Tema d'esame di Elementi di MQ. Prova I

Risolvere due dei seguenti esercizi (tempo: due ore)

Esercizio I

Dato il potenziale monodimensionale $V(x) = -\frac{\hbar^2}{2m}\gamma\delta(x)$, con γ positivo, trovare

- l'energia dello stato fondamentale
- la probabilità che una particella nello stato fondamentale si trovi nella regione $|x| \leq 1/\gamma$
- la probabilità che una particella nello stato fondamentale vi rimanga se istantaneamente γ viene raddoppiato.

Esercizio II

Dato un atomo di idrogeno con un elettrone nello stato

$$\psi(x,0) = \mathcal{N}(\psi_{100} + \psi_{210} + \psi_{211} + \psi_{21-1}) \tag{1}$$

dove ψ_{nlm} sono le autofunzioni corrispondenti ai numeri quantici n, l, m,

- calcolare il valor medio dell'energia
- determinare i possibili risultati di una misura di L_x e le relative probabiltà
- a $t = 0$ viene acceso un debole campo magnetico costante $\vec{B} = B\vec{e}_x$. Qual è la probabilità che al tempo t una misura di L_z dia risultato zero? Si trascurino i termini quadratici in B nell'Hamiltoniana.

Esercizio III

Data una particella di massa m in due dimensioni soggetta a un potenziale armonico $V(x,y) = \frac{m\omega^2}{2}(x^2 + y^2)$ e a un campo elettrico costante $\vec{E} = d\vec{e}_x$, determinare

- i livelli energetici
- il valor medio di x e x^2 in un generico stato compatibile con una misura certa di energia $E = 2\hbar\omega - \frac{d^2}{2m\omega^2}$.

Tema d'esame di Elementi di MQ. Prova II

Risolvere due dei seguenti esercizi (tempo: due ore)

Esercizio I

Sia data una particella di spin 1/2 in un campo magnetico costante $\vec{B} = B\vec{e}_x$. Una misura della proiezione dello spin nella direzione $\vec{\mathbf{n}} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ al tempo $t = 0$ dà risultato $\hbar/2$. Qual è la probabilità che al tempo t una misura di $\vec{\mathbf{S}} \cdot \vec{\mathbf{n}}$ dia $-\hbar/2$?

Esercizio II

Sia data una particella di massa m soggetta al potenziale $V(x, y, z) = \frac{m\omega^2}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$ e descritta dalla funzione d'onda

$$\psi(x, y, z) = \mathcal{N} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar} r^2}(x + y) \tag{1}$$

- calcolare il valor medio dell'energia
- calcolare il valor medio di $\vec{x}$
- calcolare il valor medio di $\vec{L}$.

Esercizio III

Una particella è soggetta al potenziale

$$V(x, y, z) = \begin{cases} \infty & 0 < r < a \\ -V_0 & a < r < 2a \\ 0 & r > 2a \end{cases} \qquad V_0 > 0, a > 0 \tag{2}$$

Determinare il valore minimo di V_0 per cui esiste uno stato legato e determinare, per quel valore, l'autofunzione $\psi_0(x, y, z)$ dello stato ad energia più bassa. $\psi_0(x, y, z)$ è normalizzabile?

Tema d'esame di Elementi di MQ. Prova III

Risolvere due dei seguenti esercizi (tempo: due ore)

Esercizio I

Un rotatore piano è una particella vincolata a muoversi su un cerchio. Può essere descritto da una funzione d'onda $\psi(\phi)$ dipendente dalla sola variabile angolare $\phi \in [0, 2\pi]$ normalizzata con $\int_0^{2\pi} d\phi |\psi(\phi)|^2 = 1$ che evolve con l'Hamiltoniana

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{d\phi^2} \tag{1}$$

Determinare i livelli energetici del rotatore. Al tempo $t = 0$ il sistema sia descritto dalla funzione d'onda $\psi(\phi) = \mathcal{N} \cos^3 \phi$. Determinare al tempo t

- la funzione d'onda
- il valor medio di $-i\frac{d}{d\phi}$ e di H
- la probabilità che la particella si trovi nello stato descritto dalla funzione d'onda $\psi_f(\phi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(3\phi)$

Esercizio II

Sia dato un pacchetto d'onda monodimensionale ben localizzato attorno al momento p_0 e che si propaga da sinistra verso destra lungo l'asse reale negativo. Studiare la riflessione del pacchetto da parte di una barriera di potenziale $V(x) = \frac{\hbar^2}{2m}\gamma\delta(x)$, con γ positivo, usando il metodo della fase stazionaria. Calcolare il ritardo sperimentato dal pacchetto durante la riflessione.

Esercizio III

Sia dato un sistema di due particelle di spin 1/2. A tempo zero una misura della proiezione dello spin lungo l'asse zeta di entrambe le particelle dá risultato $+\hbar/2$. L'Hamiltoniana del sistema è $H = -\mu B S_x^1$, dove $\vec{\mathbf{S}}^i$ indica lo spin della particella i-esima. Determinare la probabiltà che al tempo t il sistema abbia momento angolare **totale** uguale a zero.

Tema d'esame di Elementi di MQ. Prova IV

Risolvere due dei seguenti esercizi (tempo: due ore)

Esercizio I

Sia data una particella in due dimensioni confinata in una buca impenetrabile quadrata di lato a. Al tempo $t = 0$ la funzione d'onda della particella è

$$\psi(x,y) = \mathcal{N} \sin\frac{\pi x}{a} \sin\frac{\pi y}{a}\left(1 + 2\cos\frac{\pi x}{a}\right) \tag{1}$$

Calcolare al tempo t

- il valor medio dell'energia
- i possibili valori di una misura di $\frac{p_x^2}{2m}$ e $\frac{p_y^2}{2m}$ e le relative probabilità.
- All'improvviso la buca viene raddoppiata nella sola direzione y. Discutere i livelli energetici del nuovo sistema e scrivere lo stato fondamentale e i primi due stati eccitati. Determinare la probabilità che la particella si trovi nel primo stato eccitato del sistema finale.

Esercizio II

Siano date due particelle di spin 1/2 nello stato $|+->$ al tempo $t = 0$ che interagiscono con Hamiltoniana

$$H = \frac{\epsilon}{\hbar}\left(2\,\vec{\mathbf{S}}_1 \cdot \vec{\mathbf{S}}_2 + \hbar S_{1z} + \hbar S_{2z}\right) \tag{2}$$

Calcolare al tempo t

- la probabilità che siano nello stato $|-+>$
- i possibili risultati di una misura del momento angolare totale $\vec{\mathbf{S}} = \vec{\mathbf{S}}_1 + \vec{\mathbf{S}}_2$ e $S_z = S_{1z} + S_{2z}$ e le relative probabiltà.

Esercizio III

Sia dato un sistema a tre livelli interagente con Hamiltoniana

$$H = \hbar h(t) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

con $h(t)$ funzione positiva. Dato lo stato $\psi(0) = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, calcolare

- in funzione di $h(t)$, il tempo T a cui il sistema ritorna per la prima volta nello stato iniziale
- il valor medio dell'osservabile $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ al tempo t. Dipende da t ? Perché?
- il valor medio e i risultati, con relativa probabilità, per una misura di $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Tema d'esame di Elementi di MQ. Prova V

Risolvere due dei seguenti esercizi (tempo: due ore)

Esercizio I

Sia dato un oscillatore armonico anisotropo con potenziale

$$V(x,y,z) = \frac{m\omega^2}{2} z^2 + 2m\omega^2 (x^2 + y^2)\,.$$

- determinare lo spettro e la degenerazione dei primi livelli
- il valor medio di r^2 e L_z nel primo stato eccitato

Ripetere l'esercizio aggiungendo un campo elettrico costante nella direzione z.

Esercizio II

Siano date due particelle di spin 1/2 con Hamiltoniana

$$H = \frac{2\epsilon}{\hbar}\left(\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2\right) + \mu\,(S_{1z} + S_{2z})$$

che si trovano a tempo zero nello stato $|+->$. Calcolare la probabilità che a tempo t il sistema si trovi nello stato $|-+>$ e calcolare i valor medi di $\vec{S}_1$ e $\vec{S}_2$.

Esercizio III

Sia dato il potenziale monodimensionale $V(x) = V_I(x) + V_{II}(x)$ con

$$V_I(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ V_0 & 0 < x < a \\ \infty & x > a \end{cases} \qquad\qquad V_0 > 0,\ a > 0$$

e $V_{II}(x) = -\frac{\hbar^2}{2m}\gamma\delta(x)$ con $\gamma > 0$.

- Discutere l'esistenza di stati legati al variare dei parametri
- Calcolare il coefficiente di riflessione per una particella con $E > 0$