Fisica I – Prima prova parziale

1) Due autocarri di lunghezza l_1 = 15 m e l_2 = 20 m, sono in moto con velocità costanti v_1 = 17.0 m/s e v_2 = 19.5 m/s. Calcolare il minimo tempo ed il minimo tratto che il secondo autocarro deve percorrere nella corsia di sorpasso per sorpassare il primo autocarro.

SOLUZIONE:

Metodo A:
In un riferimento con solidale con il primo autocarro, il primo autocarro è fermo, mentre il secondo autocarro lo sopravanza con velocità **v' = $\mathbf{v_2}$-$\mathbf{v_1}$**, secondo la legge di composizione delle velocità di Galileo. In questo riferimento, il sorpasso è completato quando il secondo autocarro ha coperto una distanza pari alla somma dei due autocarri: $\mathbf{l_1+l_2}$. Questa distanza è coperta nel tempo:

- $\mathbf{\Delta t = (l_1+l_2) / v' = (l_1+l_2) / (v_2-v_1) = 35\ m / (2.5\ m/s) = 14\ s.}$

In questo intervallo di tempo, il secondo autocarro percorre nella corsia di sorpasso una distanza

- $\mathbf{d = v_2\ \Delta t = 19.5\ m/s \times 14\ s = 273\ m}$.

Metodo B:
In un riferimento fisso solidale con il terreno, durante il sorpasso il primo autocarro (lento) percorre in un tempo **Δt** la distanza $\mathbf{d_1 = v_1 \Delta t}$, e il secondo autocarro (rapido) una distanza $\mathbf{d = d_1+l_1+l_2 = v_2\ \Delta t}$. Si può scrivere un sistema con due equazioni e due incognite, **Δt** e **d**, che corrispondono alle grandezze cercate:

- $\mathbf{d = v_2\ \Delta t}$
- $\mathbf{d-(l_1+l_2) = v_1\ \Delta t}$

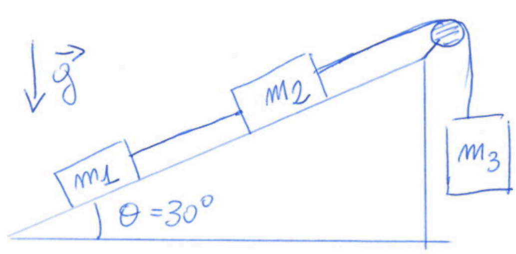
Sottraendo la seconda equazione dalla prima, si ottiene:

- $\mathbf{l_1+l_2 = (v_2-v_1)\ \Delta t}$, ossia:
- $\mathbf{\Delta t = (l_1+l_2) / (v_2-v_1) = 14\ s}$

Sostituendo nella prima equazione si ottiene infine:

- $\mathbf{d = v_2\ \Delta t = 273\ m}$.

2) Tre masse m_1 = 3.00 kg, m_2 = 2.00 kg e m_3 = 5.00 kg sono collegate da funi ideali come in figura. Le masse m_1 e m_2 sono appoggiate su un piano inclinato di 30° rispetto all'orizzontale. Non vi è attrito tra m_2 e il piano mentre vi è attrito con μ = 0.30 fra m_1 e il piano.
a) Determinare l'accelerazione delle masse.
b) Determinare le tensioni delle funi.



SOLUZIONE

Poiché $\mathbf{m_1+m_2=m_3}$, è ragionevole supporre, come ipotesi iniziale, che il sistema acceleri con $\mathbf{m_3}$ verso il basso e $\mathbf{m_1}$ e $\mathbf{m_2}$ a salire lungo il piano inclinato. Facciamo questa ipotesi iniziale, e assumiamo che i tre corpi abbiano accelerazione comune (fili inestensibili) e verso come indicato dalla freccia rossa in figura. Disponiamo dunque la forza di attrito opposta allo scorrimento (freccia verde). Verificheremo che la soluzione dia un'accelerazione positiva e consistente con questa ipotesi e che la scelta delle direzione dell'attrito sia stata corretta (in caso contrario dovremo ripetere la soluzione, cambiando i versi). Siano **T** e **T'** la tensione del filo tra $\mathbf{m_1}$ e $\mathbf{m_2}$ e tra $\mathbf{m_2}$ e $\mathbf{m_3}$, rispettivamente. Scriviamo l'equazione del moto per ciascun corpo:

m_1 : $\mathbf{m_1 a = T - m_1 g \sin\theta - \mu m_1 g \cos\theta}$
m_2 : $\mathbf{m_2 a = T' - T - m_2 g \sin\theta}$
m_3 : $\mathbf{m_3 a = m_3 g - T'}$

Si ha un sistema con tre equazioni e tre incognite, **T, T'** e **a**.
Dalla somma delle tre equazioni si ottiene:

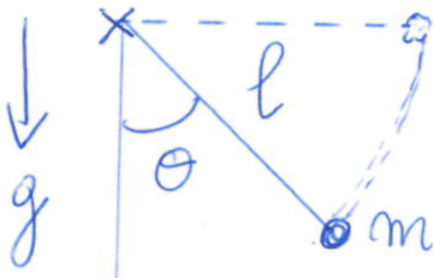
$\mathbf{(m_1+m_2+m_3)\, a = [m_3 - m_2 \sin\theta - m_1(\sin\theta+\mu\cos\theta)]\, g}$, ossia:

$\mathbf{a = g\, [m_3 - m_2 \sin\theta - m_1(\sin\theta+\mu\cos\theta)]/(m_1+m_2+m_3)}$
$\mathbf{= 9.8\ m/s^2\ [5 - 2\times\frac{1}{2} - 3(1/2 + 0.3\sqrt{3}/2)]\ kg / (10\ kg) = 1.68\ m/s^2}$

Poiché **a>0**, l'ipotesi avanzata sul verso dell'accelerazione è consistente con il risultato e la scelta del verso della forza di attrito è altresì corretta.

Per le tensioni si ottiene:
$\mathbf{T' = m_3 (g - a) = 40.5\ N}$
$\mathbf{T = m_1 (a + g \sin\theta + \mu g \cos\theta) = 27.3\ N}$ (oppure $\mathbf{T = T' - m_2 (a + g \sin\theta) = 27.3\ N}$)

3) All'estremo libero di un filo di lunghezza l = 0,75 m è collegata una massa m = 1.50 kg. La massa è inizialmente ferma con il filo in posizione orizzontale e viene lasciata libera di muoversi. Il carico di rottura del filo, cioè la massima tensione che il filo può sostenere senza spezzarsi, è $T_0 = 22$ N
a) Determinare l'angolo a cui il filo si spezza.
b) Determinare il valore minimo del carico di rottura del filo che consentirebbe alla massa di oscillare senza rompere il filo.
c) Come cambiano i risultati ai punti a) e b) se l'esperienza è ripetuta in un ascensore in moto verso l'alto con accelerazione $a = 2.00$ m/s^2 ?



SOLUZIONE:

Durante il moto, con traiettoria circolare di raggio **l**, l'accelerazione centripeta $\mathbf{a_C = a_C(\theta)}$ è determinata dalla tensione del filo $\mathbf{T=T(\theta)}$ e dalla componente della forza peso lungo il filo:

- $\mathbf{m a_C(\theta) = T(\theta) - mg \cos\theta}$

L'accelerazione centripeta è $\mathbf{a_C=v^2/l}$, con $\mathbf{v = v(\theta)}$. Omettendo, per semplicità di scrittura, l'indicazione della dipendenza da $\boldsymbol{\theta}$, si ottiene:

- $\mathbf{T = mg \cos\theta + mv^2/l = mg \cos\theta + 2E_K / l}$ (*)

L'energia cinetica $\mathbf{E_K}$ può essere espressa tramite la conservazione dell'energia meccanica, sapendo che nella posizione iniziale ($\boldsymbol{\theta}$**=90°**), ove la massa è ferma, l'energia cinetica è nulla:

- $\mathbf{E_K(\theta) = E_P(90^o) - E_P(\theta) = mgl - mgl(1-\cos\theta) = mgl \cos\theta}$

Sostituendo in (*), si ottiene:

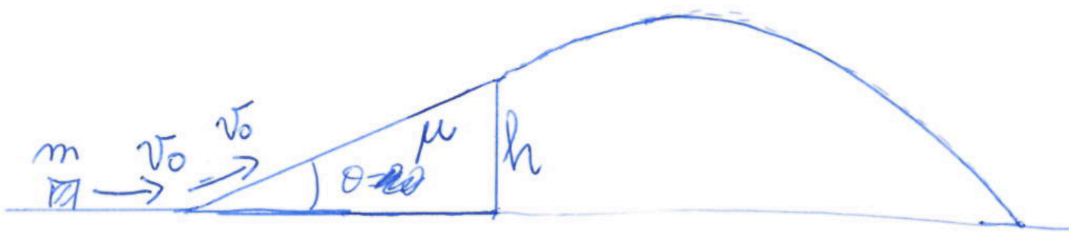
- $\mathbf{T = 3mg \cos\theta}$ (**)

a) Il filo si spezza per: $\mathbf{\theta_0 = acos(T_0 / 3mg) = acos(22\ N / (3\times1.5\ kg \times 9.8\ m/s^2)) = 60^0}$
b) Il carico di rottura deve essere superiore alla massima tensione del filo lungo la traiettoria della massa. Dalla relazione (**) si trova che la massima tensione del filo corrisponde a cosθ=1. Dunque, affinché si abbiano oscillazioni complete, il carico di rottura deve soddisfare $\mathbf{T>T_m = 3mg = 44.1\ N}$.
c) Nel riferimento dell'ascensore, non inerziale, la seconda legge della dinamica va modificata introducendo una forza apparente pari alla massa del corpo in oggetto per l'accelerazione del sistema non inerziale cambiata di segno. Nello specifico:

- $\mathbf{m a_C = T(\theta) - m (g+a) \cos\theta}$

dove la forza apparente coincide in direzione e verso con g (sulla verticale verso il basso), poiché l'accelerazione del sistema non inerziale è sulla verticale verso l'alto.
Ripetendo i passaggi, si trova per l'angolo di rottura e per T_m:
a) $\boldsymbol{\theta_0 = \mathrm{acos}\,(T_0 / 3m(g+a)) = 65^0}$
b) $\boldsymbol{T>T_m = 3m(g+a) = 53.1\ N}$

4) Un corpo puntiforme di massa m = 2.00 kg è in moto con velocità v_0 = 20 m/s lungo un piano orizzontale raccordato dolcemente ad un piano inclinato di 20° rispetto all'orizzontale, che termina ad un'altezza h =3.00 m. Il tratto orizzontale è privo di attrito mentre il tratto inclinato presenta un attrito con μ = 0.25.
a) Determinare la velocità del corpo quando si stacca dal piano inclinato
b) Determinare la massima altezza raggiunta dal corpo
c) Determinare la velocità $\mathbf{v_1}$ del corpo (indicandone modulo e direzione) quando giunge a terra.



SOLUZIONE

a) Per trovare la velocità v_h alla fine del piano inclinato possiamo ricorrere al teorema dell'energia cinetica $\boldsymbol{\Delta E_K = W_{n.cons.} + W_{cons.}}$, dove:

- $\boldsymbol{W_{n.cons.} = -\mu mg\cos\theta\ h/\sin\theta = -\mu/\tan\theta\ mgh}$ è lavoro della forza di attrito (negativo perché la forza è opposta allo spostamento);
- $\boldsymbol{W_{cons.} = -\Delta E_P = -mgh}$ è il lavoro della forza peso.

Dunque, $\boldsymbol{\Delta E_K = \frac{1}{2} m v_h^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = -(\mu/\tan\theta+1)\, mgh}$

- $\boldsymbol{v_h = \sqrt{v_0^2 - 2(\mu/\tan\theta + 1)\, gh} = 17.3\ m/s}$

b) Quando si stacca dal piano inclinato, il corpo segue una traiettoria parabolica. Il vertice della parabola è raggiunto quando la componente verticale della velocità, v_y, diventa nulla. La componente x della velocità rimane costante durante la traiettoria. Durante il moto parabolico esistono solo forze conservative. Si può ricorrere, elegantemente, alla conservazione dell'energia meccanica:

- $\boldsymbol{E_M = \frac{1}{2} m v_h^2 + mgh = \frac{1}{2} m\,[\,v_x^2(y) + v_y^2(y)\,] + mgy}$ (++)

dove il primo termine è l'energia meccanica nel punto **h** all'inizio della traiettoria e il secondo termine l'energia meccanica ad una qualunque quota **y** lungo la traiettoria. Alla quota massima, $\boldsymbol{v_y = 0}$. Inoltre $\boldsymbol{v_x}$ è costante lungo la traiettoria. Dunque: $\boldsymbol{mg(y_{max} - h) = \frac{1}{2} m\,(v_h^2 - v_x^2) = \frac{1}{2} m\, v_y^2(h)}$. Risolvendo per $\boldsymbol{y_{max}}$:

- $\boldsymbol{y_{max} = h + v_y^2(h)/2g = h + (v_h \sin\theta)^2 / 2g = 4.8\ m}$ (***)

In alternativa, si può ricorrere alla descrizione di un moto verticale uniformemente accelerato, con accelerazione di gravità negativa **a = – g**, con asse verticale verso l'alto. Per il moto uniformemente accelerato vale la relazione: $\boldsymbol{v_y^2(y) = v_y^2(h) - 2g\,(y-h)}$. Risolvendo per $\boldsymbol{v_y(y_{max}) = 0}$, si ritrova (***).

c) Per trovare il modulo della velocità v_1 quando il corpo tocca il suolo, è sufficiente, ricorrendo ancora alla conservazione dell'energia meccanica, risolvere (++) per y=0:

- $v_1 = \sqrt{v_x^2(0) + v_y^2(0)} = \sqrt{v_h^2 + 2gh}$ **= 18.9 m/s**

La direzione è individuata dall'angolo formato con l'orizzontale: **$\alpha = \text{atan}\,(v_y/v_x)$.** Dunque, al suolo:

- **$v_x = v_h \cos\theta = 16.3$ m/s** (componente x della velocità è costante lungo la traiettoria);
- **$v_y = -\sqrt{(v_1^2 - v_x^2)} = -9.6$ m/s** (con segno negativo perché il moto avviene verso il basso)
- **$\alpha = \text{atan}\,(v_y/v_x) = -0.53$ rad $= -30^0$**

By TTdF