Tema d'esame di Elementi di MQ. 18 Febbraio 2009

Risolvere due dei seguenti esercizi (tempo: due ore)

Esercizio I

Sia data una particella in un potenziale armonico anisotropo

$$V(x,y,z) = \frac{m\omega^2}{2}(x^2 + y^2 + 4z^2)$$

con funzione d'onda a $t = 0$

$$\psi(x,y,z) = \mathcal{N}(x+y)e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}(x^2+y^2+2z^2)}$$

- Calcolare il valor medio di r^2
- Calcolare le probabilità di una misura di L_z
- Dopo aver aggiunto all'Hamiltoniana il termine μL_z, calcolare la funzione d'onda al tempo t.

Esercizio II

Sia dato un sistema di due particelle non identiche di spin 1/2 con Hamiltoniana

$$H = \frac{2\epsilon}{\hbar}\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 - \epsilon(S_{z1} + S_{z2})\,.$$

Dato lo stato iniziale $\frac{1}{\sqrt{2}}(|+- > + |++ >)$ a $t = 0$

- determinare le probabilità che al tempo t il momento angolare totale sia zero
- determinare il valor medio di $S_{z1} + S_{z2}$
- determinare il valor medio di S_{z1}

Esercizio III

Un rotatore sferico è una particella vincolata a muoversi su una sfera. Può essere descritta da una funzione d'onda $\psi(\phi,\theta)$ dipendente dalle variabili angolari $\phi \in [0, 2\pi], \theta \in [0, \pi]$ normalizzata con $\int |\psi(\phi)|^2 \sin\theta d\theta d\phi = 1$. Sia data l'Hamiltoniana

$$H = \frac{1}{2I}\vec{L}^2 + \mu L_z \tag{1}$$

e la funzione d'onda a $t = 0$

$$\psi(\phi, \theta) = \mathcal{N}(\sin\theta\cos\phi + \cos\theta)$$

Determinare al tempo t

- la funzione d'onda
- il valor medio di L_z e di H
- la probabilità che la particella si trovi nello stato descritto dalla funzione d'onda $\psi_f(\phi) = \mathcal{N}'(\sin\theta\cos\phi - \cos\theta)$

Esercizio IV

Sia dato il potenziale monodimensionale $V(x) = -\frac{\hbar^2}{2m}\gamma\delta(x) + V_1(x)$ dove

$$V_1(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ V_0 & 0 < x < a \\ \infty & x > a \end{cases}$$

con γ, a e V_0 positivi.

- determinare l'esistenza di eventuali stati legati
- determinare il coefficiente di riflessione della barriera per una particella di energia $0 < E < V_0$
- esaminare i risultati precedenti per $V_0 \to \infty$.