4ª lezione

ES. 4-1

Particella di massa m in una buca monodimensionale con pareti impenetrabili: $V(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0,a] \\ +\infty & x \notin [0,a] \end{cases}$

Supponiamo di essere nel ground state.
Se istantaneamente la buca raddoppia, cioè $a \mapsto 2a$, qual'è la probabilità di essere nel 1° stato eccitato del nuovo sistema, cioè calcolare

$Prob(\psi \mapsto \tilde{\varphi}_2)$, dove $\{\tilde{\varphi}_m(x)\}$ sono autostati per buca di lunghezza $2a$

ES. 4-2

C.T. A_{III}, parte 2 (pag. 274)

Sempre buca 1-dim di dimensione $[0,a]$.
Se al tempo $t=0$ si ha $\psi(x,t=0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\varphi_1(x) + \varphi_2(x)\right)$

a) Calcolare $\psi(x,t)$ e $Prob(H;t)$

b) Calcolare $\langle H\rangle(t)$ e $\langle x\rangle(t)$

ES. 4-3

Atomo di idrogeno. Il sistema è nello stato

$$\psi(\vec{x},t=0) = \frac{1}{\sqrt{10}}\left[2\varphi_{100} + \varphi_{210} + \sqrt{2}\,\varphi_{211} + \sqrt{3}\,\varphi_{21-1}\right]$$

dove $\varphi_{n\ell m} = R_{n\ell}(r)\, Y_{\ell m}(\theta,\varphi)$, $E_n = \frac{E_1}{n^2}$, $E_1 = -13.6\,eV$

a) Calcolare $\langle H\rangle$

b) Calcolare $\psi(\vec{x},t)$ e $Prob(\ell=1, m=1\,;\,t)$

c) Stimare $Prob(r \leq 10^{-10}\,cm\,;\,t=0)$

ES. 4-4

C.T. L_{III}, es. 5 (pag. 342)

Particella di massa m, in una dimensione.

$$V(x) = -f x$$

a) scrivere e risolvere eq. del moto per $\langle x \rangle$ e $\langle p \rangle$.

b) calcolare $(\Delta P)^2(t)$ e mostrare che è costante

c) [NON OVVIO] – Scrivere l'eq. di Schroedinger per $\Psi(p)$.

– Dedurre legame tra

$$\frac{d}{dt}|\Psi(p,t)|^2 \quad e \quad \frac{d}{dp}|\Psi(p,t)|^2$$

– Interpretazione fisica.

ES. 4-5

In uno sistema fisico con spazio degli stati tridimensionale ($\mathcal{H}_{HILBERT} = \mathbb{C}^3$) è data una base $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle\}$ e due operatori t.c.

$$L_z|u_1\rangle = |u_1\rangle \quad L_z|u_2\rangle = 0 \quad L_z|u_3\rangle = -|u_3\rangle$$

$$S|u_1\rangle = |u_3\rangle \quad S|u_2\rangle = |u_2\rangle \quad S|u_3\rangle = |u_1\rangle$$

a) Scrivere le matrici che rappresentano L_z, L_z^2, S, S^2 rispetto alla base $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle\}$.
Questi operatori sono osservabili?

b) Scrivere la più generale matrice che commuta con L_z.
Stessa domanda per L_z^2 e per S^2.

c) $\{L_z^2, S\}$ è un set completo? Se sì, dare base comune di autovettori.

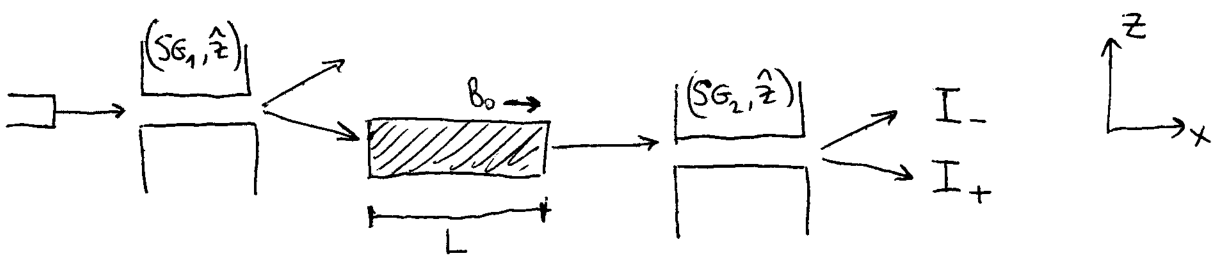
ES. X [es. 21] W.S., es. 3040 (pag. 233) (17)

[Vedi es_L6.pdf] <u>STERN-GERLACH</u>

Fascio di atomi d'argento diretto lungo l'asse x con velocità V passa attraverso $(SG_1, \hat{z})$, poi in una regione lunga L con campo magnetico uniforme $B_0 \vec{e}_x$ (lungo il moto) e infine in un'altra regione con gradiente di campo magnetico lungo z, cioè $(SG_2, \hat{z})$.

Se all'uscita di SG_1 si seleziona il fascio con $S_z = \frac{\hbar}{2}$, calcolare le intensità dei fasci all'uscita di SG_2.

<u>situazione</u>:



ES. VI [es. 9] Tannoudji, es. 4.2 (pag. 84) (13)

"Oscillatore in campo elettrico" : Particella massa m in una dimensione, di carica q. Soggetta a forza armonica e campo elettrico costante

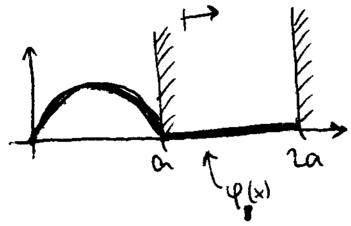
$$\hat{H} = \frac{P^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}x^2 - qEx \qquad \left(F_{el.} = -\frac{\partial V_{el}}{\partial x} = qE\right)$$

a) Autovalori di $\hat{H}$

b) Se a t=0 sono nel ground state con E = 0 $(|\psi(0)\rangle = |0\rangle)$ calcolare la prob. di essere nel ground state del sistema "accoppiato", cioè $E \neq 0$

c) momento di dipolo elettrico $d = qx$. Calcolare $\langle d\rangle(t)$ se a t=0 sono in $|0\rangle$

(es. 6B) "Expanding Box": se siamo nel ground state e istantaneamente la buca raddoppia, cioè $a \mapsto 2a$, calcolare $\text{Prob}(\psi \mapsto \tilde{\varphi}_2)$ dove $\tilde{\varphi}_n(x)$ sono gli autostati per la buca larga $2a$.



$$\psi = \varphi_1(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\ \text{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right)$$ ed è $\equiv 0$ se $x > a$

$$\tilde{\varphi}_n(x) = \sqrt{\frac{2}{2a}}\ \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{2a}\right) = \sqrt{\frac{1}{a}}\ \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{2a}\right)$$

Se sviluppo $\varphi_p(x)$ sui $\tilde{\varphi}_m(x)$, ottengo:

$$\varphi_p(x) = \sum_m c_m \tilde{\varphi}_m(x) \quad , \quad \text{dove}$$

$$c_m = \int_0^{2a} \varphi_p(x)\, \tilde{\varphi}_m^*(x)\, dx \overset{\varphi_p(x) \equiv 0 \text{ se } x > a}{=} \int_0^a \varphi_p(x)\, \tilde{\varphi}_m^*(x)\, dx$$

[Formalmente, in notaz. di Dirac: $|\varphi_p\rangle = \sum_m c_m |\tilde{\varphi}_m\rangle = \sum_m |\tilde{\varphi}_m\rangle\langle\tilde{\varphi}_m|\varphi_p\rangle$

$$\Rightarrow c_m = \langle\tilde{\varphi}_m|\varphi_p\rangle = \int dx\, \langle\tilde{\varphi}_m|x\rangle\langle x|\varphi_p\rangle = \int dx\, \varphi_p(x)\, \tilde{\varphi}_m^*(x)$$]

$$\text{Prob}(\psi \mapsto \tilde{\varphi}_2) \overset{\text{def.}}{=} |\langle\tilde{\varphi}_2|\psi\rangle|^2 = |c_2|^2$$

$$c_2 = \int_0^a \sqrt{\frac{2}{a}}\, \text{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sqrt{\frac{1}{a}}\, \text{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{a} \int_0^a \text{sen}^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) dx = \frac{\sqrt{2}}{a} \int_0^a \frac{1 - \cos\left(\frac{2\pi x}{a}\right)}{2}\, dx =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{a}\, \frac{a}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \text{Prob}(\psi \mapsto \tilde{\varphi}_2) = \frac{1}{2}$$

Se volessimo calcolare c_1:

$$c_1 = \int_0^a \sqrt{\frac{2}{a}}\, \text{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sqrt{\frac{1}{a}}\, \text{sen}\left(\frac{\pi x}{2a}\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{a} \int_0^a \frac{1}{2}\left[\cos\frac{\pi x}{2a} - \cos\frac{3\pi x}{2a}\right] =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2a}\left[\frac{\text{sen}\,\frac{\pi x}{2a}}{\pi/2a}\Bigg|_0^a - \frac{\text{sen}\,\frac{3\pi x}{2a}}{\frac{3\pi}{2a}}\Bigg|_0^a\right] = \frac{\sqrt{2}}{2a}\left[\frac{2a}{\pi} - \frac{2a}{3\pi}(-1)\right] = \frac{4\sqrt{2}}{3\pi}$$

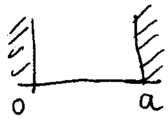
$$\Rightarrow \text{Prob}(\psi \mapsto \tilde{\varphi}_1) = \left(\frac{4\sqrt{2}}{3\pi}\right)^2$$

DA MATHEMATICA:

$$\int_0^a \text{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right) \text{sen}\left(\frac{m\pi x}{2a}\right) = \frac{4a\, \text{sen}\left(\frac{m\pi}{2}\right)}{4\pi - m^2\pi}$$

Es. 4-2

$$\psi(x,t=0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\varphi_1(x) + \varphi_2(x)\right]$$



con $\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\, \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$, $E_n = n^2 \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2}$, $\omega_n = \frac{E_n}{\hbar}$, $n=1,2,3,\dots$

a) $$\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[e^{-iE_1t/\hbar}\varphi_1(x) + e^{-iE_2t/\hbar}\varphi_2(x)\right] = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[e^{-i\omega_1 t}\varphi_1(x) + e^{-i\omega_2 t}\varphi_2(x)\right]$$

$$\text{Prob}(H=E_1,t) = \left|\frac{e^{-i\omega_1 t}}{\sqrt{2}}\right|^2 = 1/2 \qquad \text{Prob}(H=E_2,t) = 1/2$$

b) Notaz. di Dirac: $\varphi_n(x) = \langle x|n\rangle \Rightarrow \hat{H}|n\rangle = E_n|n\rangle$

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[e^{-i\omega_1 t}|1\rangle + e^{-i\omega_2 t}|2\rangle\right]$$

$$\langle H\rangle(t) = \langle\psi(t)|H|\psi(t)\rangle =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[e^{+i\omega_1 t}\langle 1| + e^{+i\omega_2 t}\langle 2|\right] H \frac{1}{\sqrt{2}}\left[e^{-i\omega_1 t}|1\rangle + e^{-i\omega_2 t}|2\rangle\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\qquad\qquad\right]\left[E_1 e^{-i\omega_1 t}|1\rangle + E_2 e^{-i\omega_2 t}|2\rangle\right] = \qquad \text{✓} \langle 1|2\rangle = 0$$

$$= \frac{1}{2}(E_1+E_2) = \frac{5}{2}\left(\frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}\right)$$

Definiamo per comodità $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$.

$$\langle x\rangle(t) = \int_0^a dx\, x\, |\psi(x,t)|^2$$

NB dimostraz. formale dell'identità precedente:

$$\langle x\rangle(t) \stackrel{\text{def}}{=} \langle\psi(t)|\hat{x}|\psi(t)\rangle = \qquad \int dx'\,|x'\rangle\langle x'| = \mathbb{1}$$

e inserisco 2 completezze

$$= \int dx'dx''\, \underbrace{\langle\psi(t)|x'\rangle}_{\psi(x',t)^*}\underbrace{\langle x'|\hat{x}|x''\rangle}_{x''\delta(x'-x'')}\underbrace{\langle x''|\psi(t)\rangle}_{\psi(x'',t)}$$

$$= \int dx'dx''\, \psi(x',t)^*\, \psi(x'',t)\, x''\, \delta(x'-x'')$$

$$= \int dx'\, x'\, |\psi(x',t)|^2$$

$$= \int_0^a dx\, x\, \frac{1}{2}\left[|\varphi_1(x)|^2 + |\varphi_2(x)|^2 + \varphi_1(x)\varphi_2(x)\left(e^{-i(\omega_1-\omega_2)t} + e^{+i(\omega_1-\omega_2)t}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^a dx \left\{x|\varphi_1(x)|^2 + x|\varphi_2(x)|^2 + 2\cos(\Delta\omega t)\, x\, \varphi_1(x)\varphi_2(x)\right\} = \quad \downarrow$$

$$= \frac{1}{2}\left\{ \frac{a}{2} + \frac{a}{2} + 2\cos(\Delta\omega t)\int_0^a dx \; x \left(\frac{2}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x}{a}\right) \right\} =$$

$\operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right)$

$$= \frac{1}{2}\left\{ a + \frac{4\cos(\Delta\omega t)}{a}\int_0^a dx \; x \; \frac{1}{2}\left[\cos\frac{\pi x}{a} - \cos\frac{3\pi x}{a}\right] \right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{ a + \frac{2\cos(\Delta\omega t)}{a}\left[\int_0^a dx \; x \cos\frac{\pi x}{a} - \int_0^a dx \; x \cos\frac{3\pi x}{a} \right] \right\}$$

$$\int_0^a dx \; x \cos\frac{\pi x}{a} = \left.\frac{x \operatorname{sen}\frac{\pi x}{a}}{\pi/a}\right|_0^a - \int_0^a \frac{\operatorname{sen}\frac{\pi x}{a}}{\pi/a} =$$

$$= 0 + \frac{a}{\pi} \left.\frac{\cos\frac{\pi x}{a}}{\pi/a}\right|_0^a = -2\left(\frac{a}{\pi}\right)^2$$

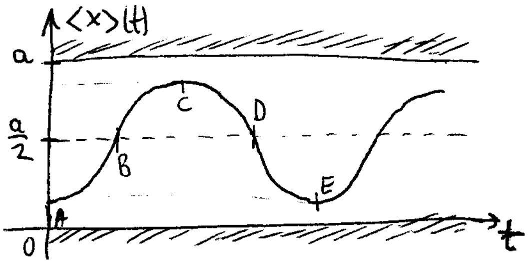
$$\int_0^a dx \; x \cos\frac{3\pi x}{a} = \text{—} = -2\left(\frac{a}{3\pi}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}\left\{ a + \frac{2\cos(\Delta\omega t)}{a}\left[-2\left(\frac{a}{\pi}\right)^2 + 2\frac{a^2}{9\pi^2} \right] \right\}$$

$$\Rightarrow \langle x \rangle(t) = \frac{a}{2} - \frac{16a}{9\pi^2}\cos(\Delta\omega t)$$

Osservazioni

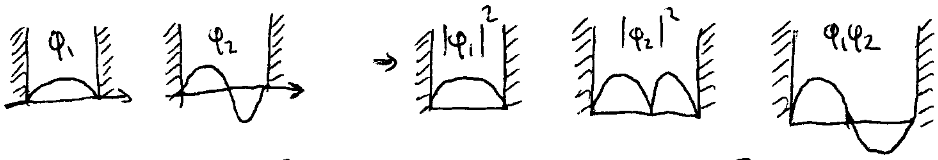
1)



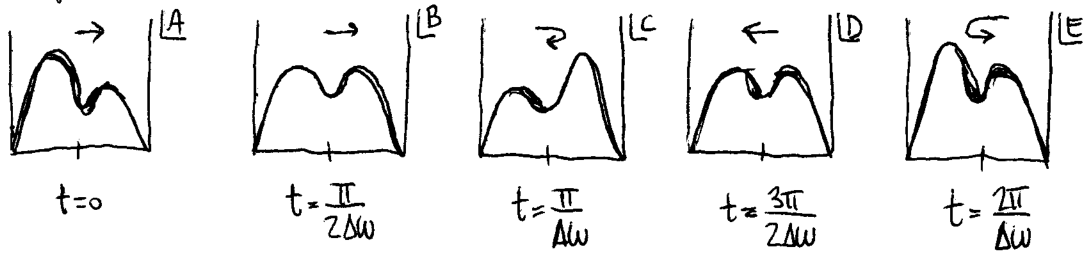
$\Rightarrow$ In MQ il centro del pacchetto NON TOCCA MAI LE PARETI, mentre classicamente sì.

2) Evoluz. temporale del pacchetto, graficamente

$$|\psi(x,t)|^2 = \frac{|\varphi_1(x)|^2}{2} + \frac{|\varphi_2(x)|^2}{2} + \varphi_1(x)\varphi_2(x)\cos(\Delta\omega t)$$



Disegniamo $|\psi(x,t)|^2$ per vari istanti, usando ⤵ :



ES. IV [es.9] W.S. es. 202

Atomo idrogeno: $\Psi(\vec{x}, t=0) = \frac{1}{\sqrt{10}}\left[2\varphi_{100} + \varphi_{210} + \sqrt{2}\,\varphi_{211} + \sqrt{3}\,\varphi_{21-1}\right]$

$\left[\varphi_{n\ell m} = R_{n\ell} Y_{\ell m}\right., \; E_n = \frac{E_1}{n^2}, \; \left. E_1 = -\frac{me^4}{2\hbar^2} = -13.6\ \text{eV}\right]$

a) calcolare $\langle E \rangle$

b) calcolare $\Psi(\vec{x},t)$ e $\text{Prob}(\ell=1, m=1\ ;\ t)$

c) Approx. e stimare $\text{Prob}(r \leq 10^{-10}\ \text{cm}\ ;\ t=0)$

a) Usiamo formalismo di Dirac:

$$|\Psi(t=0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{10}}\left[2|100\rangle + |210\rangle + \sqrt{2}|211\rangle + \sqrt{3}|21-1\rangle\right]$$

$$\langle E\rangle = \langle\Psi(t=0)|\hat{H}|\Psi(t=0)\rangle =$$

$$= \frac{1}{10}\left[2\langle 100| + \langle 210| + \sqrt{2}\langle 211| + \sqrt{3}\langle 21-1|\right]\left[2E_1|100\rangle + E_2\left(|210\rangle + \sqrt{2}|211\rangle + \sqrt{3}|21-1\rangle\right)\right]$$

$$= \frac{1}{10}\left[4E_1 + E_2\left(1 + (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{3})^2\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{10}\left[4E_1 + \frac{E_1}{4}(1+2+3)\right] = \frac{E_1}{10}\left(4+\frac{3}{2}\right) = \frac{11}{20}E_1 \simeq -7\,eV$$

[Notare che corrisponde esattamente ad usare la formula $\langle E\rangle = \sum_n |c_n|^2 E_n$ con $|\psi\rangle = \sum_n c_n|\varphi_n\rangle$]

b) $$|\Psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{10}}\left[2e^{-iE_1t/\hbar}|100\rangle + e^{-iE_2t/\hbar}\left(|210\rangle + \sqrt{2}|211\rangle + \sqrt{3}|21-1\rangle\right)\right]$$

$$\text{Prob}(\ell=1, m=1; t) = \sum_n |\langle n11|\Psi(t)\rangle|^2 =$$ → uso ortonormalità

$$= |\langle 211|\Psi(t)\rangle|^2 = \left|\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{10}}e^{-iE_2t/\hbar}\right|^2 = \frac{1}{5}$$

c) $$\text{Prob}(r\leq R; t=0) = \int_0^R r^2\,dr\,d\Omega\,|\Psi(\vec{x},t=0)|^2 =$$ → $\varphi_{n\ell m} = R_{n\ell}Y_{\ell m}$

$$= \int_0^R r^2\,dr\,d\Omega \sum_{n\ell m} c^*_{n\ell m}R^*_{n\ell}Y^*_{\ell m}\sum_{n'\ell'm'} c_{n'\ell'm'}R_{n'\ell'}Y_{\ell'm'}$$

$$= \sum_{n\ell m}\sum_{n'\ell'm'} c^*_{n\ell m}c_{n'\ell'm'}\int_0^R dr\,r^2 R^*_{n\ell}R_{n'\ell'}\int d\Omega\,Y^*_{\ell m}Y_{\ell'm'} =$$

$$= \sum_{n\ell m}\sum_{n'\ell'm'} c^*_{n\ell m}c_{n'\ell'm'}\int_0^R dr\,r^2 R^*_{n\ell}R_{n'\ell'}\,\delta_{\ell\ell'}\delta_{mm'}$$

$$= \sum_{nn'\ell m} c^*_{n\ell m}c_{n'\ell m}\int_0^R dr\,r^2 R^*_{n\ell}R_{n'\ell}$$

Per $\ell=0$, ho solo $m=1$
Per $\ell=1$, ho solo $m=2$

$$\Rightarrow \dots = \int_0^R dr\, r^2 \left[|R_{10}|^2\, |C_{100}|^2 + |R_{21}|^2 \left(|C_{210}|^2 + |C_{211}|^2 + |C_{21-1}|^2 \right) \right]$$

$$= \int_0^R dr\, r^2 \left[\frac{4}{10} |R_{10}|^2 + \frac{6}{10} |R_{21}|^2 \right]$$

$$|R_{10}|^2 = \frac{4}{a_0^3}\, e^{-2r/a_0} \qquad |R_{21}|^2 = \frac{r^2}{24 a_0^5}\, e^{-r/a_0}$$

$$\mathrm{Prob}\,(r \leq R) = \frac{1}{10} \int_0^R dr \left[\frac{16}{a_0} \left(\frac{r}{a_0}\right)^2 e^{-2r/a_0} + \frac{6}{24 a_0} \left(\frac{r}{a_0}\right)^4 e^{-r/a_0} \right]$$

FERMIANSI QUA

$$= \frac{1}{10} \int_0^{R/a_0} dx \left[16\, x^2 e^{-2x} + \frac{1}{4} x^4 e^{-x} \right] =$$

$x < \frac{R}{a_0} \simeq \frac{10^{-10}\ \mathrm{cm}}{0.5 \times 10^{-8}\ \mathrm{cm}} \simeq 2\times$

$\Rightarrow e^{-2x} \simeq 1$
$e^{-x} \simeq 1$

$$= \frac{1}{10} \left[16\, \frac{(R/a_0)^3}{3} + \frac{1}{4}\, \frac{(R/a_0)^5}{5} \right]$$

$$\simeq \frac{8}{15} \left(\frac{R}{a_0}\right)^3 \simeq \frac{8}{15} \cdot 8 \cdot 10^{-6} \simeq 4 \cdot 10^{-6}$$

ES. VII [es. 2] C.T. L_{III}, es. 5 (pag. 342)

Particella di massa m in una dimensione, sottoposta a

$V(x) = -fx$ [potenziale gravitazionale o carica in campo elettrico uniforme]

a) scrivere e risolvere le eq. del moto per $\langle x \rangle$ e $\langle p \rangle$

b) calcolare $(\Delta p)^2(t)$ e mostrare che è costante

c) derivare eq. di Schroedinger per $\Psi(p)$

dedurre legame tra $\frac{d}{dt}|\Psi(p,t)|^2$ e $\frac{d}{dp}|\Psi(p,t)|^2$

$$\hat{H} = \frac{p^2}{2m} - fx$$

Risolviamo l'esercizio (a) e b)) usando il Teorema di Ehrenfest sugli operatori; quindi ci mettiamo nella rappresentazione di Heisenberg

$|\Psi\rangle_H$ fisso, t.c. $|\Psi\rangle_H = |\Psi(t=0)\rangle_S$

$O_H(t) = e^{iHt/\hbar}\, O_H(t=0)\, e^{-iHt/\hbar}$, t.c. $O_H(t=0) = O_S$

e vale che $i\hbar \frac{d}{dt} O_H = [O_H, H] + i\hbar \frac{\partial O_H}{\partial t}$

Nel seguito tutti gli operatori sono da pensarsi nella rapp. di Heisenberg; eq. del moto:

$$\begin{cases} i\hbar\dot{x} = [x, H] \\ i\hbar\dot{p} = [p, H] \end{cases} \quad \begin{cases} i\hbar\dot{x} = i\hbar\frac{p}{m} \\ i\hbar\dot{p} = i\hbar f \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x} = \frac{p}{m} \\ \dot{p} = f \end{cases}$$

Quindi:

$$\begin{cases} \hat{x}(t) = \frac{ft^2}{2m} + \frac{\hat{p}(0)}{m}t + \hat{x}(0) & \text{(i)} \\ \hat{p}(t) = ft + \hat{p}(0) & \text{(ii)} \end{cases}$$

a) Dalle eq. precedenti, prendendo i valori d'aspettazione si ottiene

$$\begin{cases} \langle x(t)\rangle = \frac{ft^2}{2m} + \frac{\langle p_0\rangle}{m}t + \langle x_0\rangle \\ \langle p(t)\rangle = ft + \langle p_0\rangle \end{cases}$$

dove $\langle p_0\rangle = \langle\hat{p}(t=0)\rangle$
$\langle x_0\rangle = \langle\hat{x}(t=0)\rangle$

b) Per trovare $(\Delta p)^2(t)$ mi servono $\langle p^2(t)\rangle$ e $\langle p(t)\rangle^2$:

$$\langle p^2(t)\rangle = \langle\hat{p}(t)\,\hat{p}(t)\rangle \overset{(ii)}{=} \langle(ft + \hat{p}(0))(ft + \hat{p}(0))\rangle =$$

$$= \langle f^2t^2 + (\hat{p}(0))^2 + 2ft\,\hat{p}(0)\rangle =$$

$$= f^2t^2 + \langle p_0^2\rangle + 2ft\langle p_0\rangle$$ dove $\langle p_0^2\rangle = \langle p^2(t=0)\rangle$

$$\langle p(t)\rangle^2 = (ft + \langle p_0\rangle)^2 = f^2t^2 + \langle p_0\rangle^2 + 2ft\langle p_0\rangle$$

Quindi:

$$(\Delta p)^2(t) \overset{def}{=} \langle p^2(t)\rangle - \langle p(t)\rangle^2 =$$

$$= (f^2t^2 + \langle p_0^2\rangle + 2ft\langle p_0\rangle) - (f^2t^2 + \langle p_0\rangle^2 + 2ft\langle p_0\rangle) =$$

$$= \langle p_0^2\rangle - \langle p_0\rangle^2 = (\Delta p)^2(t=0)$$

$\Rightarrow (\Delta p)^2(t)$ è costante nel tempo se $V(x) = -fx$

c) Partiamo dall' eq. di S. nello spazio delle coordinate $(\psi = \psi(x))$

$$\boxed{-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\psi - fx\psi = i\hbar\frac{d}{dt}\psi} \qquad (i)$$

Facciamo la F.T. dell' eq. precedente, ovvero:

$$-i\hbar\frac{d}{dx} \longrightarrow p$$

$$x \longrightarrow i\hbar\frac{d}{dp}$$

$$\psi(x) \longrightarrow \psi(p)$$

Otteniamo quindi l'eq. di Schroedinger per $\psi(p)$:

$$\boxed{\frac{p^2}{2m}\psi(p) - i\hbar f\frac{d}{dp}\psi(p) = i\hbar\frac{d}{dt}\psi(p)} \qquad (ii)$$

Possiamo riscriverla come

$$\dot{\psi}(p) = -f\frac{d\psi(p)}{dp} + \frac{p^2}{2mi\hbar}\psi(p) \qquad (iii)$$

e prendendo il complesso coniugato si ha

$$\dot{\psi}^*(p) = -f\frac{d\psi^*(p)}{dp} - \frac{p^2}{2mi\hbar}\psi^*(p) \qquad (iv)$$

Adesso moltiplico (iii) per $\psi^*(p)$ e (iv) per $\psi(p)$.
Sommando le due identità si ottiene

$$\frac{d}{dt}|\psi(p,t)|^2 = -f\frac{d}{dp}|\psi(p,t)|^2$$

$$\Rightarrow \boxed{|\psi(p,t)|^2 = F(p-ft)} \qquad (v)$$

dove F è una funzione che dipende ad es. dalle condizioni iniziali. Però il risultato è che $|\psi(p,t)|^2$ dipende da p e t combinati secondo $p-ft$, cioè p e t compaiono in $|\psi(p,t)|^2$ nella combinazione $p-ft$.

Conseguenze: 1) Poiché $\int dp\, |\psi(p,t)|^2 = 1$, allora segue che $\int dp'\, F(p') = 1$.

2) Dalla (V) possiamo ricavare $\langle p(t)\rangle$, infatti:

$$\langle p(t)\rangle = \int dp\, p\, |\psi(p,t)|^2 =$$

$$= \int dp\, p\, F(p-ft) = \int dp\, (p-ft)F(p-ft) + ft \int dp\, F(p-ft)$$

$$= \int dp'\, p' F(p') + ft \int dp'\, F(p') =$$

$$= (\mathrm{cost}) + ft$$

Definendo $(\mathrm{cost}) = \langle p_0\rangle$, si ottiene

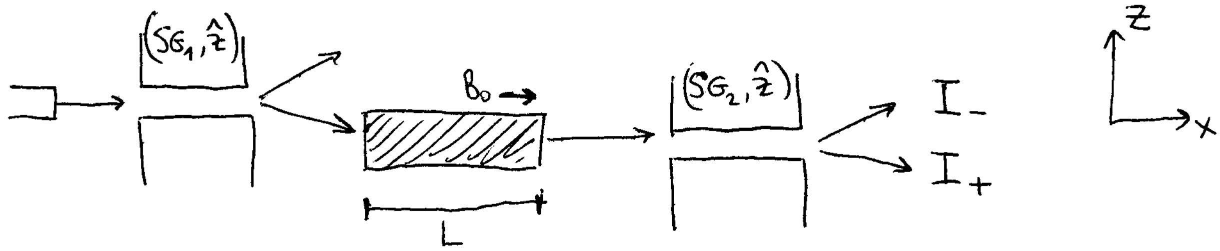
$$\langle p(t)\rangle = \langle p_0\rangle + ft$$

[Vedi es_L6.pdf] STERN-GERLACH

Fascio di atomi d'argento diretto lungo l'asse x con velocità V passa attraverso $(SG_1, \hat{z})$, poi in una regione lunga L con campo magnetico uniforme $B_0 \vec{e}_x$ (lungo il moto) e infine in un'altra regione con gradiente di campo magnetico lungo z, cioè $(SG_2, \hat{z})$.

Se all'uscita di SG_1 si seleziona il fascio con $S_z = \frac{\hbar}{2}$, calcolare le intensità dei fasci all'uscita di SG_2.

situazione:



Ricordiamo che per un atomo d'argento

$$\vec{\mu} = \frac{-|e|}{mc} \vec{S} \quad , \quad \vec{S} = \frac{\hbar}{2} \vec{\sigma} \qquad (\text{un elettrone} \to \text{spin } \tfrac{1}{2})$$

Ricordiamo anche che un fascio che attraversa SG subisce una forza data da:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} V = -\vec{\nabla}\left(-\vec{\mu} \cdot \vec{B}\right)$$

In $(SG, \hat{z})$ si ha $\vec{B} = B_z \vec{e}_z$ con un gradiente $\frac{\partial B_z}{\partial z} \neq 0$, quindi

$$\vec{F} = +\vec{\nabla}\left(\mu_z B_z\right) = \mu_z \frac{\partial B_z}{\partial z} \vec{e}_z$$

All'uscita di $(SG_1, \hat{z})$ abbiamo selezionato $S_z = \frac{\hbar}{2}$, quindi

$$|\psi(t=0)\rangle = |+, \hat{z}\rangle$$

Poiché abbiamo attraversamento in campo $B_0 \vec{e}_x$, decompongo $|\psi(t=0)\rangle$ su autostati di S_x: sappiamo che

$$|+, \hat{z}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|+, \hat{x}\rangle + |-, \hat{x}\rangle\right] \quad \text{dove} \quad S_x |\pm, \hat{x}\rangle = \pm\frac{\hbar}{2} |\pm, \hat{x}\rangle$$

Infatti se $|+,\hat{z}\rangle = \begin{vmatrix}1\\0\end{vmatrix}$, allora $|\pm,\hat{x}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{vmatrix}1\\\pm 1\end{vmatrix}$.

Quindi

$$|\psi(t=0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|+,\hat{x}\rangle + |-,\hat{x}\rangle\right]$$

Nella regione con $B_0\vec{e}_x$ si ha che

$$H = -\vec{\mu}\cdot\vec{B} = +\frac{|e|}{mc}\,\vec{S}\cdot\vec{B} = \frac{|e|}{mc}\,\frac{B_0\hbar}{2}\,\sigma_x$$

e ovviamente gli autostati sono $|\pm,\hat{x}\rangle$:

$$H|\pm,\hat{x}\rangle = \pm\frac{|e|}{mc}\,\frac{B_0\hbar}{2}\,|\pm,\hat{x}\rangle$$

Dunque nel passaggio attraverso la regione con $B_0\vec{e}_x$ lo stato evolve così:

$$|\psi(t)\rangle = e^{-iHt/\hbar}|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[e^{-i\frac{|e|B_0}{2mc}t}\,|+,\hat{x}\rangle + e^{+i\frac{|e|B_0}{2mc}t}\,|-,\hat{x}\rangle\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[e^{-i(\ldots)}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{vmatrix}1\\1\end{vmatrix} + e^{+i(\ldots)}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{vmatrix}1\\-1\end{vmatrix}\right] = \begin{pmatrix}\cos\left(\frac{|e|B_0}{2mc}t\right)\\ -i\,\mathrm{sen}\left(\frac{|e|B_0}{2mc}t\right)\end{pmatrix}$$

In tale regione il moto è rettilineo uniforme lungo x, quindi il tempo impiegato è $T = \frac{L}{V}$. Dunque prima di entrare in $(SG_2, \hat{z})$ lo stato del sistema è:

$$|\psi(T)\rangle = \begin{vmatrix}\cos\left(\frac{|e|B_0}{2mc}\frac{L}{V}\right)\\ -i\,\mathrm{sen}\left(\frac{|e|B_0}{2mc}\frac{L}{V}\right)\end{vmatrix}$$

Quindi:

$$I_+ = I_0\,\mathrm{Prob}\left(S_z = \frac{\hbar}{2}\right) = I_0\cos^2\left(\frac{|e|B_0}{2mc}\frac{L}{V}\right)$$

$$I_- = I_0\,\mathrm{Prob}\left(S_z = -\frac{\hbar}{2}\right) = I_0\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{|e|B_0}{2mc}\frac{L}{V}\right)$$

dove I_0 è l'intensità del fascio all'entrata di $(SG_2, \hat{z})$

"Oscillatore in campo elettrico" : Particella massa m in una dimensione, di carica q. Soggetta a forza armonica e campo elettrico costante

$$\hat{H} = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}x^2 - qEx \qquad \left(F_{el.} = -\frac{\partial V_{el}}{\partial x} = qE\right)$$

a) Autovalori di $\hat{H}$

b) Se a $t=0$ sono nel ground state con $E=0$ $(|\psi(0)\rangle = |0\rangle)$ calcolare la prob. di essere nel ground state del sistema "accoppiato", cioè $E \neq 0$

c) momento di dipolo elettrico $d = qx$. Calcolare $\langle d \rangle(t)$ se a $t=0$ sono in $|0\rangle$

a) $$\hat{H} = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}x^2 - qEx =$$

$$= \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\left(x - \frac{qE}{m\omega^2}\right)^2 - \frac{m\omega^2}{2}\left(\frac{qE}{m\omega^2}\right)^2 =$$

$$= -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{m\omega^2}{2}\left(x - \frac{qE}{m\omega^2}\right)^2 - \frac{q^2E^2}{2m\omega^2}$$

Quindi, con il cambio di variabile $x' = x - \frac{qE}{m\omega^2}$, si ha:

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx'^2} + \frac{m\omega^2}{2}x'^2 - \frac{q^2E^2}{2m\omega^2}$$

$$\Rightarrow E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega - \frac{q^2E^2}{2m\omega^2}$$

b) $$\psi(x) = \langle x|0\rangle_{E=0} = \left(\frac{m\omega}{\hbar\pi}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$$

$\left[e^{-\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{L^2}}\right.$

L = lunghezza (usando $\hbar, m, \omega$)

$= \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$

Autostati: $$\tilde{\varphi}_n(x) = \varphi_n^{E\neq 0}(x) = \varphi_n^{E=0}(x - x_0)$$

con $x_0 = \frac{qE}{m\omega^2}$

$$\text{Prob}\left(H = \frac{\hbar\omega}{2} - \frac{q^2E^2}{2m\omega^2}\right) = |c_0|^2 \qquad \text{se } \Psi(x) = \sum_n c_n \tilde{\varphi}_n(x)$$

$$c_0 = \int dx\, \tilde{\varphi}_0^*(x)\, \Psi(x) =$$

$$= \int dx \left[\varphi_0^{E=0}(x - x_0)\right]^* \varphi_0(x) =$$

$$= \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2} \int dx\, e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}(x-x_0)^2}\, e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}} \int dx\, e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}\left(x^2 + x_0^2 - 2xx_0 + x^2\right)}$$

$$\cancel{= \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}}\, e^{-\frac{m\omega x_0^2}{2\hbar}} \int dx\, e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}}}$$

$$\cancel{= \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}}\, e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}\frac{x_0^2}{2}} \int dx\, e^{-\frac{m\omega}{4\hbar}}}$$

$$= \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}} \int dx\, e^{-\frac{m\omega}{\hbar}\left(x^2 - xx_0 + \frac{x_0^2}{2}\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}} \int dx\, e^{-\frac{m\omega}{\hbar}\left[\left(x - \frac{x_0}{2}\right)^2 + \frac{x_0^2}{4}\right]} =$$

$$= e^{-\frac{m\omega x_0^2}{4\hbar}} \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}} \int dx'\, e^{-\frac{m\omega}{\hbar}x'^2} = e^{-\frac{m\omega x_0^2}{4\hbar}}$$

$$\text{Prob} = e^{-\frac{m\omega x_0^2}{2\hbar}} = e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}\frac{q^2E^2}{m^2\omega^4}} = \exp\left(-\frac{q^2E^2}{2\hbar m\omega^3}\right)$$

QUI

c) Usiamo eq. di Heisenberg (T. di Ehrenfest) per x'_H e p'_H. NON FATTO

$$\begin{cases} i\hbar \frac{d}{dt} x'_H = [x'_H, H] = \left[x'_H, \frac{p'^2_H}{2m}\right] = i\hbar \frac{p'_H}{m} \\ i\hbar \frac{d}{dt} p'_H = [p'_H, H] = \left[p'_H, \frac{m\omega^2}{2} x'^2_H\right] = \frac{m\omega^2}{2}\left(-2i\hbar x'_H\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} x'_H = \frac{p'_H}{m} \\ \frac{d}{dt} p'_H = -m\omega^2 x'_H \end{cases}$$

(al solito, come le eq. del moto classiche)

Derivo la prima

$$\ddot{x}'_H = -\omega^2 x_H$$

che ha come soluzione generale, considerando anche le condiz. iniziali:

$$x'_H(t) = x'(0)\cos(\omega t) + \frac{p'(0)}{m\omega}\,\mathrm{sen}(\omega t)$$

(non scrivo più la H di Heisenberg)

Usando $x' = x - x_0$, e dunque $x'(0) = x(0) - x_0$, si ha:

$$x_H(t) = x_0 + x'(t) = x_0 + x'(0)\cos\omega t + \frac{p'(0)}{m\omega}\,\mathrm{sen}\,\omega t =$$

uso che $p'(0) = p(0)$

$$= x_0 + \left(x(0) - x_0\right)\cos\omega t + \frac{p(0)}{m\omega}\,\mathrm{sen}\,\omega t$$

$$= x_0(1-\cos\omega t) + x_H(0)\cos\omega t + \frac{p_H(0)}{m\omega}\,\mathrm{sen}\,\omega t$$

SONO NELLA RAPP. DI HEISENBERG, QUINDI HO FATTO EVOLVERE L'OPERATORE E IL VETTORE DI STATO È FISSO

$$\langle x\rangle(t) = \langle 0|[\ \dots\ ]|0\rangle \quad , \text{ con } |0\rangle = |0\rangle_{E=0}$$

(ground state problema senza E elettrico)

$$= \langle 0|\mathbb{1}|0\rangle(1-\cos\omega t)x_0 + \cos\omega t\,\langle 0|x_H(0)|0\rangle + \frac{\mathrm{sen}\,\omega t}{m\omega}\langle 0|p_H(0)|0\rangle$$

A $t=0$, $x_H(0) = x \Rightarrow \langle 0|x|0\rangle = \int dx\, x\,|\psi_0(x)|^2 = 0$

" " , $p_H(0) = p \Rightarrow \langle 0|p|0\rangle = \int dx\, \psi_0^*(x)\left(-i\hbar\frac{d\psi_0(x)}{dx}\right) \propto \int dx\, x\,|\psi_0(x)|^2 =$

Quindi:

$$\langle d\rangle(t) = q\langle x\rangle(t) = q x_0(1-\cos\omega t) =$$

$$= q x_0\left(1 - \cos\left(2\frac{\omega t}{2}\right)\right) = q x_0\left(1 - \cos^2\frac{\omega t}{2} + \mathrm{sen}^2\frac{\omega t}{2}\right) =$$

$$= 2 q x_0\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{\omega t}{2}\right)$$