Tema d'esame di Elementi di MQ. Gennaio 2010 I

Risolvere due dei seguenti esercizi (tempo: due ore)

Esercizio I

Dato un oscillatore armonico tridimensionale isotropo

$$V(x,y,z) = \frac{m\omega^2}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)$$

descritto a $t=0$ dalla funzione d'onda

$$\psi(\vec{x}) = \mathcal{N} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}r^2}\,(x+y)$$

- determinare il valor medio di r^2
- determinare i possibili risultati e le probabilità di una misura di $\vec{L}^2$, L_x, L_y e L_z.

Esercizio II

Sia data una particella vincolata sull'intervallo $0 \le x \le L$ da una barriera impenetrabile. Scrivere i valori dell'energia e le autofunzioni. Si aggiunga ora un potenziale

$$V(x) = \frac{\lambda\hbar^2}{2m}\delta(x-L/2)$$

con $\lambda > 0$. Determinare

- i nuovi autovalori dell'energia
- trovare gli autovalori nel limite $\lambda \to 0$ (avete riottenuto il risultato della buca infinita ?)
- trovare gli autovalori nel limite $\lambda \to \infty$
- come varia l'energia dello stato fondamentale al variare di λ?
- come varia l'energia del primo stato eccitato al variare di λ?

Esercizio III

Sia dato un sistema a tre livelli descritto dalla Hamiltoniana

$$H = \hbar\epsilon \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e l'osservabile

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Sapendo che al tempo $t = 0$ lo stato del sistema è descritto dal vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

- determinare la probabilità che al tempo t il sistema si trovi nello stato $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
- calcolare il valor medio di A al tempo t
- A è una costante del moto? Verificare che l'equazione di evoluzione temporale dei valor medi
$$\frac{d}{dt}\langle A\rangle = \langle\frac{\partial A}{\partial t}\rangle + \frac{1}{i\hbar}\langle[A, H]\rangle$$
è soddisfatta.

II

GENNAIO 2010 II   Soluzione schematica

Tema d'esame di Elementi di MQ. Gennaio 2010 II

Risolvere due dei seguenti esercizi (tempo: due ore)

Esercizio I

Un rotatore piano è descritto da una funzione d'onda $\psi(\phi) \in L^2([0, 2\pi])$ e dalla Hamiltoniana $H = -\epsilon\hbar \frac{d^2}{d\phi^2}$. Sapendo che a tempo $t = 0$ la funzione d'onda è

$$\psi(\phi, t = 0) = A\,(\cos\phi + \sin\phi)^2$$

determinare al tempo t

- la funzione d'onda
- il valor medio dell'energia
- la probabilità che la particella si trovi nello stato $\psi'(\phi) = A'\,(\cos\phi - \sin\phi)^2$, opportunamente normalizzato. Ci sono dei tempi ai quali la probabilità vale 1?
- il valor medio della grandezza $B = 1 + \cos\phi$

Esercizio II

Due particelle distinguibili di spin 1/2 con Hamiltoniana

$$\frac{2\epsilon}{\hbar}\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 + B(S_{1z} + S_{2z})$$

si trovano a $t = 0$ nello stato

$$\frac{|++> + |-->}{\sqrt{2}}.$$

Determinare

- la funzione d'onda a tempo t
- probabilità e valor medi a tempo t del momento angolare **totale** e della sua proiezione lungo l'asse z
- la probabilità che al tempo t lo spin delle due particelle sia allineato e punti nella direzione del versore $\mathbf{e}_x = (1, 0, 0)$
- ripetere l'esercizio nel caso in cui B sia una funzione arbitraria $B(t)$ del tempo

Esercizio III

Sia data una particella vincolata sull'intervallo $-L \leq x \leq L$ da una barriera impenetrabile e soggetta a un potenziale

$$V(x) = -\frac{\lambda \hbar^2}{2m} \delta(x)$$

con $\lambda > 0$. Determinare

- l'energia dello stato fondamentale al variare di λ. Trovare in particolare per quali valori di λ l'energia dello stato fondamentale è negativa, nulla o positiva
- il valore dell'energia dello stato fondamentale per $\lambda \to \infty$ e per $\lambda \to 0$
- la probabilità che una particella nello stato fondamentale vi rimanga se istantaneamente il potenziale localizzato a $x = 0$ viene rimosso

Tema d'esame di Elementi di MQ. Giugno 2010

Risolvere due dei seguenti esercizi (tempo: due ore)

Esercizio I

Il risultato di una misura a tempo $t = 0$ della proiezione lungo l'asse z del momento angolare **totale** di due particelle (non identiche) di spin 1/2 è $\hbar$. Le particelle sono soggette a un campo magnetico costante $\vec{B} = B\vec{e}_x$. Determinare a tempo t

- i possibili risultati e le probabilità di una misura della componente $S_x^{(1)}$ lungo l'asse x dello spin della **prima** particella.
- i possibili risultati e le probabilità di una misura della proiezione del momento angolare **totale** S_z lungo l'asse z.

Esercizio II

Una particella è soggetta al potenziale a simmetria centrale

$$V(x, y, z) = \begin{cases} 0 & r < a \\ V_1 & r > a \end{cases} \qquad V_1 > 0, a > 0 \tag{1}$$

Determinare

- i livelli energetici degli stati legati con $l = 0$
- i valori di V_1 per cui esistono esattamente tre stati legati con $l = 0$

Esercizio III

Sia dato un oscillatore tri-dimensionale con Hamiltoniana

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\left(x^2 + y^2\right) + 2m\omega^2 z^2 \,.$$

Determinare

- i livelli energetici del sistema
- la degenerazione dei livelli energetici
- il generico stato con energia $E = 3\hbar\omega$
- i valori possibili e le probabilità di una misura di L_z nello stato individuato al punto precedente. Per quali tra questi stati, la probabilità che L_z sia positivo è massimale?

Tema d'esame di Elementi di MQ. Luglio 2010

Risolvere due dei seguenti esercizi (tempo: due ore)

Esercizio I

Il risultato di una misura a tempo $t = 0$ della proiezione lungo l'asse z del momento angolare totale di due particelle (non identiche) di spin 1/2 è 0. Scrivere lo stato piú generale compatibile con questa informazione. Le particelle sono soggette a un campo magnetico costante $\vec{B} = B\vec{e}_x$. Determinare a tempo t

- i possibili risultati e le probabilità di una misura della proiezione della componente del momento angolare totale S_z.

Esercizio II

Una particella è soggetta al potenziale a simmetria centrale

$$V(x, y, z) = \begin{cases} -V_0 & r < a \\ V_0 & r > a \end{cases} \qquad\qquad V_0 > 0, a > 0 \tag{1}$$

Determinare

- i livelli energetici degli stati legati con $l = 0$
- i valori di V_0 per cui esistono esattamente due stati legati con $l = 0$

Esercizio III

Un oscillatore tri-dimensionale

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + 2m\omega^2 \left(x^2 + y^2\right) + m\frac{\omega^2}{2}z^2\,.$$

è posto in un campo elettrico costante nella direzione z. Determinare

- i livelli energetici del sistema
- i valor medi $< \vec{x} >$ e $< r^2 >$ nello stato fondamentale e nel primo stato eccitato del sistema.

Tema d'esame di Elementi di MQ. Settembre 2010

Risolvere due dei seguenti esercizi (tempo: due ore)

Esercizio I

Sia data una particella vincolata sull'intervallo $0 \leq x \leq a$ da una barriera impenetrabile con funzione d'onda a $t = 0$

$$\mathcal{N}\left(\sin\frac{\pi x}{a} + 4\sin\frac{\pi x}{a}\cos\frac{\pi x}{a}\right)$$

dove $\mathcal{N}$ è una costante di normalizzazione. Determinare

- la probabilità che al tempo t la particella si trovi nello stato descritto dalla funzione d'onda
$$\mathcal{N}'\left(\sin\frac{\pi x}{a} - \sin\frac{\pi x}{a}\cos\frac{\pi x}{a}\right)$$
- la probabilità che, se al tempo $t = 0$ la buca viene istantaneamente raddoppiata, la particella si trovi nel primo stato eccitato del sistema finale.

Esercizio II

Siano dati l'Hamiltoniana e il vettore d'onda a tempo $t = 0$

$$H = \hbar\begin{pmatrix} 0 & \epsilon \\ \epsilon^* & 0 \end{pmatrix}, \qquad \psi(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \epsilon = |\epsilon|e^{i\phi}$$

- determinare la probabilità che al tempo t il sistema si trovi nello stato $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
- calcolare il valor medio e le probabilità dei risultati di una misura dell'osservabile $C = i\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ al tempo t

Esercizio III

Un oscillatore tri-dimensionale

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + 2m\omega^2 z^2 + m\frac{\omega^2}{2}\left(x^2 + y^2\right).$$

è posto in un campo elettrico costante nella direzione z. Determinare

- i livelli energetici del sistema
- i valor medi $< z^2 >$ e $< L_z >$ nel primo stato eccitato (se il livello è degenere prendere una generica combinazione lineare degli stati associati).