Tema d'esame di Elementi di MQ. Luglio 2009

Risolvere due dei seguenti esercizi (tempo: due ore)

Esercizio I

Un oscillatore anarmonico

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2\right) + \frac{m\omega^2}{2}\left(x^2 + y^2\right) + \frac{m\omega'^2}{2}z^2$$

è posto in un campo elettrico costante di intensità ϵ diretto lungo l'asse z. Determinare

- i livelli energetici del sistema
- i valor medi $< \vec{x} >$ e $< r^2 >$ nello stato fondamentale del sistema
- la probabilità che, se ω viene istantaneamente raddoppiata, la particella rimanga nello stato fondamentale se lì si trovava.

Esercizio II

Sia data una particella su un cerchio descritta da una funzione d'onda $\psi(\phi) \in L^2([0, 2\pi])$ e con Hamiltoniana

$$H = \epsilon\left(-\frac{d^2}{d\phi^2} - i\frac{d}{d\phi}\right)$$

Sapendo che al tempo $t = 0$ lo stato del sistema è descritto dalla funzione d'onda

$$\psi(\phi, t = 0) = A\cos^2\phi$$

determinare

- la funzione d'onda al tempo t
- i valor medi e le probabilità dei risultati di una misura al tempo t delle osservabili $-i\frac{d}{d\phi}$ e H
- la probabilità che, al tempo t, la particella si trovi nella regione $[0, \pi]$.

Esercizio III

Due particelle distinguibili di spin 1/2 si trovano a $t = 0$ in uno stato con momento angolare **totale** uguale a zero. Le particelle evolvono con l'Hamiltoniana

$$H = \mu S_{1\,z} - \mu S_{2\,z}$$

Determinare

- la probabilità che al tempo t il momento angolare **totale** sia uno.
- la probabilità che al tempo t lo spin della particella uno $\vec{S_1}$ punti nella direzione del versore $\vec{n} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ e che, simultaneamente, lo spin della particella due $\vec{S_2}$ punti nella direzione opposta $-\vec{n}$.