

Soluzioni - Compitino III - 2014

Problema 1:

Per il calcolo della variazione di entropia conviene usare la relazione: $\Delta S_u = \Delta S_{amb}$ (poiché $\Delta S_{sist} = 0$ sul ciclo) con ΔS_{amb} somma delle variazioni di entropia su tutte le trasformazioni. In tutte le trasformazioni del ciclo il calore Q è scambiato con una sorgente a temperatura costante per ciascuna delle quali $\Delta S_{amb} = -Q/T$ (con il segno negativo poiché il calore scambiato con la sorgente ha segno opposto al calore scambiato con il sistema). Nello specifico:

- AB: isoterma a T_A : $\Delta S_{amb}(AB) = -nR \ln(V_B/V_A)$
- BC: isobara a T_C : $\Delta S_{amb}(BC) = -nC_p (T_C - T_A)/T_C$
- CA: isocora a T_A : $\Delta S_{amb}(CA) = -nC_v (T_A - T_C)/T_A$

Il valore di T_C si ricava sapendo che BC è isobara, e che B e C sono due stati di equilibrio, e dunque descritti dall'equazione di stato dei gas perfetti.

Problema 2:

Quantità di ghiaccio che si fonde: La massa di ghiaccio nel calorimetro è "grande" e con ciò si intende che non tutto il ghiaccio viene fuso nello scambio termico tra ghiaccio e corpo. Dunque la temperatura del ghiaccio rimane bloccata alla temperatura di equilibrio della fase liquida e solida dell'acqua, e il corpo si deve portare in equilibrio alla stessa temperatura. Poiché il calorimetro è termicamente isolato ($Q=0$), e nel processo non è compiuto lavoro meccanico ($W=0$), vale $\Delta U = C_T (T_0 - T_1) + \lambda m = 0$, ove m =massa di ghiaccio che si fonde. Dunque:

- $m = C_T(T_0 - T_1) / \lambda$

Variazione di entropia: $\Delta S = \Delta S_{corpo} + \Delta S_{ghiaccio}$ con:

- $\Delta S_{ghiaccio} = \int_i^f \frac{dQ_{rev}}{T} = 1/T_0 \int_i^f dQ_{rev} = Q/T_0 = \frac{\lambda m}{T_0}$

Poiché il processo avviene a temperatura costante, nel calcolo dell'entropia si usa l'integrale di Clausius lungo una (ipotetica) trasformazione reversibile che scambi quella stessa quantità di calore a quella temperatura

- $\Delta S_{corpo} = \int_i^f \frac{dQ_{rev}}{T} = \int_i^f \frac{C_T dT}{T} = C_T \ln\left(\frac{T_0}{T_1}\right)$

Nuovamente, nel calcolo dell'entropia si usa l'integrale di Clausius lungo una trasformazione reversibile che porta il corpo dallo stato con temperatura iniziale T_1 allo stato con temperatura finale T_0 , scambiando calore in modo reversibile con infinite sorgenti tra T_1 e T_0

Problema 3:

La trasformazione descritta è adiabatica ($Q=0$) e irreversibile, poiché la pressione interna ed esterna differiscono di una quantità finita. Poiché la trasformazione è irreversibile, gli stati **non** sono connessi dall'equazione per la trasformazione adiabatica reversibile.

Gli stati intermedi del sistema non sono noti, ma lo stato iniziale e lo stato finale sono due stati di equilibrio per il gas, dunque per essi vale l'equazione di stato dei gas perfetti:

- $p_A V_A / T_A = p_B V_B / T_B$

Questa relazione non è sufficiente a determinare separatamente la variazione di volume e temperatura. La seconda equazione è fornita dal 1° principio della termodinamica. Per raggiungere l'equilibrio meccanico il sistema cambia volume ($W \neq 0$) e energia interna. Poiché $Q=0$, $-W = \Delta U$, ossia:

- $p_{\text{ext}} \Delta V = nC_V \Delta T$

Mettendo questa equazione a sistema con la precedente si ottiene il risultato

Problema 4:

Il lavoro del ciclo è $W = \Sigma Q$. Il calore scambiato in ciascuna trasformazione reversibile è calcolabile nel piano T-S dall'area sottesa alle curve che descrivono le trasformazioni, poiché $dQ_{\text{rev}} = T dS$. Nello specifico:

- $Q_{AB} = \frac{1}{2} (T_A + T_B)(S_B - S_A) > 0$ [area del trapezio]
Calore assorbito (positivo) da infinite sorgenti comprese tra T_A e T_B
- $Q_{BC} = T_B(S_A - S_B) < 0$ [area del rettangolo]
Calore ceduto (negativo) a una sorgente a temperatura T_B
- $Q_{CA} = 0$ [isoentropica reversibile]

Dunque $W = \frac{1}{2} (T_A + T_B)(S_B - S_A) + T_B(S_A - S_B) = \frac{1}{2} (T_A - T_B)(S_B - S_A)$.

Il rendimento è $\eta = W/Q_{\text{assorbito}} = (T_A - T_B) / (T_A + T_B)$

[Si noti che questo ciclo reversibile, **non** è un ciclo a due sorgenti. Dunque il per rendimento non si può ricorrere al teorema di Carnot, ma deve essere calcolato esplicitamente a partire dalla definizione.]