

Tema d'esame di Elementi di MQ. Gennaio 2008

Risolvere due dei seguenti esercizi (tempo: due ore)

Esercizio I

Sia dato il potenziale monodimensionale

$$V(x) = \begin{cases} \frac{\hbar^2}{2m}\gamma\delta(x) & x < a \\ \infty & x > a \end{cases} \quad \gamma > 0, a > 0$$

Si consideri una particella incidente da sinistra con energia positiva, descritta per $x < 0$ dallo stato stazionario $e^{ikx} + A(k)e^{-ikx}$,

- verificare che l'ampiezza di riflessione $A(k) = e^{i\delta(k)}$ è un numero complesso di modulo uno.
- calcolare il valore limite dello sfasamento δ e della funzione d'onda per $\gamma \rightarrow \infty$.

Si costruisca un pacchetto d'onda localizzato nei momenti; si studi, col metodo della fase stazionaria, il moto del pacchetto incidente e del pacchetto riflesso nella regione $x < 0$.

Esercizio II

Sia data una particella di spin uno con Hamiltoniana $H = \frac{\mu}{\hbar} (S_x^2 - S_y^2)$. Al tempo $t = 0$ una misura di S_x dà \hbar . Determinare

- il vettore d'onda al tempo t
- la probabilità che al tempo t una misura di S_x dia $-\hbar$
- il valor medio di \vec{S} al tempo t .

Esercizio III

Siano dati due oscillatori accoppiati in una dimensione con Hamiltoniana

$$H = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{4} (5x_1^2 + 5x_2^2 - 6x_1x_2) .$$

Ridurre il problema a quello di due oscillatori liberi con un cambio di coordinate e determinare

- le frequenze dei due oscillatori e i livelli energetici del sistema
- il valor medio di x_1 e x_1^2 nello stato fondamentale
- lo stato più generale compatibile con una misura certa dell'energia $E = \frac{7}{2}\hbar\omega$. È sufficiente sapere che $\langle x_1^2 \rangle = \frac{5\hbar}{8m\omega}$ per determinare completamente lo stato?