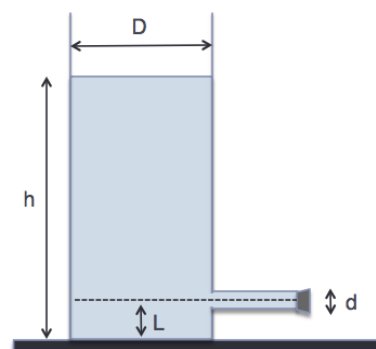


Fisica I – Anno Accademico 2015-2016 - Compitino IV

Problema 1: Un recipiente è costituito da un cilindro verticale di diametro $D = 9.0 \text{ cm}$, sul quale è innestato un tubo orizzontale di diametro $d = 3.0 \text{ cm}$, con asse a distanza $L = 5.0 \text{ cm}$ dal fondo del cilindro. Il tubo orizzontale è chiuso da un tappo di massa trascurabile. Il recipiente è posto su un piano orizzontale. Il recipiente viene riempito con acqua ideale ($\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3$) e quando l'acqua raggiunge un'altezza di $h = 50 \text{ cm}$ dal fondo, il tappo salta. Si determini:



a) La velocità con cui l'acqua esce dal tubo nel momento in cui salta il tappo;

b) La forza necessaria per mantenere fermo il recipiente sul piano nell'istante in cui salta il tappo.

[Suggerimento: si assuma per il punto b) che v sia costante mentre viene espulsa la massa dm in un istante dt]

Soluzione:

(a) Per il teorema di Bernoulli, la velocità di uscita dal tubo e la velocità alla superficie libera sono collegate dalla differenza di pressione nei due punti:

$$\frac{1}{2}\rho v^2 = \rho g(h - L) + \frac{1}{2}\rho v_0^2. \text{ Inoltre, per l'equazione di continuità: } v_0 D^2 = v d^2.$$

Combinando le relazioni:

$$v^2 = 2g(h - L) + v^2 \left(\frac{d}{D}\right)^4$$

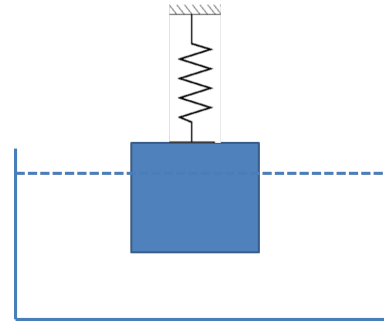
ossia:

$$v = \sqrt{2g(h - L)/(1 - (d/D)^4)} = 2,95 \text{ m/s}$$

(b) Per il teorema dell'impulso:

$$F = \frac{dp}{dt} \sim v \frac{dm}{dt} = v \rho \frac{dV}{dt} = \rho \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 v^2 = 17,1 \text{ N}$$

Problema 2: Un cubo di lato $a = 0.4 \text{ m}$ e massa m è attaccato ad una molla di costante elastica $k=1 \text{ N/m}$ ed è immerso in acqua ($\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3$). All'equilibrio la molla ha lunghezza $L = 1 \text{ m}$ ed il cubo è immerso per $\frac{3}{4}$ del suo volume. Si determini **(a)** la densità ρ_m del materiale di cui è composto il cubo; **(b)** Il periodo delle piccole oscillazioni se il cubo viene leggermente rialzato rispetto alla sua posizione di equilibrio.



Soluzione

(a) In condizioni di equilibrio, la risultante delle forze agenti sul cubo (forza peso, spinta di Archimede e forza elastica della molla) è nulla:

$$\rho_m a^3 g - \frac{3}{4} \rho a^3 g - kL = 0$$

dunque:

$$\rho_m = \frac{3}{4} \rho - \frac{kL}{a^3 g} = 751 \text{ kg/m}^3$$

(b) Assumendo che la superficie libera dell'acqua sia molto grande rispetto alle dimensioni del cubo, l'innalzamento e l'abbassamento del cubo non determinano una variazione del livello dell'acqua. Dunque uno spostamento verticale $x=x(t)$ dalla posizione di equilibrio, determina una variazione della forza elastica:

$$\begin{aligned} dF_{el} &= -kx \\ dF_{Arch} &= -\rho g a^2 x \end{aligned}$$

ove il segno concorde dei due termini indica che entrambe le spinte sono verso l'alto per una variazione positiva della lunghezza della molla (abbassamento del corpo). L'equazione del moto sotto l'azione di questa forza di richiamo diventa:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + (k + \rho g a^2) x = 0,$$

la cui soluzione è un moto oscillatorio con periodo:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\rho_m a^3}{k + \rho g a^2}} = 1,1 \text{ s}$$

Problema 3: Due astronavi lasciano la terra con velocità uguali in modulo e direzione, ma in versi opposti. Dopo un tempo Δt , l'osservatore terrestre (S) misura una distanza relativa tra le astronavi $D = 2 \text{ anni-luce}$. Per gli osservatori

su ciascuna delle astronavi è invece trascorso un tempo $\Delta t' = 1$ anno da quando sono partiti.

(a) Qual è la velocità delle astronavi rispetto alla terra?

(b) Qual è la velocità relativa delle astronavi?

[Suggerimento: si risolva (a) per una astronave, collegando $\Delta t'$ a Δx e Δt di quella astronave, poi si risolva (b). Per l'osservatore terrestre $\Delta x/\Delta t = v$]

Soluzione rapida per (a) Poiché l'intervallo è un invariante relativistico, possiamo scrivere per S' e S : $(c\Delta t')^2 - \Delta x'^2 = (c\Delta t)^2 - \Delta x^2$. Per S , ogni astronave si è allontanata di metà della distanza tra le due astronavi a velocità $v = \Delta x/\Delta t$; per S' i due eventi, partenza e posizione dopo un anno, avvengono nello stesso luogo: l'astronave. Dunque, in anni e anni-luce, $\Delta x = c$, $\Delta t = 1/\beta$; $\Delta t' = 1$, $\Delta x' = 0$; da cui:

$$c^2 = c^2 \frac{1}{\beta^2} - c^2 \quad \text{ossia} \quad \beta^2 = 1 - \beta^2 \quad (*)$$

da cui la velocità delle due astronavi nel riferimento terrestre, con segno definito dal verso del moto:

$$v = \pm c/\sqrt{2}$$

Soluzione "standard" per (a): Gli intervalli di tempo e spazio nei due sistemi mettono in relazione due eventi: la partenza da terra e l'osservazione dopo un tempo $\Delta t'$ (per l'osservatore sull'astronave) e una distanza D (per l'osservatore terrestre). Per S' gli eventi avvengono nello stesso luogo (l'astronave): $\Delta x' = 0$ e $\Delta t' = 1$ anno. Per l'osservatore terrestre (S) ciascuna astronave percorre una distanza $\Delta x = 1$ anno-luce. A questo percorso corrisponde un intervallo di tempo $\Delta t = \Delta x/v$ per l'osservatore S . Per l'astronave in moto con velocità $+v$, cioè equiversa all'asse x dell'osservatore S , una delle relazioni di Lorentz fornisce:

$$\Delta t' = \gamma \left(\Delta t - \frac{\beta \Delta x}{c} \right)$$

$$\Delta t' = \gamma \Delta x \left(\frac{1}{v} - \frac{v}{c^2} \right) = \frac{\gamma \Delta x}{v} (1 - \beta^2) = \frac{\Delta x}{\gamma v}$$

Poiché $\Delta x = 1$ anno-luce e $\Delta t' = 1$ anno, possiamo scrivere: $\Delta t' = \Delta x/c$, che inserita nell'equazione porta a $\gamma\beta = 1$, ovvero $\beta^2 = 1 - \beta^2$, equivalente a (*).

(b) Per reciprocità del moto, la velocità di un'astronave rispetto all'altra è identica per osservatori su una qualsiasi delle astronavi. Scegliamo S' solidale con l'astronave in moto con velocità $u = -c/\sqrt{2}$ rispetto al riferimento terrestre. Nel riferimento terrestre S , l'altra astronave ha velocità $v_x = +c/\sqrt{2}$. Dalla composizione della velocità, troviamo in S'

$$v'_x = \frac{v_x - u}{1 - v_x u/c^2} = \frac{\frac{c}{\sqrt{2}} + \frac{c}{\sqrt{2}}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2\sqrt{2}c}{3} = 0,94c$$

Problema 4:

Nel SRI del laboratorio, una particella di massa a riposo m si muove lungo l'asse x con velocità v (relativistica) e collide con una particella di massa a riposo $2m$ che, prima dell'urto, si muove con velocità $-v$ lungo lo stesso asse. Nell'urto le due particelle si fondono in una nuova particella. **(a)** Si trovi l'espressione della **massa a riposo** della nuova particella, e si mostri che nel limite $v \ll c$, il risultato coincide con la massa del corpo che si forma in un urto anelastico classico. **(b)** Si trovi il β della particella nel SRI del laboratorio.

Soluzione:

(a) Poniamo $c=1$, per semplicità di calcolo. La nuova particella ha massa:

$$M^2 = E^2 - p^2 \quad (1)$$

con $E = E_1 + E_2$ (conservazione dell'energia totale relativistica) e $\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$ (conservazione della quantità di moto). Sostituendo in (1), si ottiene la relazione:

$$M^2 = (E_1 + E_2)^2 - (\vec{p}_1 + \vec{p}_2)^2$$

che avremmo potuto scrivere direttamente, come invariante relativistico (massa invariante). In base ai dati del problema, detto $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$:

$$\begin{aligned} E_1 &= \gamma m; & \vec{p}_1 &= \gamma m v; \\ E_2 &= 2\gamma m; & \vec{p}_2 &= -2\gamma m v; \end{aligned}$$

Da cui:

$$M = \sqrt{9\gamma^2 m^2 - \gamma^2 m^2 v^2} = 3\gamma m \sqrt{1 - \frac{v^2}{9}}$$

Esplicitando c , si trova:

$$M = 3\gamma m \sqrt{1 - \frac{v^2}{9c^2}}$$

Nel limite $v \ll c$, $\gamma \rightarrow 1$ e $v^2/9c^2 \rightarrow 0$, per cui $M \rightarrow 3m$ che rappresenta il risultato classico per un urto completamente anelastico.

(b) Nel sistema del laboratorio il corpo di massa M si muove con β definito da:

$$\beta = \frac{pc}{E} = \frac{|\vec{p}_1 + \vec{p}_2|c}{E_1 + E_2} = \frac{-\gamma m v c}{3\gamma m c^2} = -\frac{1}{3} \frac{v}{c}$$