial_{\beta} \log \int_0^{\infty} x e^{-\beta x^2/2I} dx = -\partial_{\beta} \log \frac{I}{\beta} = \kappa T,$$

che è il risultato che si ottiene dalla meccanica statistica classica secondo il teorema di equipartizione dell'energia (il sistema ha due gradi di libertà).

**Soluzione 2** (18Feb98). – Riferimento: §12.

Le funzioni di Hermite sono soluzioni dell'equazione agli autovalori, però solo quelle dispari si annullano nell'origine. Pertanto gli autovalori dell'energia sono

$$E_n = (n + \frac{1}{2}) \hbar\omega, \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad n = 1, 3, 5, \dots$$

Il valore medio dell'energia si ricava dalla formula

$$\bar{E} = -\frac{\partial}{\partial \beta} \log Z,$$

dove la funzione di partizione quantistica è

$$Z = \sum_{\text{autovalori}} e^{-\beta E_n} = e^{-\beta \hbar\omega/2} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-(2k+1)\beta \hbar\omega} = \frac{e^{-3\beta \hbar\omega/2}}{1 - e^{-2\beta \hbar\omega}}.$$

Prendendo il logaritmo e derivando si ha infine

$$\bar{E} = \frac{3\hbar\omega}{2} + \frac{2\hbar\omega}{e^{2\beta \hbar\omega} - 1}.$$

**Soluzione 3** (21Lug98). – Riferimento: §7.

L'energia del sistema ha la forma

$$E_{\vec{n}} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2} (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2), \quad n_1, n_2, n_3 \geq 1,$$

da cui segue

$$Z_3 = \sum_{n_1, n_2, n_3=1}^{\infty} e^{-\beta E_{\bar{n}}} = (Z_1)^3, \quad Z_1 = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha n^2}, \quad \alpha = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2} \beta.$$

$$E = -\frac{\partial}{\partial \beta} \log Z_3 = \frac{1}{Z_3} \sum_{n_1, n_2, n_3=1}^{\infty} E_{\bar{n}} e^{-\beta E_{\bar{n}}} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2} \frac{3}{Z_1} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-\alpha n^2}.$$

Per basse temperature (grandi valori di  $\alpha$ ) si può effettuare il limite direttamente nell'ultima espressione e si ottiene

$$E = \frac{3\hbar^2 \pi^2}{2ma^2} \frac{[1 + \sum_{n=2}^{\infty} n^2 e^{-\alpha(n^2-1)}]}{[1 + \sum_{n=2}^{\infty} e^{-\alpha(n^2-1)}]} \sim \frac{3\hbar^2 \pi^2}{2ma^2} = E_0.$$

Per fare il limite di alte temperature ( $\alpha \rightarrow 0$ ) si deve prima usare l'identità di Jacobi

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha n^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi n^2/\alpha^2},$$

valida per  $\alpha > 0$ . Si ha

$$Z_1 = -1 + \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha n^2} = -1 + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi n^2/\alpha^2} \sim -1 + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}.$$

Prendendo la derivata logaritmica rispetto a  $-\beta$ , per l'energia media si ottiene ovviamente il risultato classico  $E \sim 3/\beta$ .

## Varie - Testi

**Esercizio 1.** (4Gen95) – Una particella di massa  $m$  e carica  $q$  si muove nel piano  $(x, y)$  ed è soggetta ad un campo magnetico uniforme  $B$  perpendicolare al piano. a) Scegliere un'espressione per il potenziale vettore  $\vec{A}$  e scrivere la hamiltoniana del sistema; b) verificare che il commutatore fra le componenti della quantità di moto

$$P_x = p_x - \frac{q}{c} A_x, \quad P_y = p_y - \frac{q}{c} A_y,$$

è una costante che non dipende dalla scelta di gauge; c) utilizzando le variabili  $P_x$  e  $P_y$  e l'analogia con la hamiltoniana e le relazioni di commutazione di un oscillatore armonico unidimensionale, determinare tutti i possibili valori dell'energia.

**Esercizio 2.** (20Feb96) – Un sistema è composto di una particella puntiforme di massa  $m$  che si muove su di una retta e da una particella fissata nell'origine con spin  $1/2$ . La seconda particella ha solo due livelli energetici con energia  $\pm a$ . La hamiltoniana imperturbata è

$$H^{(0)} = \frac{p^2}{2m} + a\sigma_z.$$

Si consideri inoltre una interazione del tipo  $H^{(1)} = v(x)\sigma_x$ , dove  $v(x)$  è diversa da zero solo in un piccolo intorno dell'origine. a) Si assuma che la prima particella sia vincolata a muoversi sul segmento  $|x| \leq L$  con condizioni di periodicità agli estremi, cioè  $\psi(-L) = \psi(L)$ , e si calcolino gli elementi di matrice di  $H^{(1)}$  tra i vari stati stazionari del sistema imperturbato; b) si consideri il limite  $L \rightarrow \infty$  ed usando la formula aurea di Fermi si calcoli la probabilità che una particella incidente con energia maggiore di  $2a$  urtando la particella fissa la faccia passare dallo stato con energia  $-a$  a quello con energia  $a$ .

# Varie - Soluzioni

**Soluzione 1** (4Gen95). – Riferimento: §12.

Senza perdere la generalità possiamo scegliere  $B > 0$ . Scegliamo inoltre il potenziale vettore nella forma  $\vec{A} = \vec{B} \times \vec{r}/2$ , che è una soluzione di  $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$  per  $\vec{B}$  uniforme. Questa soluzione soddisfa l'equazione  $\nabla \cdot \vec{A} = 0$ . Si ha (si ricordi che l'impulso canonico è  $\vec{p} = -i\hbar \nabla$ )

$$P_x = p_x + \frac{qBy}{2c}, \quad P_y = p_y - \frac{qBx}{2c}, \quad [P_x, P_y] = i\hbar \frac{qB}{c}.$$

Poniamo  $P_y = P$  e  $P_x = qBQ/c$ . In questo modo otteniamo

$$H = \frac{1}{2m}(P_x^2 + P_y^2) = \frac{1}{2m}P^2 + \frac{m\Omega^2}{2}Q^2, \quad \Omega = \frac{qB}{mc},$$

che formalmente è la hamiltoniana di un oscillatore armonico unidimensionale di massa  $m$  e frequenza angolare  $\Omega$ . I livelli energetici (detti livelli di Landau) sono perciò dati da

$$E_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\Omega = (n + \frac{1}{2})\frac{\hbar qB}{mc}, \quad n \geq 0,$$

mentre gli autostati sono le funzioni di Hermite  $\psi_n(Q)$ . In questa rappresentazione  $Q$  è l'operatore di moltiplicazione e  $P = -i\hbar \frac{d}{dQ}$  è l'operatore di derivazione.

**Soluzione 2** (20Feb96). – Riferimento: §19, §16.

Lo spettro è doppiamente degenero. Gli autostati e le energie del sistema imperturbato sono date da

$$\begin{aligned} \psi_n^\pm &= \frac{1}{\sqrt{2L}} e^{in\pi x/L} \chi_\pm, & \chi_+ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, & \chi_- &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ E_n^\pm &= \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{2mL^2} \pm a, & n &\in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

L'operatore  $\sigma_x$  manda  $\chi_+$  in  $\chi_-$  e viceversa. Quindi per arbitrari  $k, n$  si ha

$$\left( \psi_k^+, H^{(1)} \psi_n^- \right) = \left( \psi_k^-, H^{(1)} \psi_n^+ \right) = \frac{v(0)\delta}{L},$$

dove si è supposto che  $v(x) \sim v(0)$  per  $|x| < \delta$  e zero altrimenti. Il numero di stati (finali) con energia minore di  $E$  (tenendo conto della degenerazione e fissata l'energia della seconda particella,  $+a$ ) è dato da

$$N_{<E} = \frac{2L\sqrt{2m(E-a)}}{\hbar\pi} \implies dN_E = \frac{L\sqrt{2m}}{\hbar\pi} \frac{dE}{\sqrt{E-a}} = \varrho_f dE,$$

dove  $dN_E$  rappresenta il numero di stati (finali) con energia compresa fra  $E$  ed  $E + dE$  e  $\varrho_f$  la densità. Usando la formula aurea di Fermi si ha

$$w = \frac{2\pi}{\hbar} |H_{fi}^{(1)}|^2 \varrho_f = \frac{4mv(0)^2 \delta^2}{\hbar\pi n}.$$

Si noti che la probabilità di transizione per unità di tempo è inversamente proporzionale a  $n$  (all'energia della particella incidente).