

Quarta prova parziale di Fisica I del 14/06/2017

1) Un pistone mobile esercita una pressione $p=2.0 \times 10^5 \text{ Pa}$ su di un volume $V=10.0$ litri di acqua, contenuto in un recipiente cilindrico di raggio $R=5.0 \text{ cm}$.

Calcolare la forza esercitata dall'acqua sul fondo del recipiente e sulla superficie laterale.

Supponendo di praticare un foro di area $A=1 \text{ mm}^2$ ad un'altezza $h=1 \text{ cm}$ dal fondo del recipiente, calcolare la velocità di uscita dell'acqua e la velocità con cui scende il livello dell'acqua nel recipiente, nell'istante successivo all'apertura del foro.

Soluzione: *Il testo non è chiarissimo. È ragionevole assumere che il recipiente sia in atmosfera e che sopra il pistone e esternamente al recipiente agisca la pressione atmosferica $p_{atm}=1,013 \times 10^5 \text{ Pa}$. Oppure si può interpretare il testo pensando che la pressione p includa il contributo della pressione atmosferica. Il procedimento non cambia, cambiano i risultati numerici. Risolviamo assumendo che la pressione alla superficie limite dell'acqua a contatto con il pistone sia p_0 e poi daremo il risultato numerico per $p_0=p+p_{atm}$ e per $p_0=p$. L'una o l'altra scelta andrà bene, purché consistente nella soluzione di tutti i quesiti del problema.*

Iniziamo a calcolare l'altezza della colonna di acqua nel recipiente:

$$h = V/\pi R^2 = 1,27 \text{ m}$$

Forza agente sul fondo:

La pressione sulla superficie di fondo è costante, poiché la superficie è tutta alla stessa profondità. Dunque è sufficiente calcolare il prodotto della pressione sul fondo del recipiente per la superficie del fondo: $F = (p_0 + \rho gh) \pi R^2$

- $F = 1.67 \text{ kN}$ prendendo $p_0=p$

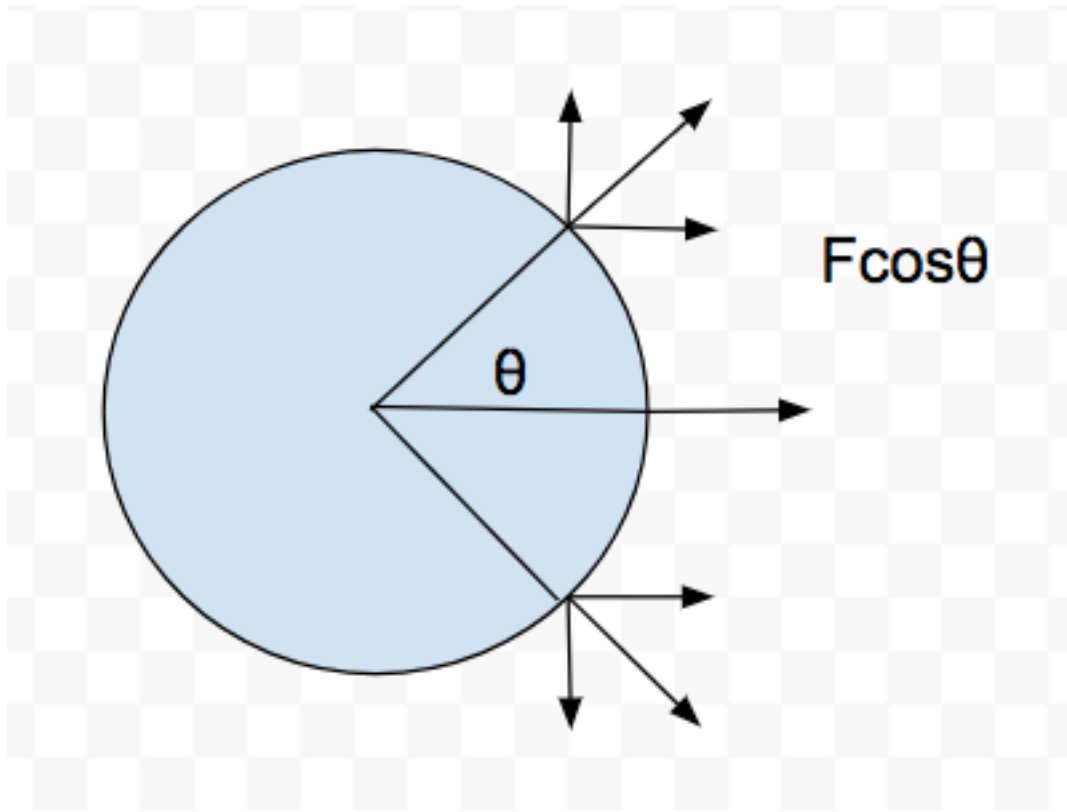
- $F = 2.48 \text{ kN}$ prendendo $p_0=p+p_{atm}$

Forza agente sulla parete laterale:

*La forza alla superficie limite è sempre ortogonale alla superficie. Per isotropia della pressione, la forza è identica su tutte le superfici infinitesime alla stessa profondità e sempre diretta ortogonalmente alla superficie. Ne consegue che la forza complessiva esercitata dall'acqua sulla superficie laterale è **nulla**.*

*INTERMEZZO: Possiamo ricavare questo risultato in modo analitico, calcolando la forza su una porzione di superficie corrispondente ad un arco di lunghezza. La pressione sulla superficie laterale non è uniforme ma varia con la quota secondo $p(h) = (p_0 + \rho gh)$. Su una superficie infinitesima $dS = ds dh$ a profondità h e di altezza infinitesima dh agisce la forza $dF = (p_0 + \rho gh) dS = (p_0 + \rho gh) ds dh$, ortogonale alla superficie. La forza su un arco di circonferenza di lunghezza l è data dalla somma **vettoriale** di tutte le forze infinitesime. Per ragioni di simmetria, la risultante è diretta ortogonalmente al punto centrale dell'arco. Le componenti*

delle forze infinitesime parallele a questa direzione si sommano, le componenti trasverse si elidono.



Dunque serve calcolare la somma delle componenti $dF \cos \vartheta = p(h) \cos \vartheta ds dh$, dove $\vartheta = s/R$ è l'angolo sotteso da un arco di lunghezza s a partire dal centro dell'arco di lunghezza l , $ds dh$ è una superficie infinitesima nel punto di coordinate ϑ e h , con $ds = R d\vartheta$. Si dovrà dunque calcolare l'integrale.

$$F = R \int_{-l/2R}^{l/2R} \cos(\theta) d\theta \int_0^h (p_0 + \rho gh) dh$$

Il primo integrale è **nullo** se calcolato su un arco che copre l'intera circonferenza ($l=2\pi R$), confermando il risultato già ricavato.

Invece, ad esempio, su una semicirconferenza ($l=\pi R$) si ha:

$$F = R \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(\theta) d\theta \int_0^h (p_0 + \rho gh) dh$$

$$F = 2R \int_0^h (p_0 + \rho gh) dh$$

$$F = 2R(p_0 h + \frac{\rho gh^2}{2})$$

QUESTO NON ERA RICHIESTO

Velocità di uscita dal foro:

È ragionevole ipotizzare regime stazionario di un fluido ideale, incomprimibile e irrotazionale. La velocità di uscita dal foro è ricavabile combinando l'equazione di Bernoulli per un punto alla superficie superiore (h) e uno sulla superficie del foro con l'equazione di continuità:

$$\begin{aligned} - p_0 + \rho gh + 1/2 \rho v_1^2 &= p_{atm} + \rho gh_f + 1/2 \rho v_2^2 \\ - S_1 v_1 &= S_2 v_2 \end{aligned}$$

Dato il rapporto tra la superficie superiore ($S_1 = \pi R^2 = 7854 \text{ mm}^2$) e la sezione del foro ($S_2 = A = 1 \text{ mm}^2$), la velocità $v_2 = 1.27 \times 10^{-4} v_1$ può essere trascurata nel risolvere la prima equazione, da cui:

$$v_1 = \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho} + 2g\Delta h}$$

Sostituendo i dati si ottiene:

$$\begin{aligned} - v_1 &= 14,9 \text{ m/s} \text{ (e } v_2 = 1,9 \text{ mm/s)} \text{ prendendo } p_0 = p \\ - v_1 &= 20,6 \text{ m/s} \text{ (e } v_2 = 2,6 \text{ mm/s)} \text{ prendendo } p_0 = p + p_{atm} \end{aligned}$$

2) Dalla terra si osservano due astronavi che si muovono in direzioni ortogonali: l'astronave **A** ha velocità $\mathbf{u}_A = -0.9 \text{ c}$ lungo l'asse y e l'astronave **B** ha velocità $\mathbf{u}_B = 0.9 \text{ c}$ lungo l'asse x .
Determinare modulo e direzione del vettore velocità dell'astronave **A** misurata dal pilota dell'astronave **B**.

Soluzione:

Ricorriamo alla formula relativistica di composizione delle velocità:

$$v'_x = \frac{v_x - u}{1 - v_x u / c^2}$$

$$v'_y = \frac{1}{\gamma} \frac{v_y}{1 - v_x u / c^2}$$

Nel caso in esame, v_x e v_y sono le componenti della velocità di **A** nel riferimento terrestre: $v_x = 0$ e $v_y = -0.9c$; $u = u_B = 0.9c$ e $\gamma = 1/\sqrt{1 - (u/c)^2} = 2.294$

Ne consegue, per il riferimento di **B**:

$$\begin{aligned} - v'_x &= -0.90c \\ - v'_y &= -0.39c \end{aligned}$$

Per il modulo si ha:

$$- \quad v' = \sqrt{v_x'^2 + v_y'^2} = 0.98 c$$

Il vettore velocità forma un angolo

$$- \quad \theta = \text{atan}\left(\frac{v_y'}{v_x'}\right) = \text{atan}\left(\frac{1}{\gamma}\right) = 0.41 \text{ rad}$$

con l'asse delle x nel riferimento di B ed ha verso negativo (entrambe le componenti sono negative).

3) Dei pioni neutri ($m = 140 \text{ MeV}/c^2$) sono prodotti in laboratorio con energia $E = 14 \text{ GeV}$. I pioni decadono in una coppia di fotoni, di massa nulla.

a) Determinare l'energia dei due fotoni nel sistema di riferimento in cui il pione è a riposo.

b) Determinare il β della trasformazione di Lorentz dal sistema di riferimento in cui il pione è a riposo a quello del laboratorio.

c) Determinare nel sistema di riferimento del laboratorio l'energia dei fotoni e l'angolo fra i due fotoni quando nel sistema di riferimento in cui il pione è a riposo essi sono emessi in direzione perpendicolare alla direzione di volo del pione.

Soluzione:

a) *Nel riferimento in cui il pione è a riposo, la quantità di moto iniziale è nulla. Dunque per la conservazione della quantità di moto si ha, per i due fotoni:*

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 0$$

Poiché il fotone è di massa nulla, il modulo della quantità di moto del fotone coincide con la sua energia, a meno di c: $E=pc$. Ciò implica:

$$E_1 = E_2$$

Per la conservazione dell'energia, l'energia totale dello stato iniziale coincide con l'energia dello stato finale:

$$E_{in} = E_1 + E_2$$

Dunque:

$$E_{1,2} = \frac{m_0 c^2}{2} = 70 \text{ MeV}$$

b) *Nel sistema in cui il pione è a riposo: $E = m_0 c^2 = 140 \text{ MeV}$. Nel sistema del laboratorio: $E = m_0 \gamma c^2 = 14 \text{ GeV}$. Il fattore di Lorentz per spostarsi dal sistema del laboratorio al sistema comovente con il pione, e viceversa, è dunque $\gamma = E/m_0 c^2 = 100$. Il corrispondente fattore β è:*

$$\beta = \sqrt{\frac{\gamma^2 - 1}{\gamma^2}} = 0.99995$$

c) Possiamo ricavare la cinematica del decadimento nel riferimento del laboratorio tramite trasformazione di Lorentz del quadrivettore energia-momento dal sistema di riposo del pione al sistema del laboratorio. L'energia E' di ciascun fotone nel riferimento del laboratorio è:

$$E' = \gamma E + \gamma \beta c p_L$$

Dove p_L rappresenta la componente della quantità di moto del fotone nel riferimento comovente con il pione (pione a riposo) allineata alla direzione del moto del pione (cioè allineata all'asse x della trasformazione di Lorentz), mentre E rappresenta l'energia del fotone nel riferimento del pione a riposo. Poiché nel caso in esame, $p_L = 0$, e $E = m_0 c^2 / 2$, si ha:

$$E' = \gamma E = 7 \text{ GeV}$$

Per ragioni di simmetria, l'angolo α formato dai due fotoni è pari al doppio dell'angolo θ formato da ciascun fotone con la direzione di moto del pione (asse x). Possiamo scrivere:

$$\sin \theta = \frac{p'_T}{|p'|} = \frac{p_T c}{E'}$$

La componente trasversa all'asse x della quantità di moto è invariante di Lorentz: il numeratore coincide con l'energia dei fotoni nel sistema di riferimento di riposo del pione. Da cui:

$$\sin \theta = 1/\gamma$$

In modo alternativo si può scrivere:

$$\tan \theta = \frac{p'_T}{p'_L} = \frac{p_T c}{\gamma \beta E} = \frac{1}{\gamma \beta}$$

ove si è fatto ricorso alla trasformazione di Lorentz per la componente longitudinale della quantità di moto. Questa relazione è equivalente alla precedente, per l'algebra dei vettori. Si può facilmente verificare, per ulteriore divertimento, che $\sin \theta = 1/\gamma$ implica $\cos \theta = \beta$ e dunque $\tan \theta = 1/\gamma \beta$.

Se ne conclude, usando ad esempio la prima relazione, che:

$$\alpha = 2 \arcsin \left(\frac{1}{\gamma} \right) = 20 \text{ mrad}$$

4) Due particelle di massa a riposo m , collidono e formano una nuova particella di massa a riposo $M = 6m$.

a) Calcolare l'energia minima delle due particelle nel sistema di riferimento del centro di massa (urto frontale).

b) Calcolare l'energia minima della particella in moto nel sistema di riferimento in cui una delle due particelle è ferma (urto su bersaglio fisso).

Soluzione: [Faccio lo sforzo di non mettere $c=1$].

Il problema è risolto nel modo più semplice ricorrendo all'uso della massa

invariante, definita da $m^*c^2 = \sqrt{(\sum_i E_i)^2 - (\sum_i \vec{p}_i c)^2}$. Questa grandezza è conservata in un urto relativistico, in virtù della conservazione dell'energia e della quantità di moto, ed è invariante relativistico: il suo valore cioè non cambia al cambiare del SRI, offrendo la possibilità di calcolarlo nel riferimento più agevole.

L'energia minima nell'urto si ha quando il corpo di massa M viene prodotto a riposo, ossia tutta l'energia incidente è tradotta in massa e l'energia cinetica, o la quantità di moto, dello stato finale è nulla. In questi termini, la massa invariante del sistema cercato è $Mc^2 = 6mc^2$.

a) Urto frontale di due particelle identiche con $E_i^2 = (p_i c)^2 + (mc^2)^2$, $i=1,2$:

- $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 0$
- $E_1 = E_2$

$$\begin{aligned} Mc^2 &= \sqrt{(E_1 + E_2)^2 - (\vec{p}_1 + \vec{p}_2)^2 c^2} \\ 6mc^2 &= \sqrt{(E_1 + E_2)^2} \end{aligned}$$

da cui si ottiene che l'energia di ciascuna particella è: $E = 3mc^2$

b) Nel secondo caso:

- $E_1 = mc^2$ (bersaglio fisso, $p_1=0$)
- $E_2^2 = (p_2 c)^2 + (mc^2)^2$ (particella in moto)

$$\begin{aligned} Mc^2 &= \sqrt{(mc^2 + E_2)^2 - \vec{p}_2^2 c^2} \\ 6mc^2 &= \sqrt{2E_2 mc^2 + 2m^2 c^4} \end{aligned}$$

da cui si ottiene l'energia della particelle in moto: $E = 17mc^2$

Metodo alternativo per il punto b):

È possibile, anche se più laborioso, ricavare l'energia della particella incidente su

bersaglio fisso, partendo dal risultato del caso di urto frontale nel CdM e calcolando la trasformazione di Lorentz per il quadrivettore energia-momento dal sistema del CdM al sistema di riferimento in cui una particella è a riposo.

Scegliendo, ad esempio, il riferimento in cui la particella 1 è a riposo, il fattore di Lorentz della trasformazione è $\gamma = E_1^{\text{CdM}}/mc^2$. Dato il risultato del punto a), $\gamma=3$.

Poiché le particelle sono identiche, per l'energia e il momento longitudinale della particella 2 nel CdM possiamo scrivere:

- $E_2 = m\gamma c^2$
- $p_{L,2} = m\gamma\beta c$

Applicando la trasformazione di Lorentz al riferimento con la particella 1 fissa:

$$E' = \gamma E_2 + \gamma\beta c p_{L,2}$$

$$E' = mc^2 \gamma^2 + mc^2 (\gamma\beta)^2$$

$$E' = mc^2 (2\gamma^2 - 1) = 17mc^2$$

Questo risultato coincide con il precedente e l'ho riportato perché alcuni hanno provato questa strada, non sempre con successo.