

## Tema d'esame di Elementi di MQ. Settembre 2009

Risolvere due dei seguenti esercizi (tempo: due ore)

### Esercizio I

Dato lo stato di un oscillatore armonico monodimensionale di massa  $m$  e frequenza  $\omega$  descritto dalla funzione d'onda

$$\mathcal{N}e^{-\frac{\alpha}{2}x^2}(1 + 2\sqrt{\alpha}x + 2\alpha x^2) \quad \alpha = \frac{m\omega}{\hbar} \quad (1)$$

determinare

- il valor medio dell'energia
- il valor medio di  $x$
- il valor medio di  $x^2$

Si ricorda che le funzioni d'onda dell'oscillatore armonico sono date da  $\phi_n = \left(\frac{\alpha}{\hbar}\right)^{1/4} \frac{H_n(\sqrt{\alpha}x)}{\sqrt{2^n n!}} e^{-\frac{\alpha}{2}x^2}$  con  $H_0(\xi) = 1$ ,  $H_1(\xi) = 2\xi$ ,  $H_2(\xi) = 4\xi^2 - 2$ ,  $\dots$ .

### Esercizio II

Un elettrone dell'atomo di idrogeno è descritto dalla funzione d'onda

$$\psi(x, 0) = \mathcal{N}(\psi_{100} + a\psi_{200} + \psi_{210}) \quad (2)$$

dove  $\psi_{nlm}$  sono le autofunzioni corrispondenti ai numeri quantici  $n, l, m$ , con  $a$  reale positivo.

- Determinare  $a$  sapendo che  $\langle E \rangle = -\frac{E_0}{2}$ , dove  $E_0$  è il valore assoluto dell'energia dello stato fondamentale.
- a  $t = 0$  viene acceso un debole campo magnetico costante  $\vec{B} = B\vec{e}_x$ . Quali sono le probabilità per una misura di  $L_z$  a tempo  $t$ ? Si trascurino i termini quadratici in  $B$  nell'Hamiltoniana.

### Esercizio III

Sia data una particella di spin  $1/2$  in un campo magnetico costante  $\vec{B} = \left(\frac{B}{\sqrt{2}}, \frac{B}{\sqrt{2}}, 0\right)$ . Una misura della proiezione dello spin nella direzione  $\vec{n} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$  al tempo  $t = 0$  dà risultato  $\hbar/2$ . Qual è la probabilità che al tempo  $t$  una misura di  $\vec{S} \cdot \vec{n}$  dia  $-\hbar/2$ ?