a lezione :

ES. 1-1 Particella libera di massa m in una dimensione

CT, L_{III}, es.3 (pag. 341)

$$\psi(x,t=0) = \mathcal{N}\int dk\, e^{-|k|/k_0}\, e^{ikx} \quad , \quad k_0 \text{ e } \mathcal{N} \text{ costanti}$$

a-b) Trovare e disegnare graficamente $\text{Prob}(p\in[-p_1,p_1], t=0)$ e $\text{Prob}(p\in[-p_1,p_1], t)$

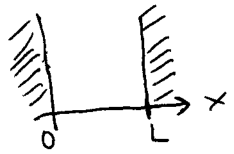
c) Discutere forma del pacchetto d'onda a $t=0$
Calcolare $\Delta x \Delta p$ per $t=0$
Descrivere qualitativamente l'evoluz. temporale

a lezione

ES. 2-1

W.S., es. 1024

a) Disegnare il bound state per buca infinita e scrivere la sua energia (E_0)



b) Se aggiungo potenziale repulsivo della forma

$$V(x) = \lambda\, \delta\left(x-\frac{L}{2}\right) \quad , \quad \lambda>0$$

trovare e disegnare il nuovo bound state e trovarne la sua energia $(\bar{E}_0)$.

c) Dimostrare che $\dfrac{\bar{E}_0}{E_0} \xrightarrow[\lambda\to+\infty]{} 4$

ES. 2-2

estri, 26/6/2007

[LUNGO]: (1) Determinare autovalori e autovettori della Hamiltoniana

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V(x)$$

$$V(x) = \begin{cases} +\infty & x\le -a \\ -\dfrac{\hbar^2}{2m}\dfrac{\gamma}{a}\,\delta(x) & x\in(-a,a) \\ +\infty & x\ge a \end{cases}$$

(2) Per quale γ l'autovalore più basso di H è $E=0$? Scriverne la autofunz. normalizzata.

(3) $\psi(x,t=0) = \mathcal{N}\left[1-\frac{|x|}{a} + \text{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right)\right]$ sia lo stato iniziale. ↓

↳ Distribuzione di probabilità per H al tempo t. ②

ES. 2-3 [LUNGO] Particella di massa m in una dimensione.

C.T., K_I, es. 5 (pag. 88)

$$V(x) = -\alpha\,\delta(x) - \alpha\,\delta(x-\ell) \qquad \alpha>0$$

(1) Calcolare stati legati e autovalori di H per gli stati legati.

(2) Dire quanti sono gli stati legati in funzione di ℓ.
e quale è la loro energia.

(3) Discutere simmetrie degli autostati

ES. 1-1

$$\psi(x,t=0) = \mathcal{N} \int dk\, e^{-|k|/k_0}\, e^{ikx}$$. ovviamente $k_0>0$

Ponendo $k=\frac{p}{\hbar}$ e con opportuna ridefinizione di $\mathcal{N}$

$$\psi(x,t=0) = \mathcal{N}' \int \frac{dp}{\sqrt{2\pi\hbar}}\, e^{-|p|/\hbar k_0}\, e^{ipx/\hbar}$$

Quindi ricordando la formula di inversione x la trasf. di Fourier, si ha

$$\psi(p,t=0) = \mathcal{N}'\, e^{-|p|/\hbar k_0}$$

Trovo $\mathcal{N}'$, imponendo $\int |\psi(p,t=0)|^2\, dp = 1$:

$$1 \stackrel{\text{deve}}{=} \int dp\, |\psi(p,t=0)|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |\mathcal{N}'|^2\, e^{-2|p|/\hbar k_0}\, dp =$$

$$= 2|\mathcal{N}'|^2 \int_0^{+\infty} e^{-2p/\hbar k_0}\, dp = 2|\mathcal{N}'|^2 \left.\frac{e^{-2p/\hbar k_0}}{(-2/\hbar k_0)}\right|_0^{+\infty} =$$

$$= \hbar k_0 |\mathcal{N}'|^2 \qquad \Rightarrow \mathcal{N}' = \frac{1}{\sqrt{\hbar k_0}}$$

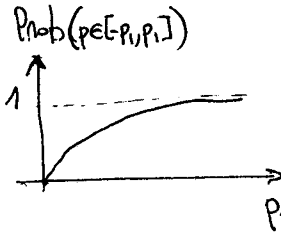
Quindi

$$\psi(p,t=0) = \frac{1}{\sqrt{\hbar k_0}}\, e^{-|p|/\hbar k_0} \qquad \psi(x,t=0) = \frac{1}{\sqrt{\hbar k_0}} \int \frac{dp}{\sqrt{2\pi\hbar}}\, e^{-|p|/\hbar k_0}\, e^{i\frac{px}{\hbar}}$$

a-b)

$$\text{Prob}\,(p\in[-p_1,p_1],\, t=0) = \int_{-p_1}^{p_1} dp\, |\psi(p,t=0)|^2 = \frac{2}{\hbar k_0} \int_0^{p_1} e^{-2p/\hbar k_0}\, dp$$

$$= \frac{2}{\hbar k_0} \left.\frac{e^{-2p/\hbar k_0}}{(-2/\hbar k_0)}\right|_0^{p_1} = 1 - e^{-2p_1/\hbar k_0}$$



Ogni componente del pacchetto evolve con un fattore di fase $e^{-iE_p t/\hbar}$, dove $E_p = \frac{p^2}{2m}$ (particella libera).

Quindi:

$$\psi(p,t) = e^{-iE_p t/\hbar}\, \psi(p,t=0) = e^{-i\frac{p^2}{2m}\frac{t}{\hbar}}\, \psi(p,t=0)$$

Segue che, poiché $|\psi(p,t)|^2 = |\psi(p,t=0)|^2$,

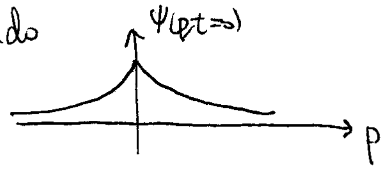
$$Prob(p,t) = Prob(p,t=0)$$

e dunque

$$Prob(p\in[-p_1,p_1],t) = Prob(p\in[-p_1,p_1],t=0)$$

Quindi la probabilità (rispetto a p) NON DIPENDE DAL tempo.

c) Quindi a $t=0$ ho un pacchetto d'onda con momenti distribuiti secondo



Per discutere la forma del pacchetto d'onda devo calcolare esplicitamente $\psi(x,t=0)$:

$$\psi(x,t=0) = \frac{1}{\sqrt{\hbar K_0}}\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int dp\, e^{ipx/\hbar}\, e^{-|p|/\hbar K_0} =$$

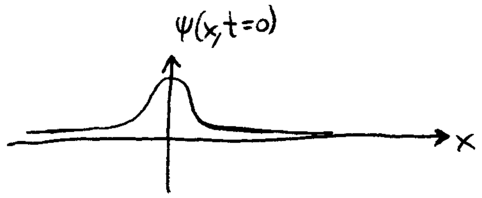
$$= \frac{1}{\hbar\sqrt{2\pi K_0}}\left\{\int_0^{+\infty} dp\, e^{ipx/\hbar}\, e^{-p/\hbar K_0} + \int_{-\infty}^{0} dp\, e^{ipx/\hbar}\, e^{p/\hbar K_0}\right\} =$$

$$= \frac{1}{\hbar\sqrt{2\pi K_0}}\left\{ \frac{e^{p\left(\frac{ix}{\hbar}-\frac{1}{\hbar K_0}\right)}}{\left(\frac{ix}{\hbar}-\frac{1}{\hbar K_0}\right)}\Bigg|_0^{+\infty} + \frac{e^{p\left(\frac{ix}{\hbar}+\frac{1}{\hbar K_0}\right)}}{\left(\frac{ix}{\hbar}+\frac{1}{\hbar K_0}\right)}\Bigg|_{-\infty}^{0} \right\} =$$

$$= \frac{1}{\hbar\sqrt{}}\left\{\frac{-1}{\left(\frac{ix}{\hbar}-\frac{1}{\hbar K_0}\right)} + \frac{1}{\left(\frac{ix}{\hbar}+\frac{1}{\hbar K_0}\right)}\right\} =$$

$$= \frac{K_0}{\sqrt{2\pi K_0}}\left\{\frac{-1}{ixK_0-1} + \frac{1}{ixK_0+1}\right\} =$$

$$= \frac{K_0}{\sqrt{2\pi K_0}}\,\frac{2}{1+(K_0x)^2}$$



Adesso calcolo $\Delta x \Delta p$ a $t=0$:

$$\langle p\rangle = \int dp\, p\, |\psi(p,t=0)|^2 = 0 \qquad \text{(funzione DISPARI)}$$

$$\langle p^2\rangle = \int dp\; p^2\; |\Psi(p,t=0)|^2 =$$

$$= \frac{1}{\hbar K_0}\int_{-\infty}^{+\infty} dp\; p^2\, e^{-2|p|/\hbar K_0} = \frac{2}{\hbar K_0}\int_0^{+\infty} dp\; p^2\, e^{-2p/\hbar K_0}$$

$$\int_0^{+\infty} dx\, x^n e^{-\alpha x} = \frac{n!}{\alpha^{n+1}}$$

$$= \frac{2}{\hbar K_0}\;\frac{2!}{(2/\hbar K_0)^3} = \frac{(\hbar K_0)^2}{2}$$

$$\langle x\rangle = \int dx\; x\; |\Psi(x,t=0)|^2 = \left(\frac{2K_0}{\sqrt{2\pi K_0}}\right)^2 \int dx\; x \left(\frac{1}{1+K_0^2x^2}\right)^2 = 0$$ (funz. DISPARI)

$$\langle x^2\rangle = \left(\frac{2K_0}{\sqrt{2\pi K_0}}\right)^2 \int dx\, \frac{x^2}{[1+K_0^2x^2]^2}$$

trucco: $\frac{x^2}{[1+\alpha^2x^2]^2} = \frac{-1}{2\alpha}\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{1}{1+\alpha^2x^2}\right)$

$$= \left(\frac{2K_0}{\sqrt{}}\right)^2\left(\frac{-1}{2K_0}\right)\int dx\; \frac{d}{dK_0}\left(\frac{1}{1+K_0^2x^2}\right) =$$

K_0 è un parametro rispetto alla variabile d'integrazione x

$$= \left(\frac{2K_0}{\sqrt{}}\right)^2\left(\frac{-1}{2K_0}\right)\frac{d}{dK_0}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+K_0^2x^2} =$$

$x = \frac{x'}{K_0}$

$$= \left(\frac{2K_0}{\sqrt{}}\right)^2\left(\frac{-1}{2K_0}\right)\frac{d}{dK_0}\int \frac{1}{K_0}\frac{dx'}{1+x'^2} =$$

$$= \left(\frac{2K_0}{\sqrt{}}\right)^2\left(\frac{-1}{2K_0}\right)\frac{d}{dK_0}\left(\frac{\pi}{K_0}\right) = \frac{4K_0^2}{2\pi K_0}\left(\frac{-1}{2K_0}\right)\left(\frac{-\pi}{K_0^2}\right) = \frac{1}{K_0^2}$$

Adesso ho tutto ciò che mi serve:

$$\Delta x \stackrel{\text{def.}}{=} \sqrt{\langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2} = \sqrt{1/K_0^2} = \frac{1}{K_0}$$

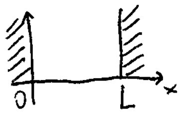
$$\Delta p \stackrel{\text{def.}}{=} \sqrt{\langle p^2\rangle - \langle p\rangle^2} = \sqrt{\frac{(\hbar K_0)^2}{2}} = \frac{\hbar K_0}{\sqrt{2}}$$

Quindi, a $t=0$,

$$\Delta x\,\Delta p = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}$$ (e, come deve essere, $\frac{\hbar}{\sqrt 2} > \frac{\hbar}{2}$)

L'evoluzione temporale porta ad uno sparpagliamento del pacchetto nello spazio delle x; la distribuzione di probabilità per p (e dunque anche Δp) sono costanti nel tempo.

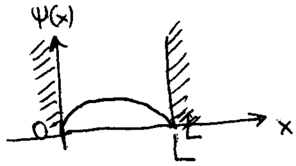
ES. 2-1

a) Se $V(x) =$  , sappiamo che le funzioni d'onda

per gli stati legati sono:

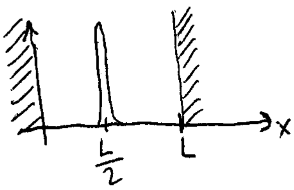
$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad , \quad E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2mL^2} \quad , \quad n = 1,2,3,\dots$$

le ground state si ha per $n=1$, quindi



$$E_0 = (\text{en. stato fondamentale}) = E_n\Big|_{n=1} = \frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}$$

Per comodità futura, notiamo che $\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\,\mathrm{sen}(K_n x)$, $K_n = n\frac{\pi}{L}$.

b) Adesso $V(x) =$  , cioè abbiamo aggiunto $\lambda\delta(x-\frac{L}{2})$, $\lambda>0$

Chiamiamo ψ il nuovo ground state; le condizioni che deve soddisfare sono:

i) $\psi(0) = 0$
ii) $\psi(L) = 0$
iii) continuità.

La presenza della δ di Dirac aggiunge la seguente condizione (integrare eq. Schr. stati stazionari su $(\frac{L}{2}-\varepsilon, \frac{L}{2}+\varepsilon)$ e prendere limite $\varepsilon\to 0$)

iv) $\Delta\psi'(\frac{L}{2}) \overset{\text{def}}{=} \psi'(\frac{L}{2}_+) - \psi'(\frac{L}{2}_-) = +\frac{2m}{\hbar^2}\lambda\psi(\frac{L}{2})$

Poniamo $E = \frac{(\hbar k)^2}{2m}$, $E>0$ $\Rightarrow$ $k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar^2}$, $k>0$

e definiamo, in completa generalità,

$$\psi = \begin{cases} \psi_2 = A\,\mathrm{sen}\,kx & 0 \le x \le \frac{L}{2} \\ \psi_1 = B\,\mathrm{sen}(k(x-L)) & \frac{L}{2} \le x \le L \end{cases}$$

Questa ψ è t.c. $\frac{-\hbar^2}{2m}\psi'' = E\psi$ per $x \neq \frac{L}{2}$

e rispetta i) e ii), cioè $\psi(0)=0$ e $\psi(L)=0$

Imponendo continuità e la iv) si ottiene:

$$\begin{cases} iii) \\ iv) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \psi_1\left(\frac{L}{2}\right) = \psi_2\left(\frac{L}{2}\right) \\ \psi_1'\left(\frac{L}{2}\right) - \psi_2'\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{2m\lambda}{\hbar^2}\,\psi\left(\frac{L}{2}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -B \\ BK\cos\left(\frac{KL}{2}\right) - AK\cos\left(\frac{KL}{2}\right) = \frac{2m\lambda}{\hbar^2} A \operatorname{sen}\left(\frac{KL}{2}\right) \end{cases}$$

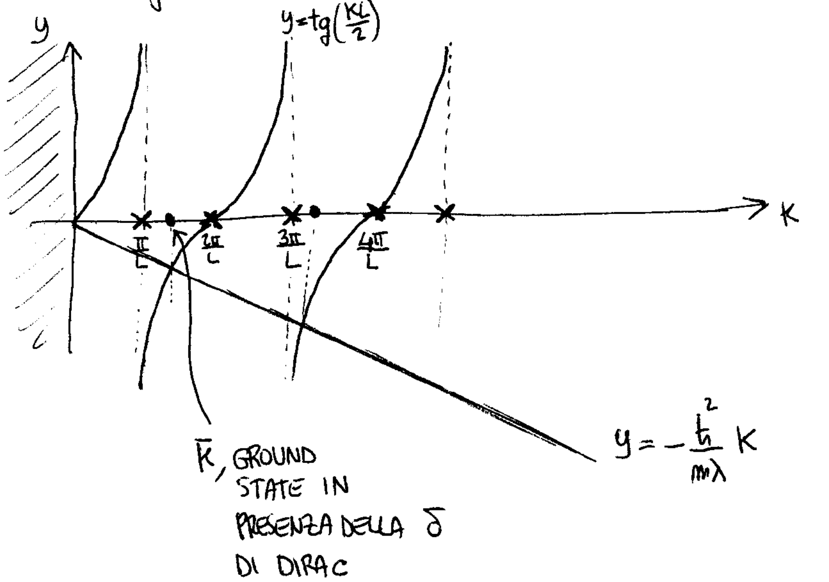
Quindi la condizione su K per avere stati legati è:

$$2K\cos\left(\frac{KL}{2}\right) = -\frac{2m\lambda}{\hbar^2}\operatorname{sen}\left(\frac{KL}{2}\right)$$

cioè:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{KL}{2}\right) = -\frac{\hbar^2}{m\lambda} K$$

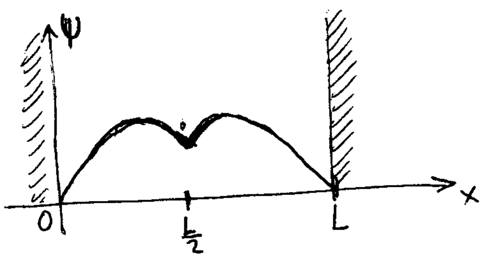
Risolviamo graficamente, ricordando che $K>0$



× = stati legati senza δ Dirac
• = stati legati con δ Dirac

Quindi: $\bar{E}_0 = \frac{(\hbar\bar{K})^2}{2m}$, $\frac{\pi}{L} \le \bar{K} \le \frac{2\pi}{L}$ $\quad (\Rightarrow \bar{E}_0 \geq E_0)$

Ground state: $\psi = \begin{cases} A \operatorname{sen}(\bar{K}x) \\ -A \operatorname{sen}(\bar{K}(x-L)) \end{cases}$



c) Nel limite $\lambda \to \infty$, la retta $y = -\frac{\hbar^2}{m\lambda}K$ coincide con l'asse x.

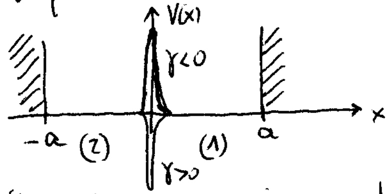
Quindi $\bar{K} \xrightarrow[\lambda\to\infty]{} \frac{2\pi}{L}$, ovvero: $\bar{E}_0 \xrightarrow[\lambda\to\infty]{} 4\frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}$.

Quindi $\frac{\bar{E}_0}{E_0} \xrightarrow[\lambda\to\infty]{} 4$

ES. 2-2

(1) Soluzione generale dell'eq. di S. per il potenziale

$$V(x) = \begin{cases} +\infty & x \leq -a \\ -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\gamma}{a}\,\delta(x) & -a < x < a \\ +\infty & x \geq a \end{cases}$$



Senza perdere generalità, essendo il potenziale simmetrico rispetto all'origine, studiamo separatamente soluzioni pari e dispari.

Infatti, se potenziale simmetrico per $x \to -x$, allora le autofunzioni hanno parità definita, cioè sono o pari o dispari.

a) soluzioni pari, $E>0$ $\qquad [\psi_1(-x) = \psi_2(x)]$

$E = \frac{(\hbar k)^2}{2m}$, $E>0$, $k>0$

$$\begin{cases} \psi_1 = A e^{ikx} + B e^{-ikx} \\ \psi_2 = A e^{-ikx} + B e^{ikx} \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \psi_1' = ik\left(A e^{ikx} - B e^{-ikx}\right) \\ \psi_2' = ik\left(-A e^{-ikx} + B e^{ikx}\right) \end{array}$$

annullamento ai bordi : $\psi_1(a) = 0 \quad \Rightarrow \boxed{A e^{ika} + B e^{-ika} = 0}$

potenziale delta fornisce : $\psi_1'(0) - \psi_2'(0) = -\frac{\gamma}{a}\psi(0) \Rightarrow ik(A-B) - ik(B-A) = -\frac{\gamma}{a}(A+B)$

$$\Rightarrow \boxed{A\left(2ik + \frac{\gamma}{a}\right) + B\left(-2ik + \frac{\gamma}{a}\right) = 0}$$

Dalle 2 eq. evidenziate segue :

$$\begin{pmatrix} e^{ika} & e^{-ika} \\ 2ik + \frac{\gamma}{a} & -2ik + \frac{\gamma}{a} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = 0$$

che ha soluzione NON BANALE $(A=B=0)$ se det $=0$, cioè otteniamo la seguente condizione:

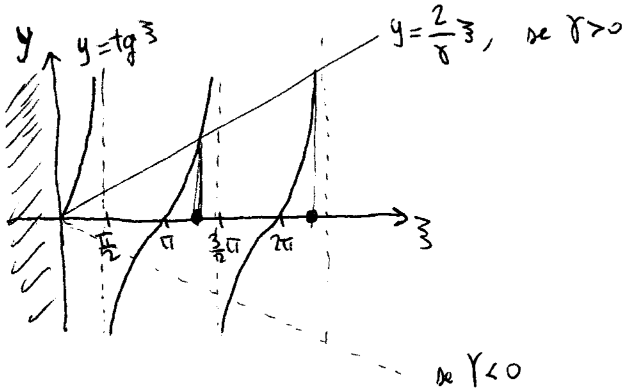
$$e^{ika}\left(-2ik + \frac{\gamma}{a}\right) - e^{-ika}\left(2ik + \frac{\gamma}{a}\right) = 0$$

$$\frac{\gamma}{a} \cdot 2i \operatorname{sen} ka - 2ik \cdot 2\cos ka = 0$$

$$\operatorname{tg} ka = \frac{2}{\gamma} ka$$

cioè, definendo $ka = \xi$ $(>0) \Rightarrow$

$$\boxed{\operatorname{tg}\xi = \frac{2}{\gamma}\xi} \quad (i)$$



NB $K=0$ non è accettabile perché sarebbe la soluzione identicamente nulla (costante + annullamento ai bordi)

Dopo lo spettro, cerco le autofunzioni:

$$A e^{ika} + B e^{-ika} = 0 \quad \Rightarrow B = -A e^{2ika}$$

Quindi:

$$\boxed{\psi_1(x) = A\left(e^{ikx} - e^{2ika} e^{-ikx}\right) =}$$

$$= A e^{ika}\left(e^{ik(x-a)} - e^{ik(a-x)}\right) =$$

$$= A e^{ika} (2i) \, \mathrm{sen}[k(x-a)] =$$

$$\boxed{= N \, \mathrm{sen}[k(x-a)]}$$

$$\Rightarrow \psi_1(x) = N \, \mathrm{sen}(k(x-a)) = N\left(\mathrm{sen}\,kx \cos ka - \cos kx \, \mathrm{sen}\,ka\right) =$$

$$= N \cos(ka)\left[\mathrm{sen}\,kx - \mathrm{tg}\,ka \cos kx\right] =$$

$$= N_1\left(\mathrm{sen}\,kx - \frac{2}{\gamma} ka \cos kx\right) \qquad \text{(ii)}$$

$$\boxed{\psi_2(x) = \psi_1(-x) = N \, \mathrm{sen}[k(-x-a)]}$$

$$\Rightarrow \psi_2(x) = N_1\left(-\mathrm{sen}\,kx - \frac{2}{\gamma} ka \cos kx\right)$$

NB Verifico che $\psi_1'(0) - \psi_2'(0) = -\frac{\gamma}{a}\psi(0)$:

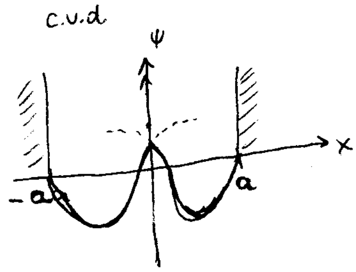
$$\psi_1'(0) = N_1 k\left(\cos kx + \frac{2}{\gamma} ka \, \mathrm{sen}\,kx\right)\Big|_{x=0} = N_1 k$$

$$\psi_2'(0) = \;\text{-----}\; = -N_1 k$$

$$\psi(0) = N_1\left(\frac{-2ka}{\gamma}\right)$$

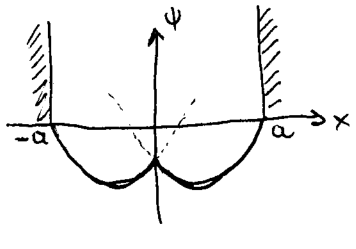
$$\Rightarrow \psi_1'(0) - \psi_2'(0) = 2N_1 k = -\frac{\gamma}{a}\psi(0)$$

c.v.d



Forma delle autofunzioni (assumendo $N>0$ come riferimento)

$$\gamma > 0 \Rightarrow \xi > \pi \Rightarrow k > \frac{\pi}{a} \Rightarrow \begin{cases} \psi(0) = -N \, \mathrm{sen}\,ka > 0 \\ T = \frac{2\pi}{k} < 2a \end{cases}$$



$$\gamma < 0 \Rightarrow \frac{\pi}{2} < \xi < \pi \Rightarrow \frac{\pi}{2a} < k < \frac{\pi}{a} \Rightarrow \begin{cases} \psi(0) = -N \, \mathrm{sen}\,ka \\ 2a < T < 4a \end{cases}$$

NB Metodo alternativo:

generalmente si pone $\begin{cases} \psi_1 = A \operatorname{sen} kx + B \cos kx \\ \psi_2 = -A \operatorname{sen} kx + B \cos kx \end{cases}$ (pari) $(*)$

questo si può anche scrivere nel modo seguente:

$$\begin{cases} \psi_1 = N \operatorname{sen}(kx+\varphi) \\ \psi_2 = N \operatorname{sen}(-kx+\varphi) \end{cases} \quad (**).$$

infatti, ad es. per ψ_1: $N \operatorname{sen}(kx+\varphi) = N(\operatorname{sen} kx \cos\varphi + \cos kx \operatorname{sen}\varphi) \overset{\text{deve}}{=} A \operatorname{sen} kx + B \cos kx$

$N\cos\varphi[\operatorname{sen} kx + \operatorname{tg}\varphi \cos kx] = A\left[\operatorname{sen} kx + \frac{B}{A}\cos kx\right]$

quindi basta scegliere $\boxed{\operatorname{tg}\varphi = \frac{B}{A}}$ (iii)

Questo dimostra che si potrebbe partire da $(**)$ anziché da $(*)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \psi_1 = N \operatorname{sen}(kx+\varphi) \\ \psi_2 = N \operatorname{sen}(-kx+\varphi) \end{cases} \qquad \begin{aligned} \psi_1' &= Nk \cos(kx+\varphi) \\ \psi_2' &= -Nk\cos(-kx+\varphi) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

annullamento ai bordi: $\psi_1(a) = 0 \quad \Rightarrow \operatorname{sen}(ka+\varphi) = 0$

$\Rightarrow \operatorname{sen} ka \cos\varphi + \cos ka \operatorname{sen}\varphi = 0$

$\Rightarrow \boxed{\operatorname{tg} ka = -\operatorname{tg}\varphi}$

potenziale delta-forme: $\psi_1'(0) - \psi_2'(0) = -\frac{\gamma}{a}\psi(0) \quad \Rightarrow 2Nk\cos\varphi = -\frac{\gamma}{a} N \operatorname{sen}\varphi$

$\Rightarrow \boxed{\operatorname{tg}\varphi = -\frac{2ak}{\gamma}}$ (iv)

Dalle 2 eq. evidenziate segue l'equaz. per lo spettro degli autovalori:

$\operatorname{tg} ka = \frac{2}{\gamma} ka$ [come per il 1° metodo, eq. (i)]

L'uguaglianza dei 2 risultati è completamente provata se verifichiamo che

$$\operatorname{tg}\varphi \overset{(iii)}{=} \frac{B}{A}$$

2° metodo $\downarrow$ $-\frac{2ak}{\gamma}$ [eq. (iv)]

1° metodo $\to \frac{\text{coeff. coseno}}{\text{coeff. seno}} = -\frac{2}{\gamma} ka$ [eq. (ii)]

b) soluzioni pari, $E<0$ $\quad [\psi_1(x) = \psi_2(x)]$

$E = -\frac{(\hbar k)^2}{2m}$, $E<0$, $k>0$

$$\begin{cases} \psi_1 = Ae^{kx} + Be^{-kx} \\ \psi_2 = Ae^{-kx} + Be^{kx} \end{cases} \qquad \begin{aligned} \psi_1' &= k(Ae^{kx} - Be^{-kx}) \\ \psi_2' &= k(-Ae^{-kx} + Be^{kx}) \end{aligned}$$

annullamento ai bordi: $\psi_1(a)=0 \Rightarrow \boxed{Ae^{ka}+Be^{-ka}=0}$

potenz. deltiforme: $\psi_1'(0)-\psi_2'(0) = -\frac{\gamma}{a}\psi(0) \Rightarrow k(A-B) - k(-A+B) = -\frac{\gamma}{a}(A+B)$

$$\Rightarrow \boxed{A\left(2k+\frac{\gamma}{a}\right) + B\left(-2k+\frac{\gamma}{a}\right)=0}$$

Dalle 2 eq. evidenziate, segue

$$\begin{pmatrix} e^{ka} & e^{-ka} \\ 2k+\frac{\gamma}{a} & -2k+\frac{\gamma}{a} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = 0$$

$\Rightarrow$ soluz. non banale se det $=0$, cioè

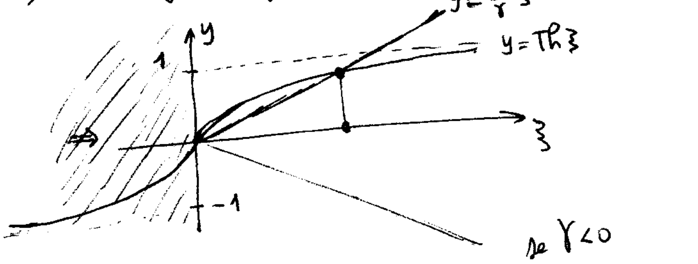
$$e^{ka}\left(-2k+\frac{\gamma}{a}\right) - e^{-ka}\left(2k+\frac{\gamma}{a}\right)=0$$

$$\frac{\gamma}{a}\left(e^{ka}-e^{-ka}\right) - 2k\left(e^{ka}+e^{-ka}\right)=0$$

$$\mathrm{Th}\, ka = \frac{2ka}{\gamma}$$

cioè, se $ka = \xi$ (>0), l'eq. per gli autovalori si risolve graficamente:

$\boxed{\mathrm{Th}\,\xi = \frac{2}{\gamma}\xi}$ $\Rightarrow$



Quindi, se c'è soluzione, è una soltanto. Le condizioni sono:

$$\begin{cases} \gamma>0 \\ \left.\frac{d}{d\xi}\mathrm{Th}\,\xi\right|_{\xi=0} > \left.\frac{d}{d\xi}\frac{2}{\gamma}\xi\right|_{\xi=0} \end{cases} \quad \begin{cases} \gamma>0 \\ \left.\frac{1}{\mathrm{ch}^2\xi}\right|_{\xi=0} > \frac{2}{\gamma} \end{cases} \quad \begin{cases} \gamma>0 \\ \gamma>2 \end{cases}$$

Quindi c'è soluzione solo se $\boxed{\gamma>2}$

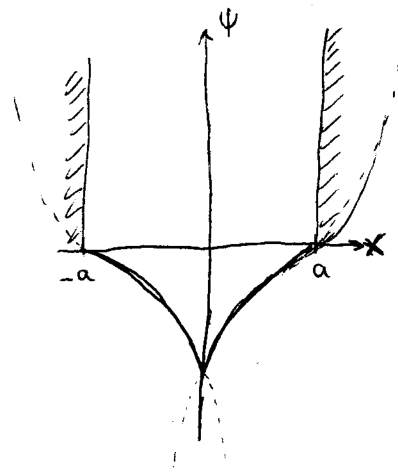
Adesso trovo esplicitamente le autofunzioni:

$B = -Ae^{2ka}$

Quindi

$$\boxed{\psi_1(x)} = A\left(e^{kx} - e^{2ka}e^{-kx}\right) = Ae^{ka}\left(e^{k(x-a)} - e^{-k(x-a)}\right) = N\,\boxed{\mathrm{sh}[k(x-a)]}$$

$\Rightarrow$



$$\boxed{\psi_2(x) = -N\,\mathrm{sh}[k(x+a)]}$$

c) soluzioni dispari, $E>0$ $[\psi_1(-x) = -\psi_2(x)]$

$E = \frac{(\hbar k)^2}{2m}$, $E>0$, $k>0$

$$\begin{cases} \psi_1 = A e^{ikx} + B e^{-ikx} \\ \psi_2 = -(A e^{-ikx} + B e^{ikx}) \end{cases} \qquad \begin{aligned} \psi_1' &= ik(A e^{ikx} - B e^{-ikx}) \\ \psi_2' &= ik(A e^{-ikx} - B e^{ikx}) \end{aligned}$$

dispari $\Rightarrow \begin{cases} \psi_1(0) = 0 \\ \psi_2(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow A+B=0$

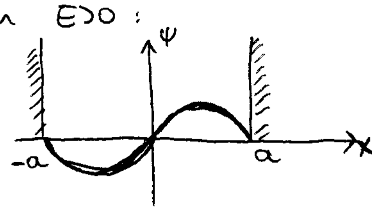
$$\Rightarrow \begin{cases} \psi_1 = A_1 \operatorname{sen} kx \\ \psi_2 = A_2 \operatorname{sen} kx \end{cases} \qquad \begin{aligned} \psi_1' &= A_1 k \cos kx \\ \psi_2' &= A_2 k \cos kx \end{aligned}$$

annullamento ai bordi: $ka = n\pi \Rightarrow \boxed{k = \frac{n\pi}{a}}$

potenziale delta forma: $\psi_1'(0) - \psi_2'(0) = -\frac{\gamma}{a}\psi(0) \Rightarrow k(A_1 - A_2) = 0 \Rightarrow \boxed{A_1 = A_2}$

Quindi le autofunzioni dispari della buca senza la δ sono anche autofunzioni x questo caso, con $E>0$:

$\boxed{\psi_n(x) = N \operatorname{sen}(k_n x)}$, $k_n = \frac{n\pi}{a}$, $E_n = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2ma^2}$



d) soluzioni dispari, $E<0$ $[\psi_1(-x) = -\psi_2(x)]$

$k \to ik$, tenendo $k>0 \Rightarrow E = -\frac{(\hbar k)^2}{2m}$

$$\begin{cases} \psi_1(x) = A e^{-kx} + B e^{kx} \\ \psi_2(x) = -A e^{kx} - B e^{-kx} \end{cases}$$

dispari $\Rightarrow \begin{cases} \psi_1(0) = 0 \\ \psi_2(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow A+B=0$

$\Rightarrow \psi(x) = N \operatorname{sh}(kx)$

annullamento ai bordi $\Rightarrow \psi(a) = 0 \Rightarrow \operatorname{sh} ka = 0 \Rightarrow k=0$

$\Rightarrow$ **NON C'È SOLUZIONE**

e) $E=0$ (ultimo caso da analizzare)

eq. Schroed.: $-\frac{\hbar^2}{2m}\psi'' - \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\gamma}{a}\delta(x)\psi = 0$ $\Rightarrow$ lontano da $x=0$, la soluzione è $\psi(x) = A + Bx$

caso pari
$$\begin{cases} \psi_1 = A + Bx \\ \psi_2 = A - Bx \end{cases} \qquad \begin{matrix} \psi_1' = B \\ \psi_2' = -B \end{matrix}$$

annullam. ai bordi : $\psi_1(a) = 0 \Rightarrow A + Ba = 0 \Rightarrow B = \frac{-A}{a}$

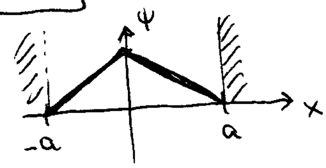
$$\Rightarrow \begin{cases} \psi_1 = A\left(1 - \frac{x}{a}\right) \\ \psi_2 = A\left(1 + \frac{x}{a}\right) \end{cases} \qquad \begin{matrix} \psi_1' = -\frac{A}{a} \\ \psi_2' = \frac{A}{a} \end{matrix}$$

pot. delta/funzione : $\psi_1'(0) - \psi_2'(0) = -\frac{\gamma}{a}\psi(0) \Rightarrow \frac{-A}{a} - \frac{A}{a} = -\frac{\gamma}{a}A$

$$\Rightarrow \boxed{\gamma = 2}$$

Quindi c'è soluzione solo se $\boxed{\gamma = 2}$ e si ha

$$\psi(x) = \mathcal{N}\left(1 - \frac{|x|}{a}\right)$$



caso dispari
$$\begin{cases} \psi_1 = A + Bx \\ \psi_2 = -A + Bx \end{cases}$$

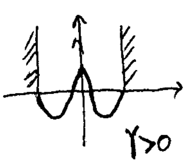
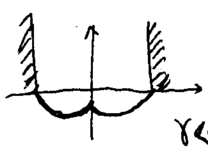
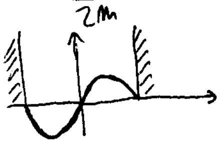
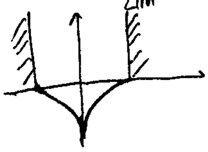
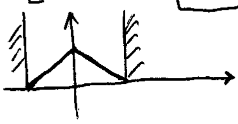
dispari $\Rightarrow \psi_1(0) = \psi_2(0) = 0 \Rightarrow A = 0$

$\Rightarrow \psi = Bx$

annullamento ai bordi $\Rightarrow \psi(a) = 0 \Rightarrow B = 0$

$\Rightarrow$ NON C'È SOLUZIONE

RIASSUNTO :

	pari	dispari
$E>0$	$E = \frac{(\hbar k)^2}{2m}$, $\mathrm{tg}\, ka = \frac{2}{\gamma} ka$  $\gamma>0$  $\gamma<0$	$E = \frac{(\hbar k)^2}{2m}$, $k = n\frac{\pi}{a}$ 
$E<0$	$E = -\frac{(\hbar k)^2}{2m}$, $\mathrm{Th}\, ka = \frac{2}{\gamma} ka$ $\boxed{\gamma>2}$ 	NO
$E=0$	$E=0$ $\boxed{\gamma=2}$ 	NO

(2) Valore di γ per cui il ground state ha $E=0$.

Devo trovare condizione t.c. NON ci STANO SOLUZIONI con $E<0$.
Quindi, poiché $E<0$ corrisponde solo a autof. pari, si ha

$\boxed{\gamma < 2}$ $\Rightarrow$ NO soluzioni con $E<0$

Per avere che ground state sia proprio con $E=0$, allora devo porre

$\boxed{\gamma = 2}$ $\Rightarrow$ una soluzione con $E=0$

Quindi la condizione è $\boxed{\gamma=2}$. La autof. normalizzata è

$$\psi_0(x) = N\left(1-\frac{|x|}{a}\right)$$

Trovo N: $$1 \overset{\text{deve}}{=} \int_{-a}^{a} dx\, |\psi_0(x)|^2 = |N|^2\, 2\int_0^a \left(1-\frac{x}{a}\right)^2 dx =$$

$$= 2|N|^2 \int_0^a dx \left(1+\frac{x^2}{a^2}-\frac{2x}{a}\right) =$$

$$= 2|N|^2\left[a+\frac{a}{3}-a\right]$$

$$\Rightarrow N = \sqrt{\frac{3}{2a}}$$

$$\boxed{\psi_0(x) = \sqrt{\frac{3}{2a}}\left[1-\frac{|x|}{a}\right]}$$

(3) Evoluto temporale di $\psi(x,t=0) = N\left(1-\frac{|x|}{a} + \operatorname{sen}\frac{\pi x}{a}\right)$

decompongo ψ su autostati di $\hat{H}$:

$$\psi_0(x) = \sqrt{\frac{3}{2a}}\left[1-\frac{|x|}{a}\right]$$

$$\psi_n^{DISP}(x) = \psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{a}}\operatorname{sen}(k_n x) \qquad k_n = n\frac{\pi}{a}, \quad n=1,2,\dots \qquad E_n = \frac{(k_n\hbar)^2}{2m} = \hbar\omega_n$$

Quindi:

$$\psi(x,t=0) = N\left[\sqrt{\frac{2a}{3}}\,\psi_0(x) + \sqrt{a}\,\psi_1(x)\right]$$

$$\psi(x,t) = N\left[\sqrt{\frac{2a}{3}}\,\psi_0(x) + \sqrt{a}\,e^{-iE_1t/\hbar}\,\psi_1(x)\right]$$

Per tornare nello stato iniziale:

$$\frac{E_1 t}{\hbar} = 2\pi \ell \qquad \ell = 1, 2, \dots$$

cioè $t = \ell \dfrac{2\pi\hbar}{E_1} = \ell \dfrac{2\pi\hbar \cdot 2ma^2}{\hbar^2 \pi^2}$

$$\Rightarrow \boxed{t = \left(\frac{4ma^2}{\pi\hbar}\right) \cdot \ell} \qquad \ell = 1, 2, \dots$$

Troviamo distrib. di probabilità per H:

$$|\psi(t)\rangle = N\left[\sqrt{\tfrac{2a}{3}}\,|0\rangle + \sqrt{a}\, e^{-i\omega_1 t}\,|E_1\rangle\right] \qquad \text{con } |\,\rangle = |E\rangle$$

È uno sviluppo in autof. normalizzate, quindi:

$$|N|^2 \cdot \left(\frac{2a}{3} + a\right) \overset{\text{deve}}{=} 1 \qquad \Rightarrow N = \sqrt{\frac{3}{5a}}$$

$$\text{Prob}\,(E=0, t) = |\langle 0|\psi(t)\rangle|^2 = |N|^2 \frac{2a}{3} = \frac{2}{5}$$

$$\text{Prob}\,(E=E_1, t) = |\langle E_1|\psi(t)\rangle|^2 = |N|^2 a = \frac{3}{5}$$

Valore d'aspettazione di H: $\langle H\rangle(t)$

<u>modo 1</u> $\langle H\rangle(t) = \langle\psi(t)|\hat{H}|\psi(t)\rangle =$

$$= |N|^2 \left[\sqrt{\tfrac{2a}{3}}\langle 0| + \sqrt{a}\, e^{i\omega_1 t}\langle E_1|\right] \hat{H} \left[\sqrt{\tfrac{2a}{3}}|0\rangle + \sqrt{a}\, e^{-i\omega_1 t}|E_1\rangle\right]$$

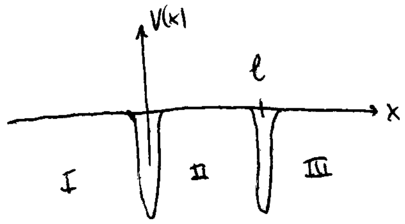
$$= |N|^2 \left[\sqrt{\tfrac{2a}{3}}\langle 0| + \sqrt{a}\, e^{i\omega_1 t}\langle E_1|\right]\left[\sqrt{a}\, E_1\, e^{-i\omega_1 t}|E_1\rangle\right] =$$

$$= |N|^2 a E_1 = \frac{3}{5}\hbar\omega_1$$

<u>modo 2</u> $\langle H\rangle(t) = \sum_E \text{Prob}\,(E, t) \cdot E =$

$$= \frac{2}{5} \cdot 0 + \frac{3}{5} \cdot E_1 = \frac{3}{5}\hbar\omega_1$$

$V(x) = -\alpha\,\delta(x) - \alpha\,\delta(x-\ell)$, $\alpha>0$



Calcolare stati legati, quanti sono, discutere le loro simmetrie e l'energia in funzione di ℓ.

Considerazioni generali: Per $\ell \gg 1$ sono come 2 δ dell'esercizio precedente, cioè per ognuna c'è un solo bound state.

Quindi mi aspetto 2 stati legati.

CLASSICAMENTE: 2 stati DEGENERI, con stessa energia (particella sta o a SX o a DX)

MQ: non sono degeneri (in MQ il moto 1-dim. è NON DEGENERE)

stati legati $\Rightarrow$ $E = \dfrac{-\hbar^2\rho^2}{2m}$, $\rho>0$

eq. Schroedinger lontano dalle δ: $\psi'' = \rho^2\psi \Rightarrow e^{\pm\rho x}$

Al solito incollo soluzioni di tipo $e^{\pm\rho x}$ con le seguenti condizioni:

$$\begin{cases} \Delta\psi'(0) = -\dfrac{2m\alpha}{\hbar^2}\psi(0) \\ \Delta\psi'(\ell) = -\dfrac{2m\alpha}{\hbar^2}\psi(\ell) \qquad (*) \\ \text{continuità I-II e II-III} \\ \psi \to 0 \text{ se } x\to\pm\infty \end{cases}$$

$$\begin{cases} \psi_I = A e^{\rho x} & [\psi_I \to 0 \text{ se } x\to-\infty] \\ \psi_{II} = C_1 e^{\rho x} + C_2 e^{-\rho x} \\ \psi_{III} = B e^{-\rho x} & [\psi_{III} \to 0 \text{ se } x\to+\infty] \end{cases}$$

le condizioni (*) corrispondono al seguente sistema lineare:

$$
\begin{array}{ll}
\text{I-II} & A = C_1 + C_2 \qquad 1)\\
\text{II-III} & C_1 e^{\rho \ell} + C_2 e^{-\rho \ell} = B e^{-\rho \ell} \qquad 2)\\
\Delta\psi'(0) & \rho (C_1 - C_2 - A) = -\frac{2m\alpha}{\hbar^2} A \qquad 3)\\
\Delta\psi'(\ell) & -B\rho e^{-\rho \ell} - \rho (C_1 e^{\rho \ell} - C_2 e^{-\rho \ell}) = -\frac{2m\alpha}{\hbar^2} B e^{-\rho \ell} \qquad 4)
\end{array}
$$

che ha come soluzione:

$$
\begin{cases} B = \mp A e^{\rho \ell} \\ C_2 = \mp C_1 e^{\rho \ell} \end{cases} \qquad \text{con la condizione} \qquad e^{-2\rho \ell} = \left(\frac{\mu - 2\rho}{\mu}\right)^2 , \quad \mu = \frac{2m\alpha}{\hbar^2}
$$

dim 1) e 3) $\quad -2\rho C_2 = -\mu (C_1 + C_2) \Rightarrow C_2 = -C_1 \frac{\mu}{\mu - 2\rho}$ (*)

$$A = C_1 + C_2 = -C_1 \frac{2\rho}{\mu - 2\rho} \qquad (**)$$

2) $\quad B = C_2 + C_1 e^{2\rho \ell}$ (***)

precedente e 4) $\quad -\rho (C_2 + C_1 e^{2\rho \ell}) e^{-\rho \ell} - \rho (C_1 e^{\rho \ell} - C_2 e^{-\rho \ell}) = -\mu (C_2 + C_1 e^{2\rho \ell}) e^{-\rho \ell}$

da cui, combinando:

$$-2\rho C_1 e^{\rho \ell} = -\mu (C_2 e^{-\rho \ell} + C_1 e^{\rho \ell})$$

$$-2\rho = -\mu \left(1 + \frac{C_2}{C_1} e^{-2\rho \ell}\right)$$

$$-2\rho = -\mu \left(1 - \frac{\mu}{\mu - 2\rho} e^{-2\rho \ell}\right) \Rightarrow \boxed{e^{-2\rho \ell} = \left(\frac{\mu - 2\rho}{\mu}\right)^2}$$

La condizione opportunamente equivale a: $\pm e^{\rho \ell} = \frac{\mu}{\mu - 2\rho}$ o anche $\mp e^{-\rho \ell} = -\left(\frac{\mu - 2\rho}{\mu}\right)$

Dalla (*): $\boxed{C_2 = -C_1 \frac{\mu}{\mu - 2\rho} = \mp C_1 e^{\rho \ell}}$

Dalla (***): $B e^{-2\rho \ell} = C_1 + C_2 e^{-2\rho \ell} = C_1 \left[1 + \frac{C_2}{C_1} e^{-2\rho \ell}\right] = C_1 \left[1 \mp e^{-\rho \ell}\right] \overset{(**)}{=}$

$$= \left[1 \mp e^{-\rho \ell}\right] A \left(\frac{\mu - 2\rho}{-2\rho}\right) = A \left[1 - \left(\frac{\mu - 2\rho}{\mu}\right)\right] \left(\frac{\mu - 2\rho}{-2\rho}\right) =$$

$$= A \left(\frac{\mu - 2\rho}{-\mu}\right) = \mp A e^{-\rho \ell}$$

$$\Rightarrow \boxed{B = \mp A e^{\rho \ell}}$$

Quindi il sistema ha 2 soluzioni:

la relazione tra i parametri x avere stati legati è

$$\boxed{e^{-2\rho l} = \left(\frac{\mu-2\rho}{\mu}\right)^2} \quad (*)$$

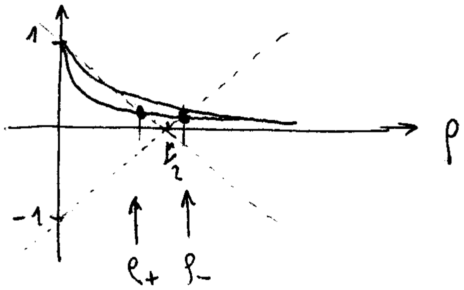
e, + in particolare:

$$e^{-\rho l} = +\left(1-\frac{2\rho}{\mu}\right) \Rightarrow \begin{cases} C_2 = -C_1 e^{\rho l} \\ B = -A e^{\rho l} \end{cases}$$ [segno sopra]

$$e^{-\rho l} = -\left(1-\frac{2\rho}{\mu}\right) \Rightarrow \begin{cases} C_2 = +C_1 e^{\rho l} \\ B = +A e^{\rho l} \end{cases}$$ [segno sotto]

Soluzioni di (*) [sempre mantenendo segni 'sopra' e 'sotto' distinti]

$$e^{-\rho l} = \pm\left(1-\frac{2\rho}{\mu}\right)$$



⇒ ∀ valore dei parametri, 1 soluzione c'è sempre e corrisponde a $-\left(1-\frac{2\rho}{\mu}\right)$

Abbiamo due soluzioni se

$$\left.\frac{d}{d\rho}\left(e^{-\rho l}\right)\right|_{\rho=0} < \left.\frac{d}{d\rho}\left(1-\frac{2\rho}{\mu}\right)\right|_{\rho=0}$$

cioè $l > \frac{2}{\mu}$

Quindi: se $l < \frac{2}{\mu}$ ⇒ 1 solo bound state, con $\rho = \rho_- > \frac{\mu}{2}$

se $l > \frac{2}{\mu}$ ⇒ 2 bound state: $\rho = \rho_- > \mu/2$, $\rho = \rho_+ < \mu/2$

Quindi abbiamo

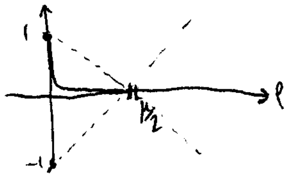
$$E_- = -\frac{\hbar^2}{2m}\rho_-^2$$

$$E_+ = -\frac{\hbar^2}{2m}\rho_+^2$$

$$E_- < E_+ < 0$$

Discutiamo l'energia in funzione di ℓ:

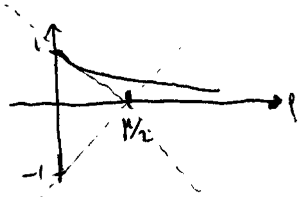
$\ell \to \infty$



2 soluzioni coincidenti: $0 = \pm\left(1-\frac{2\rho}{\mu}\right) \Rightarrow \rho_+ = \rho_- = \mu/2$

$$\Rightarrow E_+^A = E_-^A = \frac{-\hbar^2}{2m}\left(\frac{\mu}{2}\right)^2$$

$\ell = \frac{2}{\mu}$



$\rho_+ \to 0$

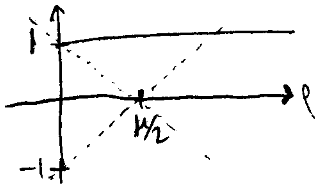
$\rho_- > \mu/2$

$\Rightarrow E_+^B \to 0$

E_-^B ha un valore $< E_-^A$

[CASO LIMITE X AVERE 2 SOLUZIONI]

$\ell \to 0$

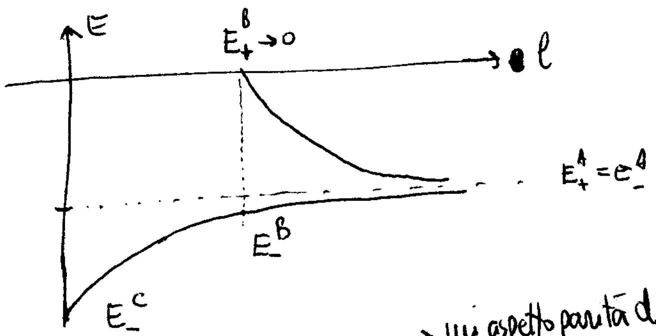


$\rho_+ = 0$ NON ACCETTABILE $\left(\int |\psi|^2 = +\infty\right)$

$\rho_- > \mu/2$

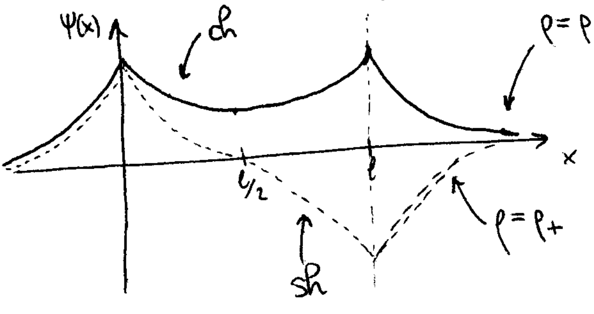
$\Rightarrow E_-^C$ ha un valore $< E_-^B$

Quindi abbiamo ottenuto

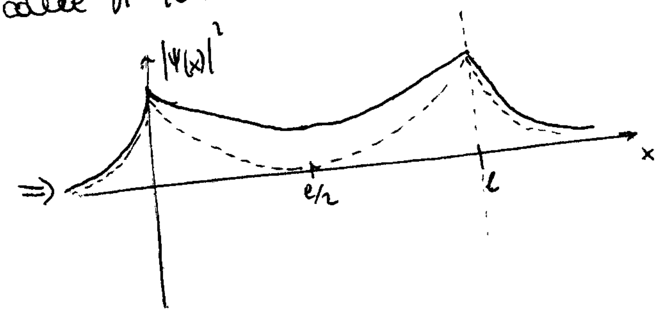


mi aspetto parità definita rispetto a $x=\frac{\ell}{2}$, x il potenziale è pari

Simmetria delle autofunzioni: guardando come si modellano A, B, C_1 e C_2



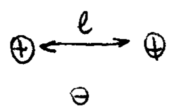
$\Rightarrow$



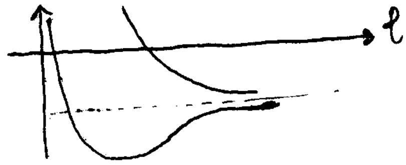
Soluzione corrispondente ad E_- [stato fondamentale] $\Rightarrow \psi_-$ SIMMETRICA RISPETTO A $x=\frac{\ell}{2}$

" " " E_+ [stato eccitato, quando esiste] $\Rightarrow \psi_+$ ANTISIMMETRICA RISPETTO A $x=\frac{\ell}{2}$

Commento finale: approssimo di avere H_2^+ [molecola diatomica ionizzata]



- in prima approx, modellizzo l'attraz. coulombiana come 2 delta [buche]
- poi stimo repulsione dei due protoni come pot. coulombiano
- possiamo stimare l'energia del sistema come somma della E trovata e della repulsione coulombiana $\Rightarrow$



$\Rightarrow$ CI ASPETTIAMO UN ℓ X CUI IL SISTEMA SIA STABILE, CIOÈ UNO STATO DI EQUILIBRIO