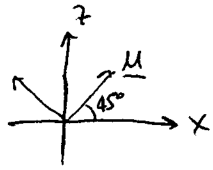
Sistema con $\ell=1$ $(\vec{L}^2 = 2\hbar^2)$ ha la seguente H:



$$H = \frac{\omega_0}{\hbar}\left(L_u^2 - L_v^2\right) \qquad L_u = \vec{u}\cdot\vec{L} \quad , L_v = \vec{v}\cdot\vec{L}$$

(cioè $\underline{u} = \frac{\vec{e}_x + \vec{e}_z}{\sqrt{2}}$ $\quad \underline{v} = \frac{-\vec{e}_x + \vec{e}_z}{\sqrt{2}}$)

a) Trovare spettro e autostati

b) Trovare $|\psi(t)\rangle$ e $Prob(L_z;t)$ se $|\psi(0)\rangle = \frac{|+\rangle - |-\rangle}{\sqrt{2}}$

c) $\langle \vec{L} \rangle(t)$

d) Esiste t t.c. se misuro L_z^2 c'è un solo valore possibile (cioè Prob $=1$)

a) Devo diagonalizzare H.

$|+\rangle = \begin{vmatrix}1\\0\\0\end{vmatrix}$ $\quad |-\rangle = \begin{vmatrix}0\\0\\1\end{vmatrix}$ $\quad |0\rangle = \begin{vmatrix}0\\1\\0\end{vmatrix}$ $\qquad L_z = \hbar\begin{pmatrix}1 & & \\ & 0 & \\ & & -1\end{pmatrix}$ $\quad L_x = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$ $\quad L_y = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&-i&0\\i&0&-i\\0&i&0\end{pmatrix}$

Calcoliamo H:

$$L_u = \vec{u}\cdot\vec{L} = \frac{1}{\sqrt{2}}(L_x + L_z) \qquad L_v = \vec{v}\cdot\vec{L} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-L_x + L_z)$$

$$L_u^2 - L_v^2 = \frac{1}{2}\left[(L_x+L_z)(L_x+L_z) - (L_z - L_x)(L_z - L_x)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\cancel{L_x^2} + \cancel{L_z^2} + L_xL_z + L_zL_x - (\cancel{L_z^2} + \cancel{L_x^2} - L_xL_z - L_zL_x)\right] =$$

$$= L_xL_z + L_zL_x =$$

$$= \frac{\hbar^2}{\sqrt{2}}\left[\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\right] = \frac{\hbar^2}{\sqrt{2}}\left[\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&-1\\0&0&0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&-1&0\end{pmatrix}\right]$$

$$= \frac{\hbar^2}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&-1\\0&-1&0\end{pmatrix}$$

$$H = \frac{\omega_0\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&-1\\0&-1&0\end{pmatrix}$$

Spettro, cioè autovalori: $\det\begin{pmatrix}-\lambda&1&0\\1&-\lambda&-1\\0&-1&-\lambda\end{pmatrix} = 0 \rightarrow -\lambda(\lambda^2-1) - 1(-\lambda) = -\lambda(\lambda^2-2) = 0$

$$\rightarrow \lambda = 0, \pm\sqrt{2} \qquad \rightarrow E = 0, \pm\hbar\omega_0$$

Autostati: $\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&-1\\0&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}b\\a-c\\-b\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases}b = \lambda a\\ a - c = \lambda b\\ -b = \lambda c\end{cases}$

$\lambda=0\ (E_0=0) \rightarrow \begin{cases} b=0 \\ a-c=0 \end{cases} \rightarrow |E_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{vmatrix}1\\0\\1\end{vmatrix}$ $[E_0=0]$

$\lambda=\sqrt{2}\ (E_+=\hbar\omega_0) \rightarrow \begin{cases} b=\sqrt{2}a \\ a-c=\sqrt{2}b \\ -b=\sqrt{2}c \end{cases} \rightarrow |E_+\rangle = \frac{1}{2}\begin{vmatrix}1\\\sqrt{2}\\-1\end{vmatrix}$ $[E_+=\hbar\omega_0]$

Z

$\lambda=-\sqrt{2}\ (E_-=-\hbar\omega_0) \rightarrow \begin{cases} b=-\sqrt{2}a \\ a-c=-\sqrt{2}b \\ -b=-\sqrt{2}c \end{cases} \rightarrow |E_-\rangle = \frac{1}{2}\begin{vmatrix}1\\-\sqrt{2}\\-1\end{vmatrix}$ $[E_-=-\hbar\omega_0]$

b) $|\psi(t=0)\rangle = \frac{|+\rangle-|-\rangle}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{vmatrix}1\\0\\-1\end{vmatrix} = \frac{|E_+\rangle+|E_-\rangle}{\sqrt{2}}$

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{-iE_+t/\hbar}|E_+\rangle + e^{-iE_-t/\hbar}|E_-\rangle\right) =$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{-i\omega_0 t}|E_+\rangle + e^{i\omega_0 t}|E_-\rangle\right)$$

Per calcolare Prob(L_z) devo sviluppare $|\psi(t)\rangle$ su autostati di L_z. Questo è banale x gli autostati sono $|+\rangle=\begin{vmatrix}1\\0\\0\end{vmatrix}$ $|0\rangle=\begin{vmatrix}0\\1\\0\end{vmatrix}$ $|-\rangle=\begin{vmatrix}0\\0\\1\end{vmatrix}$.

Quindi:

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{e^{-i\omega_0 t}}{2}\begin{vmatrix}1\\\sqrt{2}\\-1\end{vmatrix} + \frac{e^{i\omega_0 t}}{2}\begin{vmatrix}1\\-\sqrt{2}\\-1\end{vmatrix}\right] = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{vmatrix}\cos\omega_0 t\\-i\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,\omega_0 t\\-\cos\omega_0 t\end{vmatrix} =$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\cos\omega_0 t\,|+\rangle - i\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,\omega_0 t\,|0\rangle + -\cos\omega_0 t\,|-\rangle\right]$$

$$\mathrm{Prob}(L_z=\hbar\,;t) = \frac{\cos^2\omega_0 t}{2}$$

$$\mathrm{Prob}(L_z=-\hbar\,;t) = \frac{\cos^2\omega_0 t}{2}$$

$$\mathrm{Prob}(L_z=0\,;t) = \mathrm{sen}^2\omega_0 t$$

c) $\langle L_z\rangle(t) = \mathrm{Prob}(L_z=\hbar)\,\hbar + \mathrm{Prob}(L_z=0)\,0 + \mathrm{Prob}(L_z=-\hbar)\,(-\hbar) =$

$$= \hbar\frac{\cos^2\omega_0 t}{2} - \hbar\frac{\cos^2\omega_0 t}{2} = 0$$

$$\langle L_x\rangle(t) = \langle\psi(t)|L_x|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\omega_0 t,\ i\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,\omega_0 t,\ -\cos\omega_0 t)\frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{vmatrix}\cos\omega_0 t\\-i\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,\omega_0 t\\-\cos\omega_0 t\end{vmatrix} =$$

$$=\frac{\hbar}{2\sqrt{2}}(\cos,\ i\sqrt{2}\,\mathrm{sen},\ -\cos)\begin{pmatrix}-i\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\\0\\-i\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\end{pmatrix} = 0$$

$$\langle L_y\rangle(t)=\frac{\hbar}{2\sqrt2}(\cos,\ i\sqrt2\,\mathrm{sen},\ -\cos)\begin{pmatrix}0&-i&0\\ i&0&-i\\ 0&i&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\\ -i\sqrt2\,\mathrm{sen}\\ -\cos\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{\hbar}{2\sqrt2}(\cos,\ i\sqrt2\,\mathrm{sen},\ -\cos)\begin{pmatrix}-\sqrt2\,\mathrm{sen}\\ 2i\cos\\ \sqrt2\,\mathrm{sen}\end{pmatrix}=\frac{\hbar}{2\sqrt2}\left(-\sqrt2\,\mathrm{sen}\cos-2\sqrt2\,\mathrm{sen}\cos-\sqrt2\,\mathrm{sen}\cos\right)$$

$$=-\hbar 2\,\mathrm{sen}\,\omega_0 t\cos\omega_0 t=-\hbar\,\mathrm{sen}(2\omega_0 t)$$

d) Probabilità per L_z^2:

$$\mathrm{Prob}(L_z^2=\hbar^2;t)=\mathrm{Prob}(L_z=\hbar;t)+\mathrm{Prob}(L_z=-\hbar;t)=$$

$$=\frac{\cos^2\omega_0 t}{2}+\frac{\cos^2\omega_0 t}{2}=\cos^2\omega_0 t$$

$$\mathrm{Prob}(L_z^2=0;t)=\mathrm{sen}^2\omega_0 t$$

Quindi ho un risultato certo per L_z^2 se $\omega_0 t=m\frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow t=\frac{m\pi}{2\omega_0}$$

Più in particolare: Se $\omega_0 t=m\pi$, cioè $t=\frac{m\pi}{\omega_0}\Rightarrow L_z^2=\hbar^2$

Se $\omega_0 t=(2m+1)\frac{\pi}{2}$, cioè $t=\frac{\pi}{\omega_0}(m+\frac12)\Rightarrow L_z^2=0$

Es. VIII [es.12] C.T, J_{IV}, es. 1 (pag. 476)

Particella di spin $\frac12$, $\vec\mu=\gamma\vec S$, t.c. $|\psi(t=0)\rangle=|+\rangle$

a) $\mathrm{Prob}(S_x;t=0)$

b) $H=-\vec\mu\cdot\vec B$, $\vec B=B_0\vec e_y$. Calcolare $|\psi(t)\rangle$.

c) $\mathrm{Prob}(S_x,S_y,S_z;t)$. Relazione tra B_0 e t per avere un risultato certo in una di queste misure.

Fare commento su $\vec\mu$ e sua relazione con $\vec J$
$\vec\mu=\vec\mu_S+\vec\mu_L$ $\vec\mu_S=\frac{q}{2mc}g\vec S$ $\vec\mu_L=\frac{q}{2mc}\vec L$
Per elettrone $q=-|e|$ $g=2$
$H=-\vec\mu\cdot\vec B$

$$S_z=\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\qquad S_x=\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\qquad S_y=\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}$$

$$|+\rangle=|+,\hat z\rangle=\begin{vmatrix}1\\0\end{vmatrix}\qquad |+,\hat x\rangle=\frac{1}{\sqrt2}\begin{vmatrix}1\\1\end{vmatrix}\qquad |+,\hat y\rangle=\frac{1}{\sqrt2}\begin{vmatrix}1\\i\end{vmatrix}$$

$$|-\rangle=|-,\hat z\rangle=\begin{vmatrix}0\\1\end{vmatrix}\qquad |-,\hat x\rangle=\frac{1}{\sqrt2}\begin{vmatrix}1\\-1\end{vmatrix}\qquad |-,\hat y\rangle=\frac{1}{\sqrt2}\begin{vmatrix}1\\-i\end{vmatrix}$$

a) $|\psi(t=0)\rangle=|+\rangle=\begin{vmatrix}1\\0\end{vmatrix}=\frac{1}{\sqrt2}(|+,\hat x\rangle+|-,\hat x\rangle)$ $\Rightarrow \mathrm{Prob}(S_x=\frac{\hbar}{2})=1/2$

$\mathrm{Prob}(S_x=-\frac{\hbar}{2})=1/2$

b) $H = -\vec{\mu}\cdot\vec{B} = -\gamma\,\vec{S}\cdot\vec{B} = -\gamma B_0\, S_y$

$$H|+,\hat{y}\rangle = -\gamma B_0 \frac{\hbar}{2}|+,\hat{y}\rangle = E_-|+,\hat{y}\rangle \qquad E_- = -\gamma B_0\frac{\hbar}{2}$$

$$H|-,\hat{y}\rangle = +\gamma B_0 \frac{\hbar}{2}|-,\hat{y}\rangle = E_+|-,\hat{y}\rangle \qquad E_+ = +\gamma B_0\frac{\hbar}{2}$$

$$|\psi(t)\rangle = e^{-iHt/\hbar}|\psi(t=0)\rangle =$$

$$= e^{-iHt/\hbar}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+,\hat{y}\rangle + |-,\hat{y}\rangle\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{-iE_-t/\hbar}|+,\hat{y}\rangle + e^{-iE_+t/\hbar}|-,\hat{y}\rangle\right)$$

$$= \frac{1}{2}e^{i\gamma B_0 t/2}\begin{vmatrix}1\\ i\end{vmatrix} + \frac{1}{2}e^{-i\gamma B_0 t/2}\begin{vmatrix}1\\ -i\end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix}\cos\left(\frac{\gamma B_0 t}{2}\right)\\ -\operatorname{sen}\left(\frac{\gamma B_0 t}{2}\right)\end{vmatrix} \qquad \left(= \cos\left(\frac{\gamma B_0 t}{2}\right)|+\rangle - \operatorname{sen}\left(\frac{\gamma B_0 t}{2}\right)|-\rangle\right)$$

c) $\text{Prob}\left(S_z = \frac{\hbar}{2}; t\right) = \cos^2\left(\frac{\gamma B_0 t}{2}\right) \qquad \text{Prob}\left(S_z = -\frac{\hbar}{2}; t\right) = \operatorname{sen}^2\left(\frac{\gamma B_0 t}{2}\right)$

$\text{Prob}\left(S_y = \frac{\hbar}{2}; t\right) = \left|\frac{e^{-iE_-t/\hbar}}{\sqrt{2}}\right|^2 = \frac{1}{2} \qquad \text{Prob}\left(S_y = -\frac{\hbar}{2}; t\right) = \frac{1}{2}$

$$\text{Prob}\left(S_x = \frac{\hbar}{2}; t\right) = \left|\langle +,\hat{x}|\psi(t)\rangle\right|^2 = \left|\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)\begin{vmatrix}\cos(\ )\\ -\operatorname{sen}(\ )\end{vmatrix}\right|^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\gamma B_0 t}{2} - \operatorname{sen}\frac{\gamma B_0 t}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(\cos^2 + \operatorname{sen}^2 - 2\operatorname{sen}(\ )\cos(\ )\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \operatorname{sen}(\gamma B_0 t)\right)$$

$$\text{Prob}\left(S_x = -\frac{\hbar}{2}; t\right) = 1 - \text{Prob}\left(S_x = \frac{\hbar}{2}; t\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \operatorname{sen}(\gamma B_0 t)\right)$$

S_y NON PUÒ ASSUMERE UN VALORE CON CERTEZZA, avendo prob $\equiv \frac{1}{2}$, fisso nel tempo $[H, S_y] = 0$

Se voglio misura certa di S_z, $\frac{\gamma B_0 t}{2} = n\frac{\pi}{2}$, cioè $t = \frac{n\pi}{\gamma B_0}$

Se voglio misura certa di S_x, $\gamma B_0 t = (2n+1)\frac{\pi}{2}$, cioè $t = \frac{(2n+1)\pi}{2\gamma B_0}$

Particella di spin $\frac{1}{2}$, $H = -\vec{\omega}\cdot\vec{S}$; con $\vec{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ $|\vec{\omega}| = \omega_0$

Se $|\psi(t=0)\rangle = |+\rangle$, trovare $|\psi(t)\rangle$ e $\mathrm{Prob}(S_z = \frac{\hbar}{2}; t)$

Ricordiamo che $e^{i\alpha\vec{n}\cdot\vec{\sigma}} = (\cos\alpha)\mathbb{1}_{2\times2} + i(\vec{n}\cdot\vec{\sigma})(\operatorname{sen}\alpha)$ $\alpha \in \mathbb{R}$, $|\vec{n}| = 1$

Poiché ci servirà, scriviamo $\frac{-iHt}{\hbar}$ nella forma $i\alpha\vec{n}\cdot\vec{\sigma}$,

cioè troviamo α e $\vec{n}$ t.c. $i\alpha\vec{n}\cdot\vec{\sigma} = -i\frac{Ht}{\hbar}$

$$\alpha\vec{n}\cdot\vec{\sigma} \overset{\text{deve}}{=} -\frac{Ht}{\hbar} = -\frac{t}{\hbar}(-\vec{\omega}\cdot\vec{S}) = \qquad \vec{S} = \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}$$

$$= t\,\vec{\omega}\cdot\frac{\vec{\sigma}}{2} = \frac{\omega_0 t}{2}\left(\frac{\vec{\omega}}{\omega_0}\cdot\vec{\sigma}\right)$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{\omega_0 t}{2}, \quad \vec{n} = \frac{\vec{\omega}}{\omega_0}$$

$$|\psi(t)\rangle = e^{-iHt/\hbar}|\psi(0)\rangle = e^{i\alpha\vec{n}\cdot\vec{\sigma}}\begin{vmatrix}1\\0\end{vmatrix} =$$

$$\vec{n}\cdot\vec{\sigma} = n_x\sigma_x + n_y\sigma_y + n_z\sigma_z = \begin{pmatrix} n_z & n_x - \\ n_x + in_y & - \end{pmatrix}$$

$$= \left[\cos\alpha\,\mathbb{1}_{2\times2} + i(\vec{n}\cdot\vec{\sigma})\operatorname{sen}\alpha\right]\begin{vmatrix}1\\0\end{vmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\alpha + in_z\operatorname{sen}\alpha & i\operatorname{sen}\alpha(n_x - in_y) \\ i\operatorname{sen}\alpha(n_x + in_y) & \cos\alpha - in_z\operatorname{sen}\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha + in_z\operatorname{sen}\alpha \\ i\operatorname{sen}\alpha(n_x + in_y) \end{pmatrix}$$

e esplicitare α e $\vec{n}$

$$\mathrm{Prob}(S_z = \tfrac{\hbar}{2}; t) = |\langle +|\psi(t)\rangle|^2 = |\cos\alpha + in_z\operatorname{sen}\alpha|^2 =$$

$$= \cos^2\alpha + n_z^2\operatorname{sen}^2\alpha\ (+\operatorname{sen}^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha) =$$

$$= 1 + \operatorname{sen}^2\alpha\,(n_z^2 - 1) =$$

$$= 1 + \operatorname{sen}^2\frac{\omega_0 t}{2}\left[\left(\frac{\omega_z}{\omega_0}\right)^2 - 1\right] = 1 - \operatorname{sen}^2\frac{\omega_0 t}{2}\left(\frac{\omega_x^2 + \omega_y^2}{\omega_0^2}\right)$$

ES. IX

Particella di spin $\frac{1}{2}$. Una misura per lo spin lungo $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$ dà $+\frac{\hbar}{2}$.

Calcolare, subito dopo, $\text{Prob}\left(S_z = \frac{\hbar}{2}\right)$

Per trovare $|\psi\rangle$ devo trovare $|\psi\rangle$ t.c. $\vec{n}\cdot\vec{S}|\psi\rangle = \frac{\hbar}{2}|\psi\rangle$, cioè:

$$|\psi\rangle = |+,\hat{n}\rangle$$

Devo cioè diagonalizzare $\vec{n}\cdot\vec{S} = \frac{\hbar}{2}\vec{n}\cdot\vec{\sigma} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} n_z & n_x - in_y \\ n_x + in_y & -n_z \end{pmatrix}$

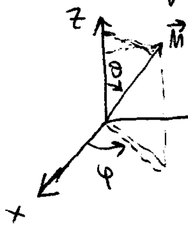
Se $\vec{n} = (\text{sen}\theta\cos\varphi, \text{sen}\theta\,\text{sen}\varphi, \cos\theta) \Rightarrow \vec{n}\cdot\vec{S} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \cos\theta & \text{sen}\theta\, e^{-i\varphi} \\ \text{sen}\theta\, e^{i\varphi} & -\cos\theta \end{pmatrix}$

Avete già visto che gli stati t.c.

$$\vec{n}\cdot\vec{S}\,|\pm,\hat{n}\rangle = \pm\frac{\hbar}{2}|\pm,\hat{n}\rangle$$

sono $|+,\hat{n}\rangle = \begin{vmatrix} \cos\frac{\theta}{2}\, e^{-i\varphi/2} \\ \text{sen}\frac{\theta}{2}\, e^{i\varphi/2} \end{vmatrix}$ $\qquad |-,\hat{n}\rangle = \begin{vmatrix} -\text{sen}\frac{\theta}{2}\, e^{-i\varphi/2} \\ \cos\frac{\theta}{2}\, e^{i\varphi/2} \end{vmatrix}$

NB $|\pm,\hat{n}\rangle$ si possono anche ricavare applicando su $|+,\hat{z}\rangle$ gli op. unitari che rappresentano una rotazione. Cioè si usa $\vec{S}$ come generatore delle rotazioni (in qs. caso rotazione dello spin)



$$|+,\hat{n}\rangle = U(R(\varphi,\vec{e}_z))\,U(R(\theta,\vec{e}_y))\,|+,\hat{z}\rangle$$

$$U(R(\alpha,\vec{n})) = e^{-i\alpha\vec{n}\cdot\vec{S}/\hbar}$$

$$\Rightarrow U(R(\theta,\vec{e}_y)) = e^{-i\theta\vec{e}_y\cdot\frac{\vec{\sigma}}{2}} = \left(\cos\frac{\theta}{2}\right) - i\,\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\sigma_y = \begin{pmatrix} \cos\theta/2 & -\text{sen}\frac{\theta}{2} \\ \text{sen}\frac{\theta}{2} & \cos\theta/2 \end{pmatrix}$$

$$U(R(\varphi,\vec{e}_z)) = e^{-i\varphi\frac{\sigma_z}{2}} = \begin{pmatrix} e^{-i\varphi/2} & 0 \\ 0 & e^{i\varphi/2} \end{pmatrix}$$

$$|+,\vec{n}\rangle = \begin{pmatrix} e^{-i\varphi/2} & 0 \\ 0 & e^{i\varphi/2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & -\text{sen}\frac{\theta}{2} \\ \text{sen}\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta/2\; e^{-i\varphi/2} \\ \text{sen}\theta/2\; e^{i\varphi/2} \end{pmatrix}$$

Quindi $|\psi\rangle = |+,\vec{n}\rangle$ $\qquad \vec{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1) = (\text{sen}\theta\cos\varphi, \text{sen}\theta\,\text{sen}\varphi, \cos\theta) \Rightarrow \cos\theta = 1/\sqrt{3}$

φ per ora non lo specifichiamo

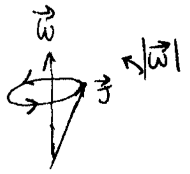
$$\text{Prob}\left(S_z = \frac{\hbar}{2}\right) = |\langle +|\psi\rangle|^2 = \left|(1,0)\begin{pmatrix} \cos\theta/2\; e^{-i\varphi/2} \\ \text{sen}\frac{\theta}{2}\; e^{i\varphi/2} \end{pmatrix}\right|^2 = \cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{1+\cos\theta}{2} = \frac{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}{2}$$

ES. XI [es. 31] "precessione di Larmor"

In meccanica classica è noto che, dato $\vec{\mu} = \gamma \vec{J}$ immerso in un campo magnetico $\vec{B}$, il moto di $\vec{\mu}$ è un moto di precessione attorno a $\vec{B}$ con frequenza $\omega_0 = -\gamma |\vec{B}|$.

Questo va sotto il nome di precessione di Larmor

schema del ragionamento: Fisica I, Meccanica ricorda: $\frac{d\vec{J}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{J}$ ha come soluzione $\vec{J}$ che precede attorno a $\frac{\vec{\omega}}{\omega}$ con frequenza ω



Fisica II: momento magnetico in campo $\vec{B}$ subisce un momento torcente $\vec{\tau} = \vec{\mu} \wedge \vec{B}$

Poiché $\vec{\tau} = \frac{d\vec{J}}{dt}$, abbiamo $\frac{d\vec{J}}{dt} = \vec{\mu} \wedge \vec{B}$

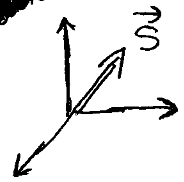
Adesso usando $\vec{J} = \frac{1}{\gamma}\vec{\mu}$, si ha: $\frac{d\vec{\mu}}{dt} = -\gamma \vec{B} \wedge \vec{\mu}$

cioè $\vec{\mu}$ precede attorno a $-\vec{B}$ con frequenza $\gamma|\vec{B}|$, ossia precede attorno a $\vec{B}$ con frequenza $-\gamma|\vec{B}| = \omega_0$

Studiamo l'analogo quantistico, supponendo x es. di avere solo gradi di libertà di spin (no $\vec{L}$, cioè $\vec{J} = \vec{S}$). Quindi:

spin $\frac{1}{2}$ in $\vec{B} = B\vec{e}_z$, con $\vec{\mu} = \frac{gq}{2mc}\vec{S} = \gamma \vec{S}$ [per elettrone $g=2$, $q = -|e|$]

$|\psi(t=0)\rangle$ t.c. $\vec{n}\cdot\vec{S}\,|\psi(t=0)\rangle = \frac{\hbar}{2}|\psi(t=0)\rangle$



$\vec{n} = \vec{n}(\theta,\varphi) = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)$

a) Verificare che al tempo t lo spin è lungo $\vec{n}(t) = \vec{n}(\theta, \varphi + \omega_0 t)$

b) Mostrare che $\langle \vec{S} \rangle(t) = \frac{\hbar}{2}\vec{n}(t)$

a) $|\psi(t=0)\rangle = |+,\hat{n}\rangle = \begin{vmatrix} \cos\frac{\theta}{2}\, e^{-i\varphi/2} \\ \sin\frac{\theta}{2}\, e^{i\varphi/2} \end{vmatrix}$

$$H = -\vec{\mu}\cdot\vec{B} = -\gamma\vec{B}\cdot\vec{S} = -\gamma B S_z = \omega_0 S_z$$

($\omega_0 = -\gamma B$, come è stato definito all'inizio)

$$|\psi(t)\rangle = e^{-iHt/\hbar}|\psi(t=0)\rangle = e^{-i\omega_0 S_z t/\hbar}\left(\cos\frac{\theta}{2}\, e^{-i\varphi/2}|+\rangle + \sin\frac{\theta}{2}\, e^{i\varphi/2}|-\rangle\right) =$$

$$= \cos\frac{\theta}{2} e^{-i\varphi/2} e^{-i\omega_0 t/2} |+\rangle + \operatorname{sen}\frac{\theta}{2} e^{i\varphi/2} e^{+i\omega_0 t/2} |-\rangle$$

$$= \begin{vmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \; e^{-\frac{i}{2}(\varphi+\omega_0 t)} \\ \operatorname{sen}\frac{\theta}{2} \; e^{\frac{i}{2}(\varphi+\omega_0 t)} \end{vmatrix}$$

Ricordando come è fatto $|+,\vec{n}\rangle$, concludiamo che $|\psi(t)\rangle$ è un autostato di $\vec{n}(t)\cdot\vec{S}$ con $\vec{n}(t) = \vec{n}(\theta, \varphi+\omega_0 t) = \vec{n}(\theta, \varphi(t))$
con $\varphi(t) = \varphi + \omega_0 t$
Cioè $\vec{S}$ è diretto lungo $\vec{n}(t)$.

b) $$\langle S_x\rangle(t) = \langle\psi(t)|S_x|\psi(t)\rangle = \left(\cos\frac{\theta}{2} e^{\frac{i}{2}\varphi(t)}, \operatorname{sen}\frac{\theta}{2} e^{-\frac{i}{2}\varphi(t)}\right) \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} e^{-\frac{i}{2}\varphi(t)} \\ \operatorname{sen}\frac{\theta}{2} e^{\frac{i}{2}\varphi(t)} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\hbar}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2} e^{\frac{i}{2}\varphi(t)}, \operatorname{sen}\frac{\theta}{2} e^{-\frac{i}{2}\varphi(t)}\right) \begin{pmatrix} \operatorname{sen}\frac{\theta}{2} e^{\frac{i}{2}\varphi(t)} \\ \cos\frac{\theta}{2} e^{-\frac{i}{2}\varphi(t)} \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} 2 \operatorname{sen}\frac{\theta}{2} \cos\frac{\theta}{2} \left(\frac{e^{i\varphi(t)} + e^{-i\varphi(t)}}{2}\right)$$

$$= \frac{\hbar}{2} \operatorname{sen}\theta \cos\varphi(t)$$

$\langle S_y\rangle(t) = \; \ldots$ farlo x esercizio $\ldots = \frac{\hbar}{2} \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi(t)$

$$\cancel{\langle S_z\rangle(t) = \frac{\hbar}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2} e^{\frac{i}{2}\varphi(t)}, \operatorname{sen}\frac{\theta}{2} e^{-\frac{i}{2}\varphi(t)}\right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \operatorname{sen}\frac{\theta}{2} e^{\frac{i}{2}\varphi(t)} \\ \cos\frac{\theta}{2} e^{-\frac{i}{2}\varphi(t)} \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}}$$

$$\langle S_z\rangle(t) = \left(\cos\frac{\theta}{2} e^{\frac{i}{2}\varphi(t)}, \operatorname{sen}\frac{\theta}{2} e^{-\frac{i}{2}\varphi(t)}\right) \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} e^{-\frac{i}{2}\varphi(t)} \\ \operatorname{sen}\frac{\theta}{2} e^{\frac{i}{2}\varphi(t)} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{\hbar}{2}\left(\cos^2\frac{\theta}{2} - \operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\hbar}{2}\cos\theta$$

$\Rightarrow$ I valori d'aspettazione di $\vec{S}$, cioè $\langle S_x\rangle, \langle S_y\rangle, \langle S_z\rangle$, evolvono nel tempo come un momento angolare classico di modulo $\frac{\hbar}{2}$ che subisce precessione di Larmor: $\langle\vec{S}\rangle(t)$ è un vettore che precede attorno a $\vec{B}$ con frequenza ω_0 -
Quindi spiego anche in MQ la precessione di Larmor di $\vec{\mu}$.

Particella di spin $\frac{1}{2}$ t.c. a $t=0$ misurando S_y dà luogo $\frac{\hbar}{2}$.

a) vettore di stato $|\psi(t=0)\rangle$

b) $H(t) = -\vec{\mu}\cdot\vec{B}(t)$, $\vec{B}(t)$ cresce linearmente con t ed è diretto lungo $\vec{e}_z$ ed è uniforme. È accesa tra 0 e T, cioè $\vec{B}(t)=0$ se $t<0$ o $t>T$.

$$\Rightarrow H(t) = \mu \frac{\omega_0 t}{T} S_z$$

Trovare $|\psi(t)\rangle$

c) Se misuro S_y a $t'>T$, discutere probabilità per S_y. Relazione tra ω_0 e T per avere risultato certo.

a) Postulato: dopo una misura, sono nell'autostato corrispondente.

$$\Rightarrow |\psi(t=0)\rangle = |+,\hat{y}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{vmatrix}1\\ i\end{vmatrix}$$

b) $$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{vmatrix}a(t)\\ b(t)\end{vmatrix}$$

Schroedinger: $$i\hbar\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = H(t)\,|\psi(t)\rangle$$

$$\cancel{\frac{i\hbar}{\sqrt{2}}}\begin{vmatrix}\dot{a}\\ \dot{b}\end{vmatrix} = \mu\frac{\omega_0 t}{T}\,\cancel{\frac{\hbar}{2}}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\cancel{\frac{1}{\sqrt{2}}}\begin{vmatrix}a\\ b\end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} i\dot{a} = \frac{\mu\omega_0 t}{2T}a \\ i\dot{b} = -\frac{\mu\omega_0 t}{2T}b \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{d}{dt}\log a = -i\frac{\mu\omega_0}{2T}t \\ \frac{d}{dt}\log b = +i\frac{\mu\omega_0}{2T}t \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log a(t) - \log a(0) = -i\frac{\mu\omega_0}{4T}t^2 \\ \dots \end{cases} \qquad \begin{cases} a(t) = a(0)\,e^{-i\frac{\mu\omega_0}{4T}t^2} \\ b(t) = b(0)\,e^{i\frac{\mu\omega_0}{4T}t^2} \end{cases}$$

Quindi, guardando solo $t>0$ e inserendo $a(0)=1$, $b(0)=i$

$$|\psi(t)\rangle = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{vmatrix}e^{-i\frac{\mu\omega_0}{4T}t^2}\\ i\,e^{i\frac{\mu\omega_0}{4T}t^2}\end{vmatrix} & 0\le t\le T \\ |\psi(T)\rangle & t>T \quad (\vec{B}=0 \Rightarrow H=0) \end{cases}$$

c) Al solito, S_y può valere $\pm \frac{\hbar}{2}$.

$$\text{Prob}\left(S_y = \frac{\hbar}{2} \,;\, t'\right) = \left|\langle +,\hat{y} | \psi(t')\rangle\right|^2 = \qquad \Big\} \; t' > T$$

$$= \left|\langle +,\hat{y} | \psi(T)\rangle\right|^2 =$$

$$= \left| \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -i) \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} e^{-i \frac{\mu\omega_0}{4T} T^2} \\ i e^{i \frac{\mu\omega_0}{4T} T^2} \end{vmatrix} \right|^2 =$$

$$= \frac{1}{4}\left| e^{-i\frac{\mu\omega_0 T}{4}} + e^{+i\frac{\mu\omega_0}{4}T} \right|^2 =$$

$$= \frac{1}{4}\left(2\cos\frac{\mu\omega_0 T}{4}\right)^2 = \cos^2\left(\frac{\mu\omega_0 T}{4}\right)$$

$$\text{Prob}\left(S_y = -\frac{\hbar}{2} \,;\, t'\right) = \ldots \text{ conti } =$$

$$= 1 - \text{Prob}\left(S_y = +\frac{\hbar}{2} \,;\, t'\right) =$$

$$= \text{sen}^2\left(\frac{\mu\omega_0 T}{4}\right)$$

Ho un risultato certo se $\frac{\mu\omega_0 T}{4} = \frac{m\pi}{2}$ $\left(\begin{array}{l} m \text{ pari} \Rightarrow S_y = \frac{\hbar}{2} \\ m \text{ dispari} \Rightarrow S_y = -\frac{\hbar}{2} \end{array}\right)$

ES. XIII [es. 11] Destri 23/07/2007

Particella di spin $\frac{1}{2}$, ad un certo t è t.c.

$$\psi(r,\theta,\varphi) = A e^{-r/r_0} \begin{pmatrix} 1 \\ \text{sen}\varphi \end{pmatrix} = A e^{-r/r_0}\left[|+\rangle + \text{sen}\varphi\, |-\rangle\right]$$

(scelto z come asse di quantizzazione per lo spin)

Trovare $\text{Prob}(J_z)$, con $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$.

$$\psi = f(r)\,\tilde{\psi}(\theta,\varphi) \quad , \text{ con } \tilde{\psi}(\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} 1 \\ \text{sen}\varphi \end{pmatrix} \qquad = |+\rangle + \text{sen}\vartheta\, |-\rangle$$

cioè: $\tilde{\psi}(\theta,\varphi) = |+\rangle + \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}\,|-\rangle$

ATTENZIONE: NON TENTARE DI SVILUPPARE $\text{sen}\varphi$ SULLE $Y_{\ell m}$, SAREBBERO ∞. QUI MI SERVE SOLO L_z.

$\hat{L}_z = -i\hbar \frac{d}{d\varphi}$, autofunzioni normalizzate: $\Phi_m(\varphi) = \frac{e^{im\varphi}}{\sqrt{2\pi}}$ $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, $L_z = m\hbar$

Quindi:

$$\tilde{\psi}(\theta,\varphi) = \sqrt{2\pi}\left[\,\Phi_0(\varphi)|+\rangle + \frac{1}{2i}\,\Phi_1(\varphi)\,|-\rangle - \frac{1}{2i}\,\Phi_{-1}(\varphi)\,|-\rangle\right]$$

Per evitare confusione: $|+\rangle \mapsto |\tfrac{1}{2}\rangle$
$|-\rangle \mapsto |-\tfrac{1}{2}\rangle$

Poi, in notazione di Dirac: $\Phi_m(\varphi) = \langle\varphi|m\rangle$, quindi:

$$|\tilde{\psi}\rangle = \sqrt{2\pi}\left[\,|0,\tfrac{1}{2}\rangle + \frac{1}{2i}\,|1,-\tfrac{1}{2}\rangle - \frac{1}{2i}\,|-1,-\tfrac{1}{2}\rangle\right]$$

con $|\ \rangle = |m_e, m_s\rangle$

NB Formalmente sto facendo composizione di due momenti angolari, quindi:
$|m_e, m_s\rangle = |m_e\rangle \otimes |m_s\rangle$. Lo vedremo meglio nella discussione singoletto-tripletto.

Adesso è ovvio capire a che valore di J_z corrisponde ciascun termine:

$$J_z\,|0,\tfrac{1}{2}\rangle = (L_z + S_z)|0,\tfrac{1}{2}\rangle = 0\,|0,\tfrac{1}{2}\rangle + \tfrac{\hbar}{2}|0,\tfrac{1}{2}\rangle = \tfrac{\hbar}{2}\,|0,\tfrac{1}{2}\rangle$$

$$J_z\,|1,-\tfrac{1}{2}\rangle = (L_z + S_z)|1,-\tfrac{1}{2}\rangle = \hbar\,|1,-\tfrac{1}{2}\rangle - \tfrac{\hbar}{2}|1,-\tfrac{1}{2}\rangle = \tfrac{\hbar}{2}|1,-\tfrac{1}{2}\rangle$$

$$J_z\,|-1,-\tfrac{1}{2}\rangle = -\tfrac{3}{2}\hbar\,|-1,-\tfrac{1}{2}\rangle$$

cioè, in generale: $J_z\,|m_e, m_s\rangle = (m_e + m_s)\hbar\,|m_e, m_s\rangle$

$$\mathrm{Prob}(J_z = \tfrac{\hbar}{2}) = \frac{1 + \left|\frac{1}{2i}\right|^2}{1 + \left|\frac{1}{2i}\right|^2 + \left|\frac{-1}{2i}\right|^2} = \frac{5/4}{6/4} = \frac{5}{6}$$

$$\mathrm{Prob}(J_z = -\tfrac{3}{2}\hbar) = \frac{\left|\frac{-1}{2i}\right|^2}{1 + |\ |^2 + |\ |^2} = \frac{1/4}{6/4} = \frac{1}{6}$$

ES. XIV [es.24] W.S., es. 3021 (pag 200) (Singoletto-Tripletto)

Due particelle di spin $\frac{1}{2}$ sono descritte da

$$H = A(S_{1z} + S_{2z}) + B\,\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2$$

$\vec{S}_1$ spin particella 1
$\vec{S}_2$ " " 2

Trovare spettro di H e autostati dell'energia

Lo spazio di Hilbert è 4 dimensionale, infatti una base di $\mathcal{H}$ è ovviamente data da $\{|++\rangle, |+-\rangle, |-+\rangle, |--\rangle\}$ con $|\ \rangle = |m_1, m_2\rangle$

$(|\pm\rangle = |\tfrac{\pm 1}{2}\rangle)$

$\vec{S}_1^{\,2}$ e $\vec{S}_2^{\,2}$ sono diagonali poiché s_1 e s_2 sono 1/2.
Quindi, su qualunque stato $\in \mathcal{H}_{\text{HILBERT}}$,
$\vec{S}_1^{\,2} = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1)\hbar^2 = \frac{3}{4}\hbar^2$
$\vec{S}_2^{\,2} = \ \cdots \ = \frac{3}{4}\hbar^2$

La base mostrata sopra non diagonalizza H, infatti ad esempio $\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 |++\rangle = ?$

$$H = A(S_{1z} + S_{2z}) + B\,\frac{(\vec{S}_1 + \vec{S}_2)^2 - \vec{S}_1^{\,2} - \vec{S}_2^{\,2}}{2} =$$

$$= A(S_{1z} + S_{2z}) + \frac{B}{2}(\vec{S}_1 + \vec{S}_2)^2 - \frac{B}{2}\cdot 2 \cdot \frac{3}{4}\hbar^2$$

Quindi se definisco $\vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2$, (che implica anche $S_z = S_{1z} + S_{2z}$),

$$\boxed{H = A S_z + \frac{B}{2}\vec{S}^{\,2} - \frac{3}{4}B\hbar^2}$$

↑ come operatore, è un multiplo dell'identità.

→ DISCUSSIONE GENERALE: INIZIO ←

Quindi adesso diagonalizzare H significa trovare autostati simultanei di S_z e $\vec{S}^{\,2}$. È possibile, infatti $[\vec{S}^{\,2}, S_z] = 0$ (farlo x esercizio)

Si usa la teoria generale della composizione dei momenti angolari:

$$\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2 \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} j = |j_1 - j_2|, |j_1 - j_2| + 1, \ldots, j_1 + j_2 \\ m_j = m_{j_1} + m_{j_2} \quad \cdot \text{Fissato } j, |m_j| \le j \end{cases}$$

NUMERI QUANTICI CHE POSSONO ESSERE ASSUNTI DA $\vec{J}$

In termini di ket, x il nostro caso: ← $\vec{J}$ È ANCORA MOM. ANGOLARE x $[J_i, J_j] = i\hbar\,\varepsilon_{ijk} J_k$ (24)

due spin $\frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ $s_1 \ (=j_1) = \frac{1}{2}$, $s_2 \ (=j_2) = \frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ prodotto tensoriale tra $\mathcal{H}_{s_1}$ e $\mathcal{H}_{s_2}$:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{s_1} \otimes \mathcal{H}_{s_2} = [s_1] \otimes [s_2]$$

$$|s_1; m_1\rangle = \begin{matrix} |\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\rangle_{(1)} \\ |\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\rangle_{(1)} \end{matrix} \qquad |s_2; m_2\rangle = \begin{matrix} |\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\rangle_{(2)} \\ |\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\rangle_{(2)} \end{matrix}$$

$|m_1, m_2\rangle$ è un modo 'veloce' per indicare

$$|\tfrac{1}{2}; m_1\rangle_{(1)} \otimes |\tfrac{1}{2}; m_2\rangle_{(2)}$$

$[s_1]$ indica $\mathcal{H}_{s_1} = \mathrm{Span}\left(|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle_{(1)}, |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle_{(1)}\right)$ e idem per $[s_2]$

prodotto cartesiano

NB $$\mathbf{U} \otimes \mathbf{V} \overset{\text{def.}}{=} \mathrm{Span}\left(\{u_1, \dots, u_m\} \times \{v_1, \dots, v_m\}\right)$$

base $\{u_1, \dots, u_m\}$ base $\{v_1, \dots, v_m\}$

$\Rightarrow$ ovviamente, $\dim(U \otimes V) = \dim(U) \cdot \dim(V)$

$$[\tfrac{1}{2}]_{(1)} \otimes [\tfrac{1}{2}]_{(2)} = \mathrm{Span}\left(\{|+\rangle_{(1)}, |-\rangle_{(1)}\} \times \{|+\rangle_{(2)}, |-\rangle_{(2)}\}\right) =$$

$$= \mathrm{Span}\left(|++\rangle, |+-\rangle, |-+\rangle, |--\rangle\right)$$

Dalla teoria generale, + formalmente:

$\cancel{[\frac{1}{2}] \otimes [\frac{1}{2}] = [0] \oplus [1]}$

$$[j_1] \otimes [j_2] = \bigoplus_{j=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} [j]$$

$\{|j_1; m_1\rangle\}$ $\{|j_2; m_2\rangle\}$ $\{|j; m\rangle\}$

in generale, x 2 momenti angolari j_1 e j_2

$$[\tfrac{1}{2}] \otimes [\tfrac{1}{2}] = [0] \oplus [1]$$

x il nostro caso

$|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$ $|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$ $|0,0\rangle$ $|1 1\rangle$

$|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle$ $|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle$ $|1 0\rangle$

$|1 -1\rangle$

basi dei vari spazi vettoriali in gioco

NB Somma diretta ($\oplus$) perché, avendo j DIVERSI, SONO SPAZI

<u>NB</u> $U \oplus V$, se $U \cap V = \{\underline{0}\}$ (cioè sp. vett. disgiunti)

$$U \oplus V \stackrel{def}{=} \text{Span}\left(\{u_1 \dots u_m\} \cup \{v_1 \dots v_m\}\right)$$

$\Rightarrow$ evidentemente $\dim(U \oplus V) = \dim(U) + \dim(V)$

In generale, vale anche che, definito $\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2 \Rightarrow \{\vec{J}^2, J_z\}$

e si ha: $\vec{J}^2 \, |j;m\rangle = j(j+1)\hbar^2 \, |j,m\rangle$

$$J_z \, |j;m\rangle = m\hbar \, |j;m\rangle$$

cioè gli stati $|j,m\rangle$ sono <u>AUTOSTATI</u> <u>SIMULTANEI</u> di $\vec{J}^2$ e J_z.

Quindi nel nostro caso: $\vec{J}_1 = \vec{S}_1$, $\vec{J}_2 = \vec{S}_2$, $\vec{J} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2 = \vec{S}$

$$\begin{cases} \vec{S}^2 \, |1;m\rangle = 1(1+1)\hbar^2 \, |1;m\rangle = 2\hbar^2 \, |1;m\rangle \\ \vec{S}^2 \, |0;0\rangle = 0 \\ S_z \, |1;m\rangle = m\hbar \, |1;m\rangle \\ S_z \, |0;0\rangle = 0 \end{cases}$$

Rimane da stabilire il legame tra $\{|++\rangle, |+-\rangle, |-+\rangle, |--\rangle\}_{m_1 m_2}$ e $\{|00\rangle, \{|11\rangle, |10\rangle, |1-1\rangle\}\}_{j,m}$, essendo entrambe basi di $\mathcal{H}$.

Per farlo si usa il fatto che $\vec{J}$ è un mom. angolare, nel senso che $[J_i, J_j] = i\hbar \, \varepsilon_{ijk} J_k$. Quindi

$$J_\pm = J_x \pm i J_y = (J_{1x} + J_{2x}) \pm i (J_{1y} + J_{2y}) = J_{1\pm} + J_{2\pm}$$ $\left(\begin{array}{l} J_+ = J_{1+} + J_{2+} \\ J_- = J_{1-} + J_{2-} \end{array} \right)$

e sappiamo come $J_\pm$ agisce su $|j,m\rangle$

come J_{1+} " " $|j_1, m_1\rangle$

come J_{2+} " " $|j_2, m_2\rangle$

(infatti ricordiamo che $J_\pm \, |j m\rangle = \hbar \sqrt{j(j+1) - m(m\pm1)} \, |j, m\pm1\rangle$)

Specializziamoci al nostro caso:

$$S_\pm = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{agiscono sol} \\ \text{su } (s_1 m_1)}}{S_{1\pm}} + \underset{\nwarrow \text{ agiscono sol su } (s_2 m_2)}{S_{2\pm}}$$

$$\boxed{|11\rangle = |++\rangle}$$ (è l'unico modo che ho per ottenere $m=1$, valendo come sempre $m = m_1 + m_2$)

$$\begin{cases} S_-|11\rangle = \hbar\sqrt{1(1+1)-0}\;|10\rangle = \hbar\sqrt{2}\,|10\rangle \\ S_{1-}|++\rangle = \hbar\sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}\;|-+\rangle = \hbar\,|-+\rangle \\ S_{2-}|++\rangle = \;\;\dots\;\; = \hbar\,|+-\rangle \end{cases} \Rightarrow \hbar\sqrt{2}|10\rangle = \hbar|-+\rangle + \hbar|+-\rangle$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{|10\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+-\rangle + |-+\rangle\right)}$$

Applicando S_- a $|10\rangle$, arrivo a trovare $|1-1\rangle$, che ci aspettiamo essere $|--\rangle$. Verifichiamolo:

$$\begin{cases} S_-|10\rangle = \hbar\sqrt{2}\,|1-1\rangle \\ S_{1-}|+-\rangle = \hbar\,|--\rangle \qquad S_{1-}|-+\rangle = 0 \\ S_{2-}|-+\rangle = \hbar\,|--\rangle \qquad S_{2-}|+-\rangle = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \hbar\sqrt{2}\,|1-1\rangle = S_{1-}\left(\frac{|+-\rangle + |-+\rangle}{\sqrt{2}}\right) + S_{2-}\left(\frac{|+-\rangle + |-+\rangle}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\hbar\sqrt{2}\,|1-1\rangle = \frac{|--\rangle}{\sqrt{2}} + \frac{|--\rangle}{\sqrt{2}}$$

$$\boxed{|1-1\rangle = |--\rangle}$$

Per trovare $|00\rangle$, ci si ricorda che deve essere $\perp$ sia a $|11\rangle$, sia a $|10\rangle$, sia a $|1-1\rangle$

$$\Rightarrow \boxed{|00\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+-\rangle - |-+\rangle\right)}$$

$\{|11\rangle, |10\rangle, |1-1\rangle\}$ "tripletto" $\qquad |00\rangle$ "singoletto"

→ DISCUSSIONE GENERALE : FINE ←

NOTARE SIMM/ANTISIMM × SCAMBIO PARTICELLE. PRINCIPIO DI ESCLUSIONE DI PAULI E STATI TOTALM. ANTISIMM, ... [struttura della materia]

COMPOSIZIONE DI DUE MOMENTI ANGOLARI $\vec{J}_1$ e $\vec{J}_2$: RIASSUNTO

$V_{j_1} \rightarrow \{|j_1, m_1\rangle\}$ con $m_1 = -j_1, -j_1+1, \dots, j_1$

$V_{j_2} \rightarrow \{|j_2, m_2\rangle\}$ con $m_2 = -j_2, -j_2+1, \dots, j_2$

Cerco base di $V_{j_1} \otimes V_{j_2}$

Vale che (teoria generale) $$V_{j_1} \otimes V_{j_2} = \bigoplus_{j=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} V_j$$

con $V_j \rightarrow \{|j,m\rangle\}$ con $m = -j, -j+1, \dots, j$

Tutti i V_j sono $\perp$ l'uno rispetto all'altro, somma diretta

Sempre dalla teoria generale, vale anche che, se $\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2$:

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{J}^2 |j,m\rangle = j(j+1)\hbar^2 |j,m\rangle \\ J_z |j,m\rangle = m\hbar |j,m\rangle \end{cases}$$

cioè $\{|j,m\rangle\}$ sono gli autostati del momento angolare totale.

CASO PARTICOLARE: SOMMA DI DUE SPIN $\frac{1}{2}$

Tutto come sopra, con le seguenti sostituzioni:

$j_1 \rightarrow s_1 = \frac{1}{2}$
$j_2 \rightarrow s_2 = \frac{1}{2}$
$j \rightarrow s$

$$V_{\frac{1}{2}} \otimes V_{\frac{1}{2}} = V_0 \oplus V_1$$

$$\underset{V_{\frac{1}{2}}}{\underset{\cap}{|\tfrac{1}{2}, \pm\tfrac{1}{2}\rangle_{(1)}}} \otimes \underset{V_{\frac{1}{2}}}{\underset{\cap}{|\tfrac{1}{2}, \pm\tfrac{1}{2}\rangle_{(2)}}} \qquad \underset{V_0}{\underset{\cap}{|0,0\rangle}} \qquad \underset{V_1}{\underset{\cap}{\{|1,m\rangle\}_{m=0,\pm1}}}$$

$$\vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{S}^2 \, |s,m\rangle = s(s+1)\hbar^2 \, |s,m\rangle \\ S_z \, |s,m\rangle = m\hbar \, |s,m\rangle \end{cases}$$

Per esprimere $|0,0\rangle$ e $\{|1,m\rangle\}$ in funzione

di $\{|\tfrac{1}{2}, \pm\tfrac{1}{2}\rangle_{(1)}\} \otimes \{|\tfrac{1}{2}, \pm\tfrac{1}{2}\rangle_{(2)}\}$

1) si osserva che $|1,1\rangle = |++\rangle$
2) si applica S_- a $|11\rangle$ e $S_{1-} + S_{2-}$ a $|++\rangle$
ricordando che $S_- = S_{1-} + S_{2-}$
3) si uguagliano i risultati. Per $|--\rangle$ si applicano 1) 2) 3) a $|1,0\rangle$.
4) $|00\rangle$ si trova come stato ortogonale
a $|1,1\rangle$, $|1,0\rangle$ e $|1,-1\rangle$ trovati in precedenza

$$|0,0\rangle = \frac{|+-\rangle - |-+\rangle}{\sqrt{2}}$$ singoletto

$$\left.\begin{aligned} |1,1\rangle &= |++\rangle \\ |1,0\rangle &= \frac{|+-\rangle + |-+\rangle}{\sqrt{2}} \\ |1,-1\rangle &= |--\rangle \end{aligned}\right\} \text{tripletto}$$

Tornando all'esercizio:

$$H = A S_z + \frac{B}{2} \vec{S}^2 - \frac{3}{4} B \hbar^2$$

è funzione di S_z e $\vec{S}^2$ e gli stati di singoletto e tripletto sono autostati simultanei di S_z e $\vec{S}^2$. Quindi sono anche autostati di questa H.

Spettro:

		S^2	S_z		H (E_i)
tripletto	$\vert 11\rangle \to$	$2\hbar^2$	$\hbar$	$\to$	$A\hbar + B\hbar^2 - \frac{3}{4}B\hbar^2 = A\hbar + \frac{B}{4}\hbar^2$
	$\vert 10\rangle \to$	$2\hbar^2$	0	$\to$	$B\hbar^2 - \frac{3}{4}B\hbar^2 = \frac{B}{4}\hbar^2$
	$\vert 1{-1}\rangle \to$	$2\hbar^2$	$-\hbar$	$\to$	$-A\hbar + B\hbar^2 - \frac{3}{4}B\hbar^2 = -A\hbar + \frac{B}{4}\hbar^2$
singoletto	$\vert 00\rangle \to$	0	0	$\to$	$-\frac{3}{4}B\hbar^2$

ES. XV [es. 27] Tannoudji, es. 5.23 (pag. 150)

Due particelle non identiche di spin $\frac{1}{2}$. $S_{1x} = \frac{\hbar}{2}$, $S_{2y} = -\frac{\hbar}{2}$

Calcolare $\text{Prob}(s=1, m_s=0)$

$$|\psi\rangle = |+,\hat{x}\rangle_{(1)} \otimes |-,\hat{y}\rangle_{(2)}$$

con $|+,\hat{x}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle + |-\rangle)$

$|-,\hat{y}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle - i|-\rangle)$

$$\Rightarrow |\psi\rangle = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle_{(1)} + |-\rangle_{(1)}\right)\right] \otimes \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle_{(2)} - i|-\rangle_{(2)}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[|++\rangle + |-+\rangle - i|+-\rangle - i|--\rangle\right]$$

$(|m_1, m_2\rangle)$, cioè $(|m_{s_1}, m_{s_2}\rangle)$

Decompongo $|\psi\rangle$ su stati di singoletto e tripletto:

$|11\rangle = |++\rangle$

$|1{-1}\rangle = |--\rangle$

$|10\rangle = \frac{|+-\rangle + |-+\rangle}{\sqrt{2}}$

$|00\rangle = \frac{|+-\rangle - |-+\rangle}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow$ $|+-\rangle = \frac{|10\rangle + |00\rangle}{\sqrt{2}}$

$|-+\rangle = \frac{|10\rangle - |00\rangle}{\sqrt{2}}$

Quindi:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{2}\left[|11\rangle - i|1-1\rangle + \frac{|10\rangle - |00\rangle}{\sqrt{2}} - i\,\frac{|10\rangle + |00\rangle}{\sqrt{2}} \right]$$

$$\text{Prob}\,(s=1;\, m_s=0) = \left| \langle 10|\psi\rangle \right|^2 = \left| \text{coeff di } |10\rangle \right|^2 =$$

$$= \frac{1}{4}\left|\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\right|^2 = \frac{1}{4}\cdot 1 = \frac{1}{4}$$

ES. XVI [es 28]

Due particelle di spin $\frac{1}{2}$ con momenti magnetici $\vec{\mu}_1$ e $\vec{\mu}_2$ immerse in $\vec{B}$

$H = -\vec{\mu}_1\cdot\vec{B} - \vec{\mu}_2\cdot\vec{B}$

Al $t=0$, il sistema è in singoletto. Calcolare Prob (tripletto ; t)

Scelgo $\vec{B} = B\vec{e}_3$ lungo l'asse di quantizz. dello spin (come sempre)

$$H = -\mu_1 B S_{1z} - \mu_2 B S_{2z}$$

$$|\psi(t=0)\rangle = |00\rangle = \frac{|+-\rangle - |-+\rangle}{\sqrt{2}}$$

$$H|+-\rangle = B\frac{\hbar}{2}(\mu_2-\mu_1)|+-\rangle$$

$$H|-+\rangle = B\frac{\hbar}{2}(\mu_1-\mu_2)|-+\rangle$$

$$|\psi(t)\rangle = e^{-iHt/\hbar}\,\frac{|+-\rangle - |-+\rangle}{\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{-i\frac{B}{2}(\mu_2-\mu_1)t}|+-\rangle - e^{i\frac{B}{2}(\mu_2-\mu_1)t}|-+\rangle \right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{-i(\dots)}\frac{|10\rangle + |00\rangle}{\sqrt{2}} - e^{i(\dots)}\frac{|10\rangle - |00\rangle}{\sqrt{2}} \right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(e^{-i(\dots)} - e^{i(\dots)}\right)|10\rangle + \left(e^{-i(\dots)} + e^{i(\dots)}\right)|00\rangle \right] =$$

$$= -i\,\text{sen}\left(\frac{B}{2}(\mu_2-\mu_1)t\right)|10\rangle + \cos\left(\frac{B}{2}(\mu_2-\mu_1)t\right)|00\rangle$$

$$\text{Prob}\,(\text{tripletto};t) = \text{Prob}\,(|10\rangle;t) = \text{sen}^2\left(\frac{B}{2}(\mu_2-\mu_1)t\right)$$