Compito di MQ. Gennaio 2012

Risolvere i seguenti esercizi (tempo: tre ore)

Vecchio Ordinamento o Applicativo: Risolvere gli esercizi I e II (tempo: due ore)

Esercizio I

Siano date due particelle (non identiche) di spin 1/2. A $t = 0$ lo spin della prima punti nella direzione positiva dell'asse x e quello della seconda nella direzione positiva dell'asse y. Le due particelle interagiscano col l'Hamiltoniana

$$H = \frac{\epsilon_1 S_z^1 + \epsilon_2 S_z^2}{\hbar} \tag{1}$$

Determinare

- la probabilità che a tempo t lo spin totale sia zero.
- il valor medio di $S_z^1\,, S_z^2$ e S_z dove S è lo spin totale
- verificare la compatibilità del risultato del punto precedente col teorema di Ehrenfest.

Esercizio II

Data una particella sulla retta soggetta al potenziale

$$V(x) = W(x) - \gamma\delta(x + a) \tag{2}$$

con

$$W(x) = -V_0,\,,\;\; x < -a\,, \qquad W(x) = 0\,,\;\; -a < x < 0\,, \qquad W(x) = \infty\,,\;\; x > 0 \tag{3}$$

con $V_0, a, \gamma > 0$, determinare

- l'esistenza di stati legati
- il coefficiente di riflessione per una particella incidente da sinistra

Esercizio III

Siano date due particelle confinate su un cerchio di raggio R in un piano con Hamiltoniana

$$H_0 = -\frac{\hbar^2}{2mR^2}\frac{d^2}{d\phi_1^2} - \frac{\hbar^2}{2mR^2}\frac{d^2}{d\phi_2^2} \tag{4}$$

Parte I: Determinare i livelli energetici e le autofunzioni dello stato fondamentale e del primo stato eccitato nel caso di

- particelle diverse
- particelle identiche di spin 1/2
- particelle identiche di spin 0

Parte II: Si aggiunga poi un potenziale di interazione

$$V(\phi_1, \phi_2) = \lambda\delta(\phi_1 - \phi_2)\,. \tag{5}$$

Determinare le correzioni al prim'ordine in λ ai livelli energetici trovati nella parte I nei tre casi indicati.

Compito di MQ. Febbraio 2012

Risolvere i seguenti esercizi (tempo: tre ore)

Vecchio Ordinamento o Applicativo: Risolvere gli esercizi I e II (tempo: due ore)

Esercizio I

Sia dato lo stato di un oscillatore armonico isotropo in tre dimensioni descritto dalla funzione d'onda

$$\psi(x,y,z) = C\,(x+y+z)\,e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}(x^2+y^2+z^2)}\,.$$

Determinare

- il valor medio di $(x+y+z)^2$
- i valor medi di L_x, L_y e L_z.

Esercizio II

Due particelle di ugual massa m sono soggette al potenziale

$$V(x) = \frac{1}{4}m\omega^2\left(5x_1^2 + 5x_2^2 - 6x_1x_2\right) \tag{1}$$

Determinare

- il livelli energetici e la loro degenerazione
- il valore minimo e massimo del valor medio dell'operatore $x_1^2 + 2x_2^2$ in uno stato di energia $\frac{7}{2}\hbar\omega$.

Esercizio III

Sia dato un sistema quantistico descritto dai tre stati $|1>, |2>$ e $|3>$ con energie $-\epsilon_0, 0$ e ϵ_0, rispettivamente. Sia introdotta una perturbazione V i cui unici elementi di matrice non nulli sono

$$<2|V|2>= \lambda^2 \qquad\qquad <1|V|3>=<3|V|1>= \lambda\,.$$

Determinare le correzioni alle energie dei tre livelli al secondo ordine nel parametro λ. Confrontare il risultato ottenuto con i livelli energetici esatti del problema.

Compito MQ. Giugno 2012

Risolvere i seguenti esercizi (tempo: tre ore)

Vecchio Ordinamento o Applicativo: Risolvere l'esercizio I e la prima parte del II (tempo: due ore)

Esercizio I

Siano dati l'Hamiltoniana e il vettore d'onda a tempo $t = 0$

$$H = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mu \\ 0 & \epsilon & 0 \\ \mu & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \psi(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{i\phi} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- determinare la probabilità che al tempo t il sistema si trovi nello stato $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{-i\phi} \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$
- calcolare il valor medio dell'osservabile $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ al tempo t

Esercizio II

Dato un oscillatore armonico tridimensionale isotropo

$$V(x, y, z) = \frac{m\omega^2}{2} \left(x^2 + y^2 + z^2 \right)$$

descritto a $t = 0$ dalla funzione d'onda

$$\psi(\vec{x}) = \mathcal{N} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar} r^2} (x + y)$$

per tutti:

- determinare i possibili risultati e le probabilità di una misura di $\vec{L}^2$ e L_z a $t = 0$.
- determinare il valor medio di $(x + y)^2$

per tutti eccetto applicativo e vecchio ordinamento:

Si accenda a $t = 0$ la perturbazione $z e^{-\gamma t}$. Si determini, al primo ordine della teoria delle perturbazioni dipendenti dal tempo, in quali stati e con che probabilità potrà trovarsi il sistema a $t = \infty$. Che momento angolare l potrà avere il sistema a $t = \infty$?

Esercizio III

Una particella di spin 1/2 viene diffusa dal potenziale

$$(c_1 + c_2\, \vec{\sigma} \cdot \vec{x})\, \frac{e^{-\gamma r}}{r}$$

Determinare in approssimazione di Born

- la sezione d'urto differenziale per un fascio non polarizzato.
- la probabilità che la particella inverta il proprio spin nella diffusione.

Compito MQ. Luglio 2012

Risolvere i seguenti esercizi (tempo: tre ore)

Vecchio Ordinamento o Applicativo: Risolvere gli esercizi I e II (tempo: due ore)

Esercizio I

Siano dati l'Hamiltoniana e il vettore d'onda a tempo $t = 0$

$$H = \hbar \begin{pmatrix} 0 & \epsilon \\ \epsilon & 0 \end{pmatrix}, \qquad \psi(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ e^{-i\phi} \end{pmatrix}$$

- determinare la probabilità che al tempo t il sistema si trovi nello stato $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{-i\phi} \\ -1 \end{pmatrix}$
- calcolare il valor medio dell'osservabile $C = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$ al tempo t

Esercizio II

Due particelle di ugual massa m sono soggette al potenziale

$$V(x) = \frac{1}{4} m\omega^2 \left(5x_1^2 + 5x_2^2 - 6x_1 x_2\right) - \epsilon(x_1 + x_2) \tag{1}$$

Determinare

- il livelli energetici
- il valore medio dell'operatore x_1^2 nello stato fondamentale.

Esercizio III

Una particella di spin 1/2 viene diffusa dal potenziale

$$(c_1 + c_2\, \vec{\sigma} \cdot \vec{x})\, \frac{e^{-\gamma r}}{r}$$

Determinare in approssimazione di Born

- la sezione d'urto differenziale per un fascio non polarizzato.
- la probabilità che la particella mantenga il proprio spin nella diffusione.

Compito di MQ. Settembre 2012

Risolvere i seguenti esercizi (tempo: tre ore)

Vecchio Ordinamento o Applicativo: Risolvere gli esercizi I e II (tempo: due ore)

Esercizio II

Dato un oscillatore armonico tridimensionale isotropo

$$V(x, y, z) = \frac{m\omega^2}{2}\left(x^2 + y^2 + z^2\right)$$

descritto dalla funzione d'onda

$$\psi(\vec{x}) = \mathcal{N} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}r^2}\,(x + y)$$

- determinare i valor medi di $\vec{L}^2, L_z, L_x, L_y$.
- determinare il valor medio di $(x + y)^2$

Esercizio II

Data una particella sulla retta soggetta al potenziale

$$V(x) = W(x) - \frac{\hbar^2\gamma}{2m}\delta(x - l) \tag{1}$$

con

$$W(x) = \infty\,, x < 0\,, \qquad W(x) = 0\,, 0 < x < l\,, \qquad W(x) = W_0\,, x > l \tag{2}$$

con $l, W_0, \gamma > 0$. Determinare l'eventuale esistenza di stati legati di energia negativa.

Esercizio III

Una particella di spin 1/2 viene diffusa dal potenziale

$$(c_1 + c_2\,\vec{\sigma}\cdot\vec{x})\,e^{-\gamma r^2}$$

Determinare in approssimazione di Born

- la sezione d'urto differenziale per un fascio non polarizzato.
- la probabilità che la particella inverta il proprio spin nella diffusione.