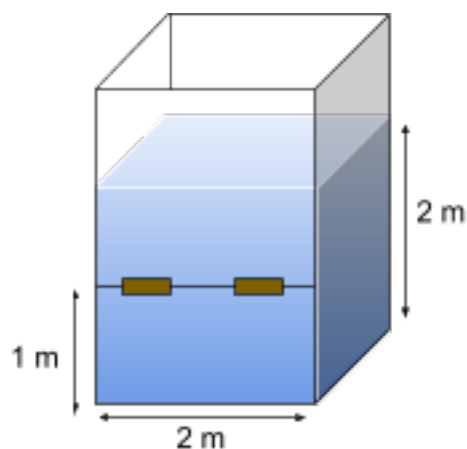


Problema 1: Un serbatoio cubico aperto è riempito di acqua ($\rho=10^3 \text{ kg/m}^3$) fino a un'altezza $H=2.00 \text{ m}$. Su uno dei lati il recipiente è chiuso da uno sportello di altezza $h=1.00 \text{ m}$ e larghezza $L=2.00 \text{ m}$, incernierato sul proprio lato superiore e con il lato inferiore coincidente con il fondo del recipiente (figura). Si determini **a)** la forza netta esercitata sullo sportello e **b)** la forza che deve essere esercitata alla base dello sportello e la reazione vincolare della cerniera affinché lo sportello rimanga chiuso.



Soluzione: Poiché la pressione atmosferica agisce sia sulla superficie libera dell'acqua sia all'esterno della parete, la forza netta sullo sportello è dovuta solo alla forza associata alla pressione idrostatica: $dF(z) = \rho g (H-z) L dz$, dove H è l'altezza complessiva del fluido, z l'altezza dalla base e $H-z$ la profondità rispetto alla superficie libera dell'elemento di fluido in esame.

a) La forza complessiva di pressione si ottiene integrando l'espressione di dF da 0 a h :

$$F_p = \rho g L \int_0^h (H - z) dz = \rho g L \left(Hh - \frac{h^2}{2} \right) = 29.4 \text{ kN}$$

b) Poiché lo sportello è un corpo rigido, la condizione di equilibrio richiede che la risultante delle forze sia nulla e il momento delle forze esterne sia nullo. Scegliendo il polo sull'asse della cerniera, la forza di pressione $dF(z)$ che agisce alla quota z (z sotto la cerniera: $z < h$) contribuisce con un momento infinitesimo di modulo: $dM = (h-z) dF(z)$, dove $h-z$ è la distanza dalla cerniera (si noti che $\sin\theta=1$ poiché la forza di pressione è ortogonale alla superficie dello sportello e dunque al braccio). Il momento complessivo è:

$$M = \int_0^h (h - z) dF = \rho g L \int_0^h (h - z)(H - z) dz$$

$$M = \rho g L \left(H - \frac{h}{3} \right) \frac{h^2}{2} = 16.3 \text{ kNm}$$

Per la condizione di equilibrio sui momenti, la forza che deve essere esercitata alla base dello sportello è: $F_b = M/h = 16.3 \text{ kN}$.

Per la condizione di equilibrio sulle forze, la reazione vincolare della cerniera è, in modulo: $F_v = F_p - F_b = 13.1 \text{ kN}$

Problema 2: Un osservatore inerziale O misura due eventi di coordinate

- $x_A = 3000 \text{ m}$, $t_A = 1.00 \cdot 10^{-6} \text{ s}$
- $x_B = 5000 \text{ m}$, $t_B = 3.00 \cdot 10^{-6} \text{ s}$

Determinare, se esiste un sistema di riferimento O' per cui gli eventi avvengono nello stesso punto o un sistema di riferimento in cui gli eventi sono simultanei. In caso positivo determinare il fattore β della trasformazione di Lorentz da O a O' . [si assuma $c = 3.00 \cdot 10^8$ m/s]

Soluzione: L'intervallo spaziale e temporale in O' sono rispettivamente:

$$\Delta x' = \gamma \Delta x - \gamma \beta c \Delta t$$

$$\Delta t' = \gamma \Delta t - \frac{\gamma \beta}{c} \Delta x$$

Gli eventi hanno luogo nella stessa posizione in O' se $\Delta x' = 0$, ossia:

$$\beta = \frac{\Delta x}{c \Delta t} = 3.33 > 1$$

Dato che $\beta > 1$, gli eventi non possono essere spazialmente coincidenti in nessun SRI. Sono dunque eventi di tipo spazio e risultano simultanei nel SRI per cui $\Delta t' = 0$, ossia:

$$\beta = \frac{c \Delta t}{\Delta x} = 0.3$$

Problema 3: Due astronavi senza benzina si muovono a velocità costante sulla stessa retta in traiettoria di collisione frontale. Al tempo $t=0$, il pilota della prima astronave misura nel proprio riferimento inerziale la distanza tra le due astronavi, $d=5.4 \times 10^{11}$ m, e la velocità relativa dell'altra astronave, $v = 0.6c$. Dà immediatamente l'ordine di evacuazione al proprio equipaggio e nello stesso istante invia un segnale luminoso, in vuoto, per informare il pilota dell'altro veicolo di dare lo stesso ordine. Il pilota della seconda astronave dà ordine di evacuazione appena riceve il segnale. Il tempo necessario a evacuare le astronavi è $\Delta t = 30$ min nel riferimento proprio di ciascuna astronave. Si dica, calcolando esplicitamente l'intervallo di tempo ordini e urto, quali equipaggi si salvano.

Soluzione:

Vi sono tre eventi in questo ordine temporale: 1) ordine di evacuazione in S e invio dell'impulso luminoso da S a S' , 2) Ricezione dell'impulso in S' e ordine di evacuazione in S' . 3) urto. L'evento 2) avviene prima di 3) perché l'impulso si muove a velocità maggiore della velocità relativa tra le navi. Nel riferimento di S il tempo disponibile per l'evacuazione è la differenza dei tempi tra l'evento 2) e l'evento 1). Per S' il tempo disponibile è la differenza dei tempi tra l'evento 3) e l'evento 1).

Sia S l'osservatore della prima astronave e S' l'osservatore della seconda. Per S , l'urto avviene al tempo $t_u = d/0.6c = 50$ min. L'equipaggio ha il tempo di mettersi in salvo.

Il segnale luce inviato da S a S' raggiunge la seconda astronave dopo un tempo t_s tale che la somma della distanza coperta dalla luce, $d_L = ct_s$, e la distanza coperta dall'astronave, $d_A = 0.6ct_s$, sia uguale alla distanza totale che separa le astronavi al tempo $t=0$: $d = d_L + d_A$. Dunque: $t_s = d/1.6c = 18,8$ min.

Nel riferimento di S , il tempo a disposizione per l'evacuazione della seconda astronave è $\Delta t_e = t_u - t_s = 31,2$ min. Visto da S , l'equipaggio di S' , in moto relativo rispetto a S , impiega un tempo superiore al "tempo proprio" di evacuazione:

$\Delta t_s = \gamma \Delta t = \Delta t / \sqrt{1-\beta^2} = 37,5 \text{ min}$. Questo intervallo di tempo è maggiore del tempo a disposizione di S' nel riferimento di S ($\Delta t_e = 31,2 \text{ min}$). Dunque per S , l'equipaggio di S' non ha scampo.

Dal punto di vista di S' , invece, il tempo necessario per evacuare la nave è il tempo proprio $\Delta t = 30 \text{ min}$, mentre l'intervallo di tempo disponibile tra ordine e urto è calcolabile tramite trasformazioni di Lorentz, notando che in S' l'ordine di evacuazione e l'urto sono due eventi che avvengono nello stesso punto. Vale quindi la relazione: $\Delta t_e = \gamma \Delta t_e' + \gamma \beta \Delta x' / c$, con $\Delta x' = 0$.

Ossia per S' : $\Delta t_e' = \Delta t_e / \gamma = \Delta t_e \sqrt{1-\beta^2} = 25 \text{ min}$. Poiché questo intervallo di tempo è inferiore al tempo proprio di evacuazione, anche per S' l'equipaggio è spacciato.

Nota aggiunta dopo le correzioni – Poniamoci subito nel riferimento di S' . All'istante $t=0$ le coordinate (t, x) delle astronavi sono, per S , $(0,0)$ e $(0,d)$. Per S' : $\Delta x' = \gamma \Delta x - \gamma \beta \Delta t$ e dunque $d' = \gamma d$ (*). L'impulso luminoso raggiunge S' in un tempo $t_L = d'/c$, mentre l'urto avviene dopo un tempo $t_U = d'/0,6c$. Il tempo a disposizione per evacuare è: $\Delta t_e' = d'/0,6c - d'/c = \gamma d/c * (0,4/0,6) = 25 \text{ min}$ che coincide con il risultato del metodo precedente.

(*) Questo è stato spesso confuso scrivendo $d' = d/\gamma$.

Problema 4: Una particella di massa a riposo M decade in due particelle di massa rispettivamente $m_1 = M/\sqrt{2}$ e $m_2 = 0$. Si trovino l'energia e la quantità di moto delle particelle nello stato finale, nel riferimento solidale a M . Si trovi inoltre, nello stesso sistema di riferimento nel riferimento solidale a m_1 , la velocità delle due particelle.

[Suggerimento: per facilitare i calcoli porre $c=1$]

Soluzione: Nel riferimento comovente con M , si hanno le relazioni:

- $M = E_1 + E_2$ (conservazione dell'energia totale)
- $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 0$ (conservazione della quantità di moto)
- $E_1^2 = p_1^2 + m_1^2$ e $E_2 = p_2$ (relazioni di dispersione)

Dalla seconda si ha $p_1 = p_2$ in modulo. Sostituendo nella prima e risolvendo per p_1 si trova:

$$p_1 = \frac{M^2 - m_1^2}{2M} = \frac{M}{4}$$

Da cui:

$$E_1 = \frac{3}{4}M$$

$$E_2 = \frac{M}{4}$$

Le velocità delle particelle sono:

$$\beta_1 = \frac{p_1}{E_1} = 0,33; \quad \beta_2 = \frac{p_2}{E_2} = 1$$

Nel riferimento comovente con m_1 le velocità sono, senza bisogno di calcolo, $\beta_1=0$ – ovvio – e $\beta_2=1$, per il postulato della relatività speciale.

Se si vuol ritornare al SI, sarà sufficiente moltiplicare per c quante volte serve per sistemare le relazioni in termini dimensionali ():*

- $p_1 = M/4c$ (massa per velocità)
- $E_1 = \frac{3}{4} Mc^2$ (massa per velocità al quadrato)
- $E_2 = \frac{1}{4} Mc^2$
- $v_1 = \beta_1 c$ e $v_2 = \beta_2 c$

() Si intende con le dimensioni del SI: per il sistema con $c=1$ (adimensionale) le relazioni sono dimensionalmente corrette senza c .*