ES I [es. 3] Destri 12/09/2007

A $t=0$ la ψ di una particella di spin 0 è:

$$\psi(\vec{x},t=0) = \frac{f(r)}{\sqrt{8\pi}}\left(1+\frac{x+iy+z}{r}\right) \qquad \text{con} \qquad \int_0^{+\infty} dr\, r^2\, |f(r)|^2 = 1$$

i) Distribuzioni di probabilità per L_z e $\vec{L}^2$

ii) Se $H = gL_z$, calcolare $\psi(\vec{x},t)$

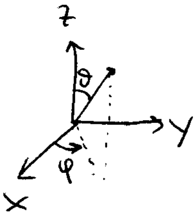
iii) $\langle\vec{L}\rangle(t)$

i) Devo decomporre ψ nelle autofunzioni di L_z e $\vec{L}^2$. Sappiamo che sono le armoniche sferiche. Poiché abbiamo in ψ polinomi di grado 0 e 1, ci aspettiamo $\ell = 0,1$.

Dalle note di Alcari:

$$Y_{00} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \qquad Y_{1-1} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{6}{\pi}}\,\text{sen}\theta\, e^{-i\varphi} \qquad Y_{10} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{\pi}}\cos\theta \qquad Y_{11} = -\frac{1}{4}\sqrt{\frac{6}{\pi}}\,\text{sen}\theta\, e^{i\varphi}$$

$\psi(\vec{x},t=0) = f(r)\,\tilde{\psi}(\theta,\varphi)$ e per ciò che dobbiamo discutere ci interessa solo $\tilde{\psi}(\theta,\varphi)$:



$$\tilde{\psi}(\theta,\varphi) = \frac{1}{\sqrt{8\pi}}\left[1+\frac{x+iy+z}{r}\right] = \frac{1}{\sqrt{8\pi}}\left[1+\text{sen}\theta(\cos\varphi + i\,\text{sen}\varphi)+\cos\theta\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{8\pi}}\left[1+\text{sen}\theta\, e^{i\varphi}+\cos\theta\right] = \frac{1}{\sqrt{8\pi}}\left[2\sqrt{\pi}\,Y_{00} - 4\sqrt{\frac{\pi}{6}}\,Y_{11} + 2\sqrt{\frac{\pi}{3}}\,Y_{10}\right]$$

$$= \frac{Y_{00}}{\sqrt{2}} - \frac{Y_{11}}{\sqrt{3}} + \frac{Y_{10}}{\sqrt{6}} = \sum_{\ell m} c_{\ell m} Y_{\ell m}(\theta,\varphi) \qquad \text{con} \quad c_{00} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad c_{11} = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad c_{10} = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

[In notazione di Dirac: $|\tilde{\psi}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle - \frac{1}{\sqrt{3}}|11\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}}|10\rangle$ con $|\rangle = |\ell m\rangle$]

Notiamo che $\tilde{\psi}$ è normalizzata a 1, come ci aspettavamo dal fatto che $f(r)$ lo era.

$$\text{Prob}(L_z=0) = |c_{00}|^2 + |c_{10}|^2 = \frac{1}{2}+\frac{1}{6} = \frac{2}{3} \qquad \text{Prob}(L_z=+\hbar) = |c_{11}|^2 = \frac{1}{3}$$

$$\text{Prob}(\vec{L}^2=0) = \text{Prob}(\ell=0) = |c_{00}|^2 = \frac{1}{2} \qquad \text{Prob}(\vec{L}^2=2\hbar^2) = \text{Prob}(\ell=1) = |c_{11}|^2+|c_{10}|^2 = \frac{1}{3}+\frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

ii) $H = g L_z$

$$\psi(\vec{x},t) = e^{-iHt/\hbar}\, \psi(\vec{x},t=0) = e^{-igL_z t/\hbar}\, f(r)\, \tilde{\Psi}(\theta,\varphi) =$$

$$= f(r)\, e^{-igL_z t/\hbar} \left[\frac{Y_{00}}{\sqrt{2}} - \frac{Y_{11}}{\sqrt{3}} + \frac{Y_{10}}{\sqrt{6}} \right] =$$

$$= f(r) \left[\frac{Y_{00}}{\sqrt{2}} - \frac{e^{-igt}}{\sqrt{3}} Y_{11} + \frac{Y_{10}}{\sqrt{6}} \right] \qquad \leftarrow \text{Z}$$

In notazione di Dirac: $|\tilde{\Psi}(t)\rangle = \frac{|00\rangle}{\sqrt{2}} + \frac{|10\rangle}{\sqrt{6}} - \frac{e^{-igt}}{\sqrt{3}} |11\rangle$

iii) Per calcolare $\langle \vec{L} \rangle(t)$, guardo solo la parte angolare di ψ, cioè $\tilde{\Psi}$.
Questo xké $\vec{L} f(r) \tilde{\Psi}(\theta,\varphi) = f(r) \vec{L} \tilde{\Psi}(\theta,\varphi)$, cioè $\vec{L}$ è non banale solo sulle coordinate angolari (θ,φ). Inoltre in qs. caso solo $\tilde{\Psi}(\theta,\varphi)$ evolve nel tempo.

$$\langle L_z \rangle(t) = \langle \tilde{\Psi}(t)|L_z|\tilde{\Psi}(t)\rangle = \left(\frac{\langle 00|}{\sqrt{2}} + \frac{\langle 10|}{\sqrt{6}} - \frac{e^{igt}}{\sqrt{3}} \langle 11| \right) L_z \left(\frac{|00\rangle}{\sqrt{2}} + \frac{|10\rangle}{\sqrt{6}} - \frac{e^{-igt}}{\sqrt{3}} |11\rangle \right)$$

$$= \left(\qquad \right) \hbar \left(-\frac{e^{-igt}}{\sqrt{3}} |11\rangle \right) =$$

1) Sopravvive solo $\langle 11| \quad |11\rangle$

$$= \frac{\hbar}{3}$$

Per L_z era banale xké avevamo la $|\tilde{\Psi}\rangle$ espansa in autostati di L_z.

Per calcolare $\langle L_{x,y} \rangle(t)$ usiamo gli operatori L_+ e L_-: sappiamo come agiscono sugli autostati di $\{L^2, L_z\}$:

$$L_\pm |l m\rangle = \hbar \sqrt{l(l+1) - m(m\pm1)}\, |l\ m\pm1\rangle$$

(ricordiamo che $L_+|ll\rangle = 0$, $L_-|l\,-l\rangle = 0$)

e sappiamo anche che $L_x = \frac{L_+ + L_-}{2}$ $\qquad L_y = \frac{L_+ - L_-}{2i}$

$$\langle L_+ \rangle(t) = \left(\frac{\langle 00|}{\sqrt{2}} + \frac{\langle 10|}{\sqrt{6}} - \frac{e^{igt}}{\sqrt{3}} \langle 11| \right) L_+ \left(\frac{|00\rangle}{\sqrt{2}} + \frac{|10\rangle}{\sqrt{6}} - \frac{e^{-igt}}{\sqrt{3}} |11\rangle \right) =$$

$$= \left(\qquad \right) \left(0 + \frac{1}{\sqrt{6}} \hbar \sqrt{2}\, |11\rangle + 0 \right) =$$

$$= -\frac{\hbar}{3} e^{igt}$$

$\langle L_- \rangle (t)$ si calcola in modo analogo. Però possiamo anche osservare che

$$\langle L_- \rangle (t) = \langle \tilde{\Psi}(t) | L_- | \tilde{\Psi}(t) \rangle = \left(\langle \tilde{\Psi}(t) | (L_-)^+ | \tilde{\Psi}(t) \rangle \right)^* =$$

$$= \left(\langle \tilde{\Psi}(t) | L_+ | \tilde{\Psi}(t) \rangle \right)^* = -\frac{\hbar}{3} e^{-igt}$$

Quindi adesso:

$$\langle L_x \rangle (t) = \langle \frac{L_+ + L_-}{2} \rangle (t) = \frac{1}{2} \left(-\frac{\hbar}{3} \right) \left(e^{igt} + e^{-igt} \right) = -\frac{\hbar}{3} \cos(gt)$$

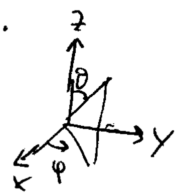
$$\langle L_y \rangle (t) = \langle \frac{L_+ - L_-}{2i} \rangle (t) = \frac{1}{2i} \left(-\frac{\hbar}{3} \right) \left(e^{igt} - e^{-igt} \right) = -\frac{\hbar}{3} \operatorname{sen}(gt)$$

ES. II [9.2] W.S. es. 3006, (pag 176)

Particella spinless t.c. $\psi = K(x+y+2z) e^{-\alpha r}$, $\alpha, k \in \mathbb{R}$, $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

a) $\vec{L}^2$
b) $\langle L_z \rangle$
c) $Prob(L_z)$
d) $Prob((\theta,\varphi) \in d\Omega)$

a) Essendoci solo polinomi di primo grado, ci aspettiamo che $\ell = 1$.
Lo verifichiamo, scrivendo in coord. sferiche



$$\psi = K r e^{-\alpha r} \left(\frac{x}{r} + \frac{y}{r} + 2\frac{z}{r} \right) =$$

$$= K r e^{-\alpha r} \left[\frac{1}{2}\left(\frac{x+iy}{r}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{x-iy}{r}\right) + \frac{1}{2i}\left(\frac{x+iy}{r}\right) - \frac{1}{2i}\left(\frac{x-iy}{r}\right) + 2\frac{z}{r} \right] =$$

$$= K r e^{-\alpha r} \left[\frac{1}{2} \operatorname{sen}\theta\, e^{i\varphi} + \frac{1}{2} \operatorname{sen}\theta\, e^{-i\varphi} + \frac{1}{2i} \operatorname{sen}\theta\, e^{i\varphi} - \frac{1}{2i} \operatorname{sen}\theta\, e^{-i\varphi} + 2\cos\theta \right] =$$

$$= K r e^{-\alpha r} \left[\frac{1}{2} \operatorname{sen}\theta\, e^{i\varphi} (1-i) + \frac{1}{2} \operatorname{sen}\theta\, e^{-i\varphi} (1+i) + 2\cos\theta \right] =$$

Note Oleari

$$= K r e^{-\alpha r} \left[\frac{(1-i)}{2} \left(-4\sqrt{\frac{\pi}{6}}\right) Y_{11} + \frac{(1+i)}{2} \left(4\sqrt{\frac{\pi}{6}}\right) Y_{1-1} + 2\left(2\sqrt{\frac{\pi}{3}}\right) Y_{10} \right] =$$

$$= K r e^{-\alpha r} \sqrt{\frac{\pi}{3}} \left[\sqrt{2}(i-1) Y_{11} + \sqrt{2}(i+1) Y_{1-1} + 4 Y_{10} \right] =$$

NB si può arrivare direttamente usando le note di Oleari che danno già decomposizione dei polinomi.

$$= f(r) \left[C_{10} Y_{10} + C_{11} Y_{11} + C_{1-1} Y_{1-1} \right]$$

con $C_{10} = 4$ $\quad C_{11} = \sqrt{2}(i-1)$ $\quad C_{1-1} = \sqrt{2}(i+1)$

Quindi essendoci solo Y_{lm} con $l=1$, si ha che
$L^2 = 1(1+1)\hbar^2 = 2\hbar^2$, con probabilità 1.

b-c) Cominciamo calcolando $\mathrm{Prob}(L_z)$.
Poiché L_z è non banale solo sulla parte angolare della ψ, basta considerare $\tilde{\Psi}(\theta,\varphi) = \sum_{m} c_{lm} Y_{lm}$. Attenzione che adesso $\tilde{\Psi}$ non è normalizzata a 1.

$$\mathrm{Prob}(L_z = \hbar) = \frac{|c_{11}|^2}{\langle\tilde{\Psi}|\tilde{\Psi}\rangle} = \frac{|c_{11}|^2}{\int d\Omega\, |\tilde{\Psi}|^2} =$$

$$= \frac{|c_{11}|^2}{|c_{10}|^2 + |c_{11}|^2 + |c_{1-1}|^2} = \frac{2|i-1|^2}{16 + 2|i-1|^2 + 2|i+1|^2} = \frac{4}{16+4+4} = \frac{1}{6}$$

$$\mathrm{Prob}(L_z = -\hbar) = \frac{|c_{1-1}|^2}{|c_{10}|^2 + |c_{11}|^2 + |c_{1-1}|^2} = \dots = \frac{1}{6}$$

$$\mathrm{Prob}(L_z = 0) = \frac{|c_{10}|^2}{|c_{10}|^2 + |c_{11}|^2 + |c_{1-1}|^2} = \frac{16}{16+4+4} = \frac{16}{24} = \frac{2}{3}$$

$$\cancel{\langle L_z\rangle = \sum_m |c_{lm}|^2 (m\hbar) = |c_{11}|^2 \hbar + |c_{10}|^2\, 0 + |c_{1-1}|^2 (-\hbar) =}$$

$$\langle L_z \rangle = \sum_m \mathrm{Prob}(L_z = m\hbar)\,(m\hbar) = \frac{1}{6}\hbar + \frac{2}{3}\cdot 0 + \frac{1}{6}(-\hbar) = 0$$

Formalmente: $\psi = f(r)\tilde{\Psi}(\theta,\varphi) = f(r)\sum c_{lm} Y_{lm}$

$$\langle L_z \rangle = \frac{\langle\psi|L_z|\psi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle} = \frac{1}{\int r^2 dr\, |f(r)|^2 \int d\Omega\, |\sum c_{lm} Y_{lm}|^2} \int r^2 dr \int d\Omega\, f^*(r)\left(\sum c_{lm} Y_{lm}\right)^* \hat{L}_z f(r)\left(\sum c_{lm}\dots\right.$$

$$= \frac{1}{\int r^2 dr\, |f(r)|^2 \int d\Omega\, |\sum c_{lm} Y_{lm}|^2} \int r^2 dr\, |f(r)|^2 \int d\Omega \left(\sum c_{lm} Y_{lm}\right)^* \hat{L}_z \left(\sum\dots\right.$$

$$= \frac{\int d\Omega \left(\sum c_{lm} Y_{lm}\right)^* \hat{L}_z \left(\sum c_{lm} Y_{lm}\right)}{\int d\Omega\, |\sum c_{lm} Y_{lm}|^2} =$$

ortogonalità Y_{lm}
$\hat{L}_z$ è diagona…

$$= \frac{\sum_{lm} |c_{lm}|^2 (m\hbar)}{\sum_{lm} |c_{lm}|^2}$$

d) $$\mathrm{Prob}\left((\theta,\varphi)\in d\Omega\right) = \frac{\int_0^{+\infty} dr\, r^2\, |\psi(r,\theta,\varphi)|^2}{\int_0^{+\infty} dr\, r^2 \int d\Omega\, |\psi(r,\theta,\varphi)|^2} =$$

di solito il denominatore sappiamo che è 1. Qui però non conosciamo esplicitamente la normalizzazione di Ψ. Tuttavia possiamo evitare di calcolarla.

$$= \frac{\int_0^{+\infty} dr\, r^2\, |f(r)|^2 |\tilde{\Psi}(\theta,\varphi)|^2}{\int_0^{+\infty} dr\, r^2\, |f(r)|^2 \int d\Omega\, |\tilde{\Psi}(\theta,\varphi)|^2} =$$

$$= \frac{|\tilde{\Psi}(\theta,\varphi)|^2}{\int d\Omega\, |\tilde{\Psi}(\theta,\varphi)|^2} = \frac{\left|\sum c_{\ell m} Y_{\ell m}\right|^2}{\int d\Omega\, |c_{\ell m} Y_{\ell m}|^2} = \frac{|c_{\ell m} Y_{\ell m}|^2}{\sum |c_{\ell m}|^2}$$

$$= \frac{1}{24}\left| c_{10} Y_{10} + c_{11} Y_{1+1} + c_{1-1} Y_{1-1} \right|^2 =$$

$$= \frac{1}{24}\left| 4\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{\pi}}\cos\theta\right) + \sqrt{2}(i-1)\left(-\frac{1}{4}\sqrt{\frac{6}{\pi}}\operatorname{sen}\theta\, e^{i\varphi}\right) + \sqrt{2}(i+1)\left(\frac{1}{4}\sqrt{\frac{6}{\pi}}\operatorname{sen}\theta\, e^{-i\varphi}\right)\right|^2$$

$$= \frac{1}{24}\left| 2\sqrt{\frac{3}{\pi}}\cos\theta + \frac{\operatorname{sen}\theta}{4}\sqrt{\frac{6}{\pi}}\sqrt{2}\left((1-i)e^{i\varphi} + (1+i)e^{-i\varphi}\right)\right|^2 =$$

$$z + \bar{z} = 2\,\mathrm{Re}(z) = 2\,\mathrm{Re}\left((1-i)e^{i\varphi}\right) =$$
$$= 2\left(\cos\varphi + \operatorname{sen}\varphi\right)$$

$$= \frac{1}{24}\left| 2\sqrt{\frac{3}{\pi}}\cos\theta + \sqrt{\frac{3}{\pi}}\operatorname{sen}\theta\left(\cos\varphi + \operatorname{sen}\varphi\right)\right|^2 =$$

$$= \frac{1}{8\pi}\left(2\cos\theta + \operatorname{sen}\theta\left(\cos\varphi + \operatorname{sen}\varphi\right)\right)^2$$

Es. III [o.32]

Oscillatore armonico bidimensionale $V(x,y) = \frac{m}{2}\omega^2(x^2+y^2)$

1) degenerazione energetica

2) per i primi 3 livelli energetici, calcolare i possibili valori di L_z.

1) $H = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{m}{2}\omega^2 x^2 + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{m}{2}\omega^2 y^2$ ⇒ è un hamiltoniana somma di due hamiltoniane indipendenti ($[H_x, H_y] = 0$)

$$\Rightarrow E = \left(n_x + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega + \left(n_y + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega = (n_x + n_y + 1)\hbar\omega = (n+1)\hbar\omega \quad / \quad n = n_x + n_y$$

$n = 0, 1, \dots$

Fissato n, ci sono $n+1$ stati con le stesse energie:

n	n_x	n_y
0	0	0
1	0	1
	1	0
2	0	2
	1	1
	2	0
⋮	⋮	

$\Rightarrow E_n = (n+1)\hbar\omega$ è degenere $n+1$ volte

2) Per calcolare valori possibili di L_z, devo vedere che autofunzioni di $\hat{L}_z$ compaiono in ψ.

Ricordiamo che $L_z = -i\hbar \frac{d}{d\varphi}$ e che $L_z|m\rangle = m\hbar|m\rangle$, $m = 0, \pm1, \pm2, \dots$

$$\Phi_m(\varphi) = \langle\varphi|m\rangle = \frac{e^{im\varphi}}{\sqrt{2\pi}}$$

$n=0$ $\psi_{00} = \psi_0(x)\psi_0(y) \propto e^{-K(x^2+y^2)}$ NON DIPENDE da φ $\Rightarrow m=0 \Rightarrow \boxed{L_z = 0}$

$$n=1 \begin{cases} \psi_{10} = \psi_1(x)\psi_0(y) \propto x\, e^{-K(x^2+y^2)} \propto \frac{x}{r}\left(r e^{-Kr^2}\right) \propto (e^{i\varphi} + e^{-i\varphi})F(r) \\ \psi_{01} = \dots \qquad \propto \frac{y}{r}\left(r e^{-Kr^2}\right) \propto (e^{i\varphi} - e^{-i\varphi})F(r) \end{cases} \Rightarrow \boxed{L_z = \pm\hbar}$$

$$n=2 \begin{cases} \psi_{20} = \psi_2(x)\psi_0(y) \propto (4x^2-2)\, e^{-K(x^2+y^2)} \\ \psi_{11} = \text{—} \propto xy\, e^{-K(x^2+y^2)} \\ \psi_{02} = \text{—} \propto (4y^2-2)\, e^{-K(x^2+y^2)} \end{cases}$$

Devo guardare i polinomi

$$\Rightarrow \left\{ \left(\frac{x}{r}\right)^2, \left(\frac{y}{r}\right)^2, \frac{xy}{r^2}, 1 \right\}$$

$$\begin{cases} \left(\frac{x}{r}\right)^2 \propto (e^{i\varphi} + e^{-i\varphi})^2 = (e^{2i\varphi} + e^{-2i\varphi} + 2) & m = \pm2, 0 \\ \left(\frac{y}{r}\right)^2 \propto \dots\dots & m = \pm2, 0 \\ \frac{xy}{r^2} \propto (e^{i\varphi} + e^{-i\varphi})(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}) = (e^{2i\varphi} + 1 - 1 - e^{-2i\varphi}) & m = \pm2 \\ 1 & m = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \boxed{L_z = 0, \pm2\hbar}$

←

Particella di spin 1 con $H = g\vec{B}\cdot\vec{S}$, $\vec{B} = B\vec{e}_x$ (uniforme).
Ignorando gradi di libertà spaziali

a) Ricavare S_x, S_y, S_z usando come base quella degli autostati di $\vec{S}^2$ e S_z ($|s, m_s\rangle$)

Ricavare anche autovettori di S_x e S_y.

b) Se $|\psi(t=0)\rangle = |11\rangle$, trovare $|\psi(t)\rangle$

c) Prob$(|1,-1\rangle ; t)$

a) Se $|s, m_s\rangle$ è base di autovettori comune a $\vec{S}^2$ e S_z, (e $s=1$) allora:

$$S_z|1,m\rangle = m\hbar|1,m\rangle \qquad m = -1, 0, +1$$

Posso scegliere $|11\rangle = \begin{vmatrix}1\\0\\0\end{vmatrix}$ $\quad |1,0\rangle = \begin{vmatrix}0\\1\\0\end{vmatrix}$ $\quad |1,-1\rangle = \begin{vmatrix}0\\0\\1\end{vmatrix}$

$\Rightarrow$ ovviamente $S_z = \hbar\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$

Per trovare S_x, si fa uso di $S_\pm = S_x \pm i S_y$. In generale vale che

$$(S_x)_{mm'} = \langle 1m|S_x|1m'\rangle$$
$$(S_y)_{mm'} = \langle 1m|S_y|1m'\rangle$$

cioè, individualmente

$$S_x = \begin{pmatrix}\langle 11|S_x|11\rangle & \langle 11|S_x|10\rangle & \langle 11|S_x|1-1\rangle\\ \langle 10|S_x|11\rangle & \langle 10|S_x|10\rangle & \langle 10|S_x|1-1\rangle\\ \langle 1-1|S_x|11\rangle & \langle 1-1|S_x|10\rangle & \langle 1-1|S_x|1-1\rangle\end{pmatrix} \qquad S_y = \dots$$

$$S_x = \frac{S_+ + S_-}{2} \qquad S_y = \frac{S_+ - S_-}{2i}$$

e sappiamo che $\quad S_\pm|1m\rangle = \hbar\sqrt{2 - m(m\pm1)}\,|1, m\pm1\rangle$

Quindi:

$S_+|11\rangle = 0 \qquad\qquad S_-|11\rangle = \hbar\sqrt{2}|10\rangle$

$S_+|10\rangle = \hbar\sqrt{2}|11\rangle \qquad S_-|10\rangle = \hbar\sqrt{2}|1-1\rangle$

$S_+|1-1\rangle = \hbar\sqrt{2}|10\rangle \qquad S_-|1-1\rangle = 0$

NB In questo esercizio, e in generale dove non c'è il rischio di confondersi ($\Rightarrow$ cioè dove j HA SOLO UN VALORE), non scrivo più nei ket l'indice che identifica S^2, cioè s. $\Rightarrow |s, m_s\rangle \rightsquigarrow |m_s\rangle$
In questo caso, essendo $s=1$, uso $|1\rangle \rightsquigarrow |+\rangle \quad |0\rangle \rightsquigarrow |0\rangle \quad |-1\rangle \rightsquigarrow |-\rangle$

$$S_x = \frac{S_+ + S_-}{2} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \langle 1| S_+ + S_- |1\rangle & \langle 1| S_+ + S_- |0\rangle & \langle 1| S_+ + S_- |-1\rangle \\ \langle 0| S_+ + S_- |1\rangle & \langle 0| S_+ + S_- |0\rangle & \langle 0| S_+ + S_- |-1\rangle \\ \langle -1| S_+ + S_- |1\rangle & \langle -1| S_+ + S_- |0\rangle & \langle -1| S_+ + S_- |-1\rangle \end{pmatrix}$$

Faccio esplicitamente la prima riga:

$$\langle 1 | S_+ + S_- |1\rangle = \langle 1| \left(0 + \hbar\sqrt{2}|0\rangle\right) = 0$$

$$\langle 1| S_+ + S_- |0\rangle = \langle 1| \left(\hbar\sqrt{2}|1\rangle + \hbar\sqrt{2}|-1\rangle\right) = \hbar\sqrt{2}$$

$$\langle 1| S_+ + S_- |-1\rangle = \langle 1| \left(\hbar\sqrt{2}|0\rangle + 0\right) = 0$$

Facendoli tutti, si ha:

$$S_x = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & \hbar\sqrt{2} & 0 \\ \hbar\sqrt{2} & 0 & \hbar\sqrt{2} \\ 0 & \hbar\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$S_y = \frac{S_+ - S_-}{2i} = \frac{1}{2i}\begin{pmatrix} \langle 1| S_+ - S_- |1\rangle & \langle 1| S_+ - S_- |0\rangle & \langle 1| S_+ - S_- |-1\rangle \\ \langle 0| S_+ - S_- |1\rangle & \langle 0| S_+ - S_- |0\rangle & \langle 0| S_+ - S_- |-1\rangle \\ \langle -1| S_+ - S_- |1\rangle & \langle -1| S_+ - S_- |0\rangle & \langle -1| S_+ - S_- |-1\rangle \end{pmatrix}$$

Faccio esplicitamente la seconda riga:

$$\langle 0| S_+ - S_- |1\rangle = \langle 0| \left(0 - \hbar\sqrt{2}|0\rangle\right) = -\hbar\sqrt{2}$$

$$\langle 0| S_+ - S_- |0\rangle = \langle 0| \left(\hbar\sqrt{2}|1\rangle - \hbar\sqrt{2}|-1\rangle\right) = 0$$

$$\langle 0| S_+ - S_- |-1\rangle = \langle 0| \left(\hbar\sqrt{2}|0\rangle - 0\right) = \hbar\sqrt{2}$$

Facendo tutti si ha:

$$S_y = \frac{1}{2i}\begin{pmatrix} 0 & \hbar\sqrt{2} & 0 \\ -\hbar\sqrt{2} & 0 & \hbar\sqrt{2} \\ 0 & -\hbar\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}$$

Esercizio: Verificare che $[S_i, S_j] = i\hbar\, \varepsilon_{ijk} S_k$, cioè che soddisfano regole comm. del mom. angolare.

Adesso ricaviamo gli autovettori di S_x e S_y, in funzione di quelli di S_z. Ricordiamo che

$$|1,1\rangle \rightsquigarrow |1\rangle = |1,\hat{z}\rangle = |+,\hat{z}\rangle = |+\rangle = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \qquad S_z|+,\hat{z}\rangle = \hbar|+,\hat{z}\rangle$$

$$|1,0\rangle \rightsquigarrow |0\rangle = |0,\hat{z}\rangle = |0,\hat{z}\rangle = |0\rangle = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} \qquad S_z|0,\hat{z}\rangle = 0$$

$$|1,-1\rangle \rightsquigarrow |-1\rangle = |-1,\hat{z}\rangle = |-,\hat{z}\rangle = |-\rangle = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \qquad S_z|-,\hat{z}\rangle = -\hbar|-,\hat{z}\rangle$$

Dobbiamo quindi trovare $|+,\hat{x}\rangle, |0,\hat{x}\rangle, |-,\hat{x}\rangle$

$|+,\hat{y}\rangle, |0,\hat{y}\rangle, |-,\hat{y}\rangle$

Autovalori di S_x: è uno spin 1, mi aspetto $\pm\hbar, 0$.

$$S_x = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix} \to \det\begin{pmatrix}-\lambda&1&0\\1&-\lambda&1\\0&1&-\lambda\end{pmatrix}=0 \to -\lambda(\lambda^2-1)-1(-\lambda) = -\lambda(\lambda^2-2)=0$$

$$\to \lambda=0, \pm\sqrt{2} \Rightarrow S_x=\pm\hbar, 0$$

Autovettori di S_x:

$$\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = \lambda\begin{vmatrix}a\\b\\c\end{vmatrix} \to \begin{vmatrix}b\\a+c\\b\end{vmatrix} = \lambda\begin{vmatrix}a\\b\\c\end{vmatrix}$$

$$\lambda=0\ (S_x=0) \to \begin{cases}b=0\\a+c=0\end{cases} \to |0,\hat{x}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{vmatrix}1\\0\\-1\end{vmatrix}$$

$$\lambda=\sqrt{2}\ (S_x=\hbar) \to \begin{cases}b=\sqrt{2}a\\(a+c)=\sqrt{2}b\\b=\sqrt{2}c\end{cases} \to \text{scelgo } a=1 \qquad |+,\hat{x}\rangle = \frac{1}{2}\begin{vmatrix}1\\\sqrt{2}\\1\end{vmatrix}$$

$$\lambda=-\sqrt{2}\ (S_x=-\hbar) \to \begin{cases}b=-\sqrt{2}a\\(a+c)=-\sqrt{2}b\\b=-\sqrt{2}c\end{cases} \to \text{scelgo } a=1 \qquad |-,\hat{x}\rangle = \frac{1}{2}\begin{vmatrix}1\\-\sqrt{2}\\1\end{vmatrix}$$

Esercizio da svolgere: ricavare autostati di S_y: $\quad |0,\hat{y}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{vmatrix}1\\0\\1\end{vmatrix} \qquad |\pm,\hat{y}\rangle = \frac{1}{2}\begin{vmatrix}1\\\pm i\sqrt{2}\\-1\end{vmatrix}$

b) $|\psi(t=0)\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = |+,\hat{z}\rangle \quad . \quad H = g\vec{B}\cdot\vec{S} = gBS_x$.

Quindi H è diagonale sugli autostati di S_x.
Per evoluzione nel tempo $|\psi(t=0)\rangle$ lo devo al solito decomporre in autostati di H, cioè di S_x.

$$|\psi(t=0)\rangle = \begin{vmatrix}1\\0\\0\end{vmatrix} = \underbrace{\frac{|+,\hat{x}\rangle + |-,\hat{x}\rangle}{2}}_{=\begin{vmatrix}1/2\\0\\1/2\end{vmatrix}} + \underbrace{\frac{|0,\hat{x}\rangle}{\sqrt{2}}}_{=\begin{vmatrix}1/2\\0\\-1/2\end{vmatrix}}$$

$$|\psi(t)\rangle = e^{-iHt/\hbar}|\psi(t=0)\rangle = e^{-igBS_xt/\hbar}\left(\frac{|+,\hat{x}\rangle}{2} + \frac{|-,\hat{x}\rangle}{2} + \frac{|0,\hat{x}\rangle}{\sqrt{2}}\right) =$$

$$= e^{-igBt}\frac{|+,\hat{x}\rangle}{2} + e^{igBt}\frac{|-,\hat{x}\rangle}{2} + \frac{|0,\hat{x}\rangle}{\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{1}{2}e^{-igBt}\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1\\\sqrt{2}\\1\end{vmatrix} + \frac{1}{2}e^{igBt}\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1\\-\sqrt{2}\\1\end{vmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{vmatrix}1\\0\\-1\end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1+\cos(gBt)\\-i\sqrt{2}\,\mathrm{sen}(gBt)\\-1+\cos(gBt)\end{pmatrix}$$

c) $$\mathrm{Prob}\left(|\psi(t)\rangle = |1,-1\rangle; t\right) = \left|\langle -,\hat{z}|\psi(t)\rangle\right|^2 = \left|\frac{1}{2}(-1+\cos gBt)\right|^2 = \downarrow$$

$\uparrow |-,\hat{z}\rangle = \begin{vmatrix}0\\0\\1\end{vmatrix}$

$\hookrightarrow = \left|\frac{1}{2}\left(-1 + \cos^2\frac{gBt}{2} - \operatorname{sen}^2\frac{gBt}{2}\right)\right|^2 = \left|\frac{1}{2}\left(-2\operatorname{sen}^2\frac{gBt}{2}\right)\right|^2 = \operatorname{sen}^4\left(\frac{gBt}{2}\right)$

Es. V [es. 2b]

$\psi(\theta,\varphi) = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(Y_{10}(\theta,\varphi) + Y_{11}(\theta,\varphi) - Y_{1-1}(\theta,\varphi)\right)$. Calcolare $\langle\vec{L}\rangle$

$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(|11\rangle + |10\rangle - |1-1\rangle\right)$

$$\langle L_z\rangle = \langle\psi|L_z|\psi\rangle = \frac{1}{3}\left(\langle 11| + \langle 10| - \langle 1-1|\right) L_z \left(|11\rangle + |10\rangle - |1-1\rangle\right) =$$
$$= \frac{1}{3}\left(\qquad\qquad\right)\left(\hbar|11\rangle - (-\hbar)|1-1\rangle\right) =$$
$$= \frac{1}{3}(\hbar - \hbar) = 0$$

$\langle L_x\rangle$: ho 2 modi

1) Usare $L_x = \frac{L_+ + L_-}{2}$ e $L_\pm|\ell m\rangle = \hbar\sqrt{\ell(\ell+1) - m(m\pm1)}\,|\ell, m\pm1\rangle$

$$\langle L_x\rangle = \frac{1}{2}\frac{1}{3}\left(\langle 11| + \langle 10| - \langle 1-1|\right)(L_+ + L_-)\left(|11\rangle + |10\rangle - |1-1\rangle\right) =$$ ⇒ prima L_+ poi L_-

$$= \frac{1}{6}\left(\langle 11| + \langle 10| - \langle 1-1|\right)\left(\emptyset + \hbar\sqrt{2}|11\rangle - \cancel{\hbar\sqrt{2}|10\rangle} + \cancel{\hbar\sqrt{2}|10\rangle} + \hbar\sqrt{2}|1-1\rangle + \emptyset\right) =$$

$$= \frac{1}{6}\left(\langle 11| + \langle 10| - \langle 1-1|\right)\left(\hbar\sqrt{2}|11\rangle + \hbar\sqrt{2}|1-1\rangle\right) = 0$$

2) Siamo solo con $\ell = 1$. Quindi rappresentazione 3-dim delle regole di commutazione del mom. angolare, ma necessariamente come funzioni su L^2 dell'esercizio precedente (spazio vett. 3d)
⇒ matrici e autovettori identici

$L_x = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$ $\quad L_y = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&-i&0\\i&0&-i\\0&i&0\end{pmatrix}$ $\quad L_z = \hbar\begin{pmatrix}1&&\\&0&\\&&-1\end{pmatrix}$

$\hookrightarrow |1,1\rangle = \begin{vmatrix}1\\0\\0\end{vmatrix}$ $\quad |1,0\rangle = \begin{vmatrix}0\\1\\0\end{vmatrix}$ $\quad |1,-1\rangle = \begin{vmatrix}0\\0\\1\end{vmatrix}$

$\Rightarrow |\psi\rangle = \begin{vmatrix}1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\\-1/\sqrt{3}\end{vmatrix}$

$$\langle L_x\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, -1)\frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{vmatrix}1\\1\\-1\end{vmatrix} = \frac{\hbar}{3\sqrt{2}}(1\,1\,-1)\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = 0$$

Esercizio Calcolare $\langle L_y\rangle$ nei 2 modi.