Tema d'esame di Elementi di MQ. Febbraio 2009

Risolvere due dei seguenti esercizi (tempo: due ore)

Esercizio I

Sia data una particella vincolata sull'intervallo $0 \leq x \leq a$ da una barriera impenetrabile con funzione d'onda a $t = 0$

$$\mathcal{N} \left(\sin \frac{\pi x}{a} + \sin \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi x}{a} \right)$$

dove $\mathcal{N}$ è una costante di normalizzazione. Determinare

- il valor medio dell'energia
- la probabilità che al tempo t la particella si trovi nello stato descritto dalla funzione d'onda
$$\mathcal{N}' \left(\sin \frac{\pi x}{a} - 4 \sin \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi x}{a} \right)$$
- la probabilità che, se al tempo $t = 0$ la buca viene istantaneamente raddoppiata, la particella si trovi nel primo stato eccitato del sistema finale.

Esercizio II

Sia dato un sistema a due livelli descritto dalla Hamiltoniana

$$H = \hbar \begin{pmatrix} 1 & \epsilon \\ \epsilon & 1 \end{pmatrix}$$

Sapendo che al tempo $t = 0$ lo stato del sistema è descritto dal vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,

- determinare la probabilità che al tempo t il sistema si trovi nello stato $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
- calcolare il valor medio e le probabilità dei risultati di una misura dell'osservabile $C = i \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ al tempo t
- verificare che il risultato precedente soddisfa il teorema di Ehrenfest.

Esercizio III

Sia data una particella libera in tre dimensioni descritta a $t = 0$ dalla funzione d'onda

$$\psi(\vec{x}) = f(r)\,(r + iy)$$

- determinare i possibili risultati e le probabilità di una misura di $\vec{L}^2$, di L_z e di L_x
- determinare i valor medi di L_z e di L_x.
- determinare la funzione d'onda al tempo t supponendo che l'Hamiltoniana sia $H = \mu B L_x$.

Esercizio IV

Sia data la barriera di potenziale monodimensionale $V(x) = V_1(x) + V_2(x)$ che consiste in un potenziale a gradino

$$V_1(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ V_0 & x > 0 \end{cases}$$

a cui si aggiunge un potenziale deltiforme in $x = 0$

$$V_2(x) = -\frac{\hbar^2}{2m}\gamma\delta(x)$$

con γ e V_0 positivi.

- Si determini il massimo valore di V_0 per cui esiste uno stato legato.
- Si calcoli la probabilità che una particella nello stato legato (per i valori di V_0 in cui esiste) si trovi nella regione $x < 0$
- Si calcolino i coefficienti di riflessione e trasmissione della barriera per una particella di energia $E > V_0$.