

Soluzioni – Compitino III – 2015

Problema 1:

Temperatura di equilibrio dalla conservazione dell'energia (1° principio):

- $Q_1 + Q_2 = m c_s (T_f - T_1) + C_T (T_f - T_2) = 0$
- $T_f = (m c_e T_1 + C_T T_2) / (m c_s + C_T) = \mathbf{357,84\ K}$

Variazione di entropia:

- $\Delta S = \Delta S_{H_2O} + \Delta S_{oggetto}$
- $= m c_s \ln(T_f/T_1) + C_T \ln(T_f/T_2) = \mathbf{192,1\ J/K}$

[Nota: La variazione di entropia del sistema è la somma della variazione di entropia delle sue parti. Per ciascun corpo si calcola la variazione di entropia lungo una trasformazione reversibile che connette lo stato iniziale e finale. Ad esempio per l'acqua: $\Delta S = \int_{T_1}^{T_f} \frac{dQ_{rev}}{T} = \int_{T_1}^{T_f} \frac{m c_s dT}{T} = m c_s \int_{T_1}^{T_f} \frac{dT}{T} = m c_s \ln\left(\frac{T_f}{T_1}\right)$.]

Problema 2 (senza soluzione numerica)

Temperatura finale:

- Nella prima trasformazione (espansione libera adiabatica) è $\Delta U = 0$, dunque il gas occupa tutto il volume $3V_0$ rimanendo a temperatura costante (T_1).
- Nella trasformazione adiabatica reversibile $TV^{(\gamma-1)} = \text{costante}$, dunque $T_f = T_1 3^{(\gamma-1)}$, con $\gamma = 5/3$ (gas monoatomico)

Variazione di entropia:

- $\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2$
- La prima trasformazione (irreversibile) connette due stati alla stessa temperatura. La variazione di entropia si può calcolare lungo una isoterma reversibile che connette gli stessi stati:
 $\Delta S_1 = \Delta Q/T = nR \ln(3V_0/V_0)$
- La seconda trasformazione (adiabatica reversibile) è isoentropica:
 $\Delta S_2 = 0$

Problema 3:

AB (isoterma reversibile):

- $T_B = T_A$; $\Delta U = 0$; $Q = W = nR \ln(V_B/V_A) > 0$ (assorbito a T_A)

BC (isocora reversibile):

- $T_C = T_A(p_C/p_B)$; $W = 0$; $Q = \Delta U = nC_V \Delta T < 0$ (ceduto a sorgenti da T_B a T_C)

CD (isobara irreversibile):

- $T_D = T_A(p_D/p_A) < T_C$ (poiché D è anche connesso ad A da una isocora e $p_A > p_B$)
- $\Delta U = nC_V \Delta T$; $W = p \Delta V$; $Q = nC_p \Delta T < 0$ (ceduto a T_D)

DA (isocora irreversibile):

- $W = Q = \Delta U = nC_V \Delta T > 0$ (assorbito a T_A)

Rendimento: $\eta = \Sigma Q / (Q_{AB} + Q_{DA})$

Entropia:

- Metodo 1: $\Delta S_u = \Delta S_{amb}$ (poiché $\Delta S_{sist} = 0$ sul ciclo) con ΔS_{amb} somma delle variazioni di entropia su tutte le trasformazioni:
 - Nelle trasformazioni AB, CD, DA il calore è scambiato con sorgenti a temperature costante per ciascuna delle quali $\Delta S_{amb} = -Q/T$;
 - Nella trasformazione BC (reversibile) $\Delta S_{amb} = -\Delta S_{sist} = -nC_V \ln(T_C/T_B)$
- Metodo 2: $\Delta S_u = \Delta S_{amb} (irr) + \Delta S_{sist} (irr)$ con la somma estesa alle sole trasformazioni irreversibili CD e DA, poiché la variazione di entropia dell'universo sulle trasformazioni reversibili è nulla.
 - Per ΔS_{amb} su CD e DA si procede come nel metodo 1
 - Per il sistema si ricorre al calcolo lungo trasformazioni reversibili del gas che connettono gli stati:
 - $\Delta S_{sist}(CD) = \int_C^D \frac{dQ_{rev}}{T} = nC_p \int_C^D \frac{dT}{T} = nC_p \ln\left(\frac{T_D}{T_C}\right)$
 - $\Delta S_{sist}(DA) = \int_D^A \frac{dQ_{rev}}{T} = nC_V \int_D^A \frac{dT}{T} = nC_V \ln\left(\frac{T_A}{T_D}\right)$

Problema 4:

Temperatura e pressione finale:

- Il sistema è isolato ($Q=0$) e nell'espansione libera ($W=0$), dunque $\Delta U = n_1 C_V (T_f - T_1) + n_2 C_V (T_f - T_2) = 0$, con C_V uguale nei due gas.
Da qui $T_f = (n_1 T_1 + n_2 T_2) / (n_1 + n_2)$
- Per una miscela di gas perfetti: $p_f = (n_1 + n_2) RT_f / V_f$ con $V_f = V_A + V_B$;

Variazione di entropia:

La variazione di entropia è la somma della variazione di entropia di ciascun gas. Per ciascuno di essi si deve usare la relazione per una trasformazione generica di un gas ideale. Dalla definizione di entropia sappiamo (in termini infinitesimi): $dS = dQ_{rev}/T$, con dQ_{rev} calore scambiato in una trasformazione reversibile che connette gli stessi stati.

Ricorrendo al 1° principio della TD, possiamo scrivere:

$$dS = dQ_{rev}/T = (dU + pdV)/T = nC_V dT/T + nR dV/V$$

(ove si ricorre all'equazione di stato dei gas perfetti perché il calcolo dell'entropia si compie su una trasformazione reversibile).

L'integrale su una trasformazione in cui cambiano sia volume sia temperatura, dà (per ciascun gas):

$$\Delta S = nC_V \ln(T_f/T_i) + nR \ln(V_f/V_i)$$