Compito I di MQ. Febbraio 2011

Risolvere tre dei seguenti esercizi (tempo: tre ore)

Vecchio Ordinamento o Applicativo: Risolvere gli esercizi I e II (tempo: due ore)

Esercizio I

Sia data una particella libera in tre dimensioni descritta a $t = 0$ dalla funzione d'onda

$$\psi(\vec{x}) = f(r)\,(r + ix)$$

con Hamiltoniana $H = \mu B L_y$

- determinare la funzione d'onda al tempo t.
- determinare i possibili risultati e le probabilità di una misura di $\vec{L}^2$, di L_z e di L_x
- determinare i valor medi di L_z e di L_x.

Esercizio II

Date due particelle di ugual massa sono soggette al potenziale

$$V(x) = \frac{1}{2} m\omega^2 \left(5x_1^2 + 5x_2^2 - 8x_1x_2\right) \tag{1}$$

Determinare

- il livelli energetici e la loro degenerazione
- il valor medio di $x_1^2 + x_2^2$ nello stato fondamentale
- determinare il minimo e massimo valore di $< x_1^2 >$ che si può ottenere in uno stato compatibile con una misura $E = 5\hbar\omega$ dell'energia.

Esercizio III

Sia data una particella confinata su un cerchio di raggio R in un piano con Hamiltoniana

$$H_0 = -\frac{\hbar^2}{2mR^2}\frac{d^2}{d\phi^2} \tag{2}$$

Determinare le correzioni all'energia del primo stato eccitato dovute alla perturbazione $V(\phi) = A(2\cos^2\phi - 1)$ fino al secondo ordine in A.

Esercizio IV

Due particelle non identiche di spin 1/2 interagiscono attraverso il potenziale

$$V(|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|)\frac{\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2}{\hbar^2},$$

dove $V(r) = V_0 > 0$, $r < a$ e $V(r) = 0$, $r > a$. Assumendo che, prima dell'urto, le particelle abbiano spin diretti lungo lo stesso asse ma opposti in direzione, calcolare nel limite di basse energie col metodo delle onde parziali

- la sezione d'urto totale
- la distribuzione di probabilità per gli spin delle due particelle dopo l'urto

Compito II di MQ. Febbraio 2011

Risolvere tre dei seguenti esercizi (tempo: tre ore)

Vecchio Ordinamento o Applicativo: Risolvere gli esercizi I e II (tempo: due ore)

Esercizio I

Il risultato di una misura a tempo $t = 0$ del momento angolare **totale** di due particelle (non identiche) di spin 1/2 è 1 e quello della sua proiezione lungo l'asse z è 0. Le particelle, di uguale momento magnetico, sono soggette a un campo magnetico costante $\vec{B} = B\vec{e}_y$. Determinare a tempo t

- i possibili risultati e le probabilità di una misura della componente $S_z^{(1)}$ dello spin della **prima** particella.
- i possibili risultati e le probabilità di una misura della proiezione del momento angolare **totale** S_z lungo l'asse z.

Esercizio II

Sia data una particella confinata su un cerchio di raggio R in un piano con Hamiltoniana

$$H_0 = -\frac{\hbar^2}{2mR^2}\frac{d^2}{d\phi^2} \tag{1}$$

Sapendo che a tempo $t = 0$ la funzione d'onda è

$$\psi(\phi, 0) = A(\cos\phi)^4 \tag{2}$$

determinare a tempo t

- il valor medio dell'energia
- il valor medio della grandezza $\sin\phi$
- la probabilità che la particella si trovi nello stato $\psi'(\phi) = B(\sin\phi)^4$.

Esercizio III

Determinare le correzioni all'energia del livello $n = 2$ di un atomo di idrogeno posto in un campo magnetico $B = B\vec{e}_x$ ed elettrico $E = E\vec{e}_z$ costanti.

Esercizio IV

Sia dato un oscillatore armonico monodimensionale con potenziale $V(x) = \frac{m\omega^2}{2}x^2$ nello stato

$$|\phi> = \frac{|\,0> + |\,2>}{\sqrt{2}} \tag{3}$$

A $t = 0$ viene acceso un campo elettrico dipendente dal tempo $E = E_0 \cos \omega_0 t$. Determinare, usando la teoria delle perturbazioni dipendenti dal tempo al I ordine

- la probabilità che il sistema sia nello stato $|\,1>$ e negli stati $|\,n>$ con $n \geq 3$ a tempo t .

Compito di MQ. Giugno 2011

Risolvere tre dei seguenti esercizi (tempo: tre ore)

Vecchio Ordinamento o Applicativo: Risolvere gli esercizi I e II (tempo: due ore)

Esercizio I

Dato un oscillatore armonico tridimensionale isotropo

$$V(x,y,z) = \frac{m\omega^2}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)$$

descritto a $t=0$ dalla funzione d'onda

$$\psi(\vec{x}) = \mathcal{N} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}r^2}\,(r+z)$$

- determinare i possibili risultati e le probabilità di una misura di $\vec{L}^2$, L_x, L_y e L_z.

Esercizio II

Siano dati l'Hamiltoniana e il vettore d'onda a tempo $t=0$

$$H = \hbar\begin{pmatrix} 0 & \mu \\ \mu^* & 0 \end{pmatrix}, \qquad \psi(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mu = |\mu| e^{i\phi}$$

- determinare la probabilità che al tempo t il sistema si trovi nello stato $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$
- calcolare il valor medio dell'osservabile $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ al tempo t

Esercizio III

Sia data una particella confinata su un cerchio di raggio R in un piano con Hamiltoniana

$$H_0 = -\frac{\hbar^2}{2mR^2}\frac{d^2}{d\phi^2} \tag{1}$$

Determinare le correzioni all'energia dello stato fondamentale (al II ordine in λ) e del primo stato eccitato (al I ordine in λ) dovute alla perturbazione $V(\phi) = \lambda \sin^2\phi$.

Esercizio IV

Sia dato un oscillatore armonico bi-dimensionale con potenziale $V(x) = \frac{m\omega^2}{2}(x^2 + y^2)$ nello stato $|\phi >= |1\,1>$. A $t = 0$ viene acceso un campo elettrico dipendente dal tempo $E = E_0 \cos\omega_0 t\vec{e_x} + E_0 \sin\omega_0 t\vec{e_y}$. Determinare la probabilità di trovare il sistema negli stati $|n, m>$ a tempo t usando la teoria delle perturbazioni dipendenti dal tempo al I ordine.

Compito di MQ. Luglio 2011

Risolvere tre dei seguenti esercizi (tempo: tre ore)

Vecchio Ordinamento o Applicativo: Risolvere gli esercizi I e II (tempo: due ore)

Esercizio I

Due particelle (non identiche) di spin 1/2 sono soggette a un campo magnetico costante $\vec{B} = B\vec{e}_x$. Il risultato di una misura a tempo $t = 0$ della proiezione lungo l'asse z del momento angolare **totale** di è 0. Per lo stato più generale compatibile con questa misura, determinare a tempo t

- i possibili risultati e le probabilità di una misura della componente $S_z^{(2)}$ lungo l'asse z dello spin della **seconda** particella.
- i possibili risultati e le probabilità di una misura della proiezione del momento angolare **totale** S_z lungo l'asse z.

Esercizio II

Sia data una particella vincolata sull'intervallo $-L/2 \leq x \leq L/2$ da una barriera impenetrabile. Scrivere i valori dell'energia e le autofunzioni. Si aggiunga ora un potenziale

$$V(x) = \frac{\mu\hbar^2}{2m}\delta(x)$$

con $\mu > 0$. Determinare

- i livelli energetici
- l'energia dello stato fondamentale al variare di μ e disegnarne un grafico.

Esercizio III

Siano date due particelle identiche confinate in una buca impenetrabile monodimensionale di larghezza a. Determinare lo stato fondamentale e il primo livello eccitato e la rispettiva degenerazione nei due casi:

- bosoni di spin 0
- fermioni di spin 1/2 (tenere in conto le variabili di spin).

Determinare in entrambi i casi la correzione all'energia al I ordine dovuta a una perturbazione $V = \lambda\delta(x_1 - x_2)$, dove x_1 e x_2 sono le posizioni delle due particelle.

Esercizio IV

Si consideri lo scattering di un neutrone un protone che interagiscono col potenziale $V = \frac{e^{-\mu r}}{r} \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2$. Assumendo le particelle inizialmente non polarizzate, determinare

- la sezione d'urto differenziale in approssimazione di Born (sommando sugli stati finali)
- la probabilità che le particelle dopo l'urto siano in uno stato di tripletto.

Compito di MQ. Settembre 2011

Risolvere tre dei seguenti esercizi (tempo: tre ore)

Vecchio Ordinamento o Applicativo: Risolvere gli esercizi I e II (tempo: due ore)

Esercizio I

Data una particella descritta a $t = 0$ dalla funzione d'onda

$$\psi(\vec{x}) = \mathcal{N} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}r^2} (r + x + iy)$$

determinare i possibili risultati e le probabilità di una misura di $\vec{L}^2$, L_x, L_y e L_z.

Esercizio II

Sia data una particella vincolata sull'intervallo $-L/2 \leq x \leq L/2$ da una barriera impenetrabile e soggetta al potenziale

$$V(x) = -\frac{\mu\hbar^2}{2m}\delta(x)$$

con $\mu > 0$. Per quali valori di μ l'energia dello stato fondamentale è negativa? Disegnare l'andamento delll'energia dello stato fondamentale e del primo stato eccitato al variare di μ.

Esercizio III

Sia data una particella confinata su un cerchio di raggio R in un piano con Hamiltoniana

$$H_0 = -\frac{\hbar^2}{2mR^2}\frac{d^2}{d\phi^2} \tag{1}$$

Determinare le correzioni all'energia dello stato fondamentale (al II ordine in λ) e del primo stato eccitato (al I ordine in λ) dovute alla perturbazione $V(\phi) = \lambda \cos^2 \phi$.

Esercizio IV

Si consideri lo scattering di un neutrone un protone che interagiscono col potenziale $V = \frac{e^{-\mu r}}{r}\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2$. Assumendo che le particelle siano inizialmente nello stato con spin allineati $|++>$, determinare

- la sezione d'urto differenziale in approssimazione di Born
- la probabilità che le particelle dopo l'urto siano in uno stato di tripletto.