Es n°1

Accorciamento molla da cons. en. meccanica:

$$\frac{1}{2} k \Delta x^2 = \frac{1}{2} m_f v_f^2 \Longrightarrow \Delta x = \sqrt{\frac{m_f}{k}}\, v_f$$

con v_f velocità di m_f dopo l'urto e m_f massa dopo l'urto: $m_f = m_2$ nell'urto elastico e $m_f = m_1 + m_2$ nell'urto anelastico.

a) Urto elastico: $v_f = v_2$

$$\begin{cases} m_1 v_0 = m_1 v_1 + m_2 v_2 & \Delta \vec{p} = 0 \\ \frac{1}{2} m_1 v_0^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 & \Delta E_k = 0 \end{cases}$$

$$(*) \begin{cases} v_1 = v_0 - \frac{m_2}{m_1} v_2 \\ \frac{1}{2} m_1 v_0^2 = \frac{1}{2} m_1 \left(v_0 - \frac{m_2}{m_1} v_2\right)^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \end{cases}$$

Da (*) si trova v_2:

$$\cancel{\frac{1}{2} m_1 v_0^2} = \cancel{\frac{1}{2} m_1 v_0^2} - m_2 v_0 v_2 + \frac{1}{2} \frac{m_1}{m_2} v_2^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$

$$0 = m_2 v_2 \left(-v_0 + \frac{1}{2}\left(\frac{m_2}{m_1} + 1\right) v_2\right)$$

$$v_2 = \frac{2 m_1}{m_1 + m_2} v_0 = \frac{2 \cdot 0.1\,\mathrm{Kg}}{0.3\,\mathrm{Kg}}\, 0.1\,\mathrm{m/s} = 6.7 \times 10^{-2}\,\mathrm{m/s}$$

$$\Delta x = \left[\frac{0.2\,\mathrm{Kg}}{0.1\,\mathrm{N/m}}\right]^{1/2} 6.7 \times 10^{-2}\,\mathrm{m/s} = 2.9 \times 10^{-2}\,\mathrm{m}$$

b) Urto ANELASTICO:

$$m_1 v_0 = (m_1 + m_2) v_f \qquad \Delta\vec{p} = 0 \quad [\Delta E_k' = -E_k$$

$$v_f = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_0 = \frac{1}{2} v_2 = 3{,}3 \times 10^{-2}\ m/s$$

$$\Delta x = \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{k}}\, v = \sqrt{\frac{0.3\ kg}{1\ N/m}}\ 3.3 \times 10^{-2}\ m/s$$

$$= 1.6 \times 10^{-2}\ m$$

Es. 2

Assumendo la galassia come distribuzione sferica, il moto orbitale del sist. solare è determinato dalla massa totale contenuta nella sfera di raggio pari all'orbita e come se tutta la massa fosse concentrata nel fuoco.

2ª legge della dinamica per F. gravitazionale:

$$\cancel{M_S}\, \omega^2 R = G \frac{M_G \cancel{M_S}}{R^2}$$

$$\frac{v^2}{\cancel{R}} = \frac{G M_G}{R^{\cancel{2}}}$$

$\longrightarrow$

$$M_G = \frac{v^2 R}{G}$$

$$M_G = \frac{(2.5\times10^5 \, m/s)^2 \cdot 2.8\times10^{20}\, m}{6.7\times10^{-11}\, N m^2 Kg^{-2}} =$$

$$= 2{,}67 \cdot 10^{41}\, Kg$$

Esercizio 3

a) Conservazione del momento angolare

$$L_1 = m v_1 r_1 = m v_2 r_2 = L_2$$

[poiché $\sin\theta = 1$ nel perigeo e apogeo dove $v \perp r$]

$$\Longrightarrow \frac{v_1}{v_2} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{6.0\times10^4\, Km}{1.2\times10^4\, Km} = 5$$

b) Cons. energia meccanica :

$$\frac{1}{2}\cancel{m} v_1^2 - \frac{G M_T \cancel{m}}{r_1} = \frac{1}{2}\cancel{m} v_2^2 - \frac{G M_T \cancel{m}}{r_2}$$

$$\frac{1}{2}(v_1^2 - v_2^2) = G M_T \left[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right]$$

$\longrightarrow$

$$25\, v_2^2 - v_2^2 = 2\, G M_T \left[\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}\right]$$

$$v_2 = \left[\frac{G M_T}{12}\left(\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}\right)\right]^{1/2} =$$

$$= \left[\frac{6.7\times 10^{-11}\, N\, m^2\, Kg^{-2}\ 10^{24}\, Kg}{12}\left(\frac{6.0 - 1.2}{6.0\times 1.2}\right)\frac{1}{10^{7}\, m}\right]^{1/2}$$

$$\simeq 1.5\ km/s$$

$$v_1 = 5\, v_2 \simeq 7.5\ km/s$$

Es. 4

Giro completo se $E_k^f \geq 0$ con E_k^f en. cinetica quando asta verticale -

Cons. energia meccanica dopo l'urto:

$$E_k^f + E_p^f = E_k^i + E_p^i$$

$$E_k^i - \Delta E_p = E_k^f \geq 0$$

$$E_k^i \geq \Delta E_p = \underbrace{mg\,2d}_{\Delta E_p \text{ di } m} + \underbrace{Mg\,2\left(\frac{d}{2}\right)}_{\Delta E_p \text{ dell'asta}}$$

$$E_k^i \geq (2m + M)gd =$$

$$E_k^i \geq (2 \times 0.5\,kg + 1\,kg) \cdot 9.8\,m/s^2 \cdot 1\,m =$$

$$E_k^i \geq 19.6\,J$$

— Calcolo di E_k^i dopo l'urto, in funzione di v

$\longrightarrow$

Dopo l'urto velocita' angolare comune ω_i ($\omega_i = v_i/d$) per massa m e asta -

$$E_k^i = \frac{1}{2}(md^2 + I_A)\,\omega_i^2$$

con md^2 = mom. di inerzia di m rispetto ad A

$I_A = \frac{1}{3}Md^2$ mom. di inerzia dell'asta rispetto ad A

Nell'urto $\Delta p \neq 0$ e $\Delta L = 0$ (vincolo in A)

$$L_0 = m d v$$
$$L_i = (md^2 + I_A)\,\omega_i$$

Da cui ($L_0 = L_i$) : $mdv = (md^2 + I_A)\,\omega_i$

$$\omega_i = \frac{mdv}{md^2 + I_A}$$

$$E_k^i = \frac{1}{2}\cancel{(md^2+I_A)}\frac{(mdv)^2}{(md^2+I_A)^{\cancel{2}}} =$$

$$= \frac{1}{2}m\left[\frac{md^2}{md^2+I_A}\right]v^2 \longrightarrow$$

$$E_k = \frac{1}{2} m \left[\frac{1}{1 + \frac{I_A}{md^2}} \right] v^2 =$$

$$= \frac{1}{2} m v^2 \left[\frac{1}{1 + \frac{\frac{1}{3} M \cancel{d^2}}{m \cancel{d^2}}} \right] =$$

$$= \frac{1}{2} m v^2 \left[\frac{3m}{3m + M} \right]$$

$$E_k = \frac{1}{2} \; 0.5\,kg \left[\frac{3 \times 0.5 \; kg}{3 \times 0.5\,kg + 1\,kg} \right] v^2$$

$$= \frac{1}{2} \; \frac{0.5 \cdot 1.5}{2.5} kg \, v^2 = 0.15\,kg \; v^2$$

$$v \geq \left[\frac{19.6 \; N}{0.15 \; kg} \right]^{1/2} = \sqrt{130{,}6 \; \frac{m^2}{s^2}} \simeq 11.4 \; m/s$$