

Analisi degli urti in relatività speciale:

(1)

$$\begin{aligned} - E_{\text{tot}} &= \sum (m_i c^2 + E_{K,i}) && \text{e' conservata} \\ \vec{p} &= \sum i \vec{p}_i && \text{e' conservato} \end{aligned}$$

⇒ Possiamo ancora classificare gli urti

$$\text{Elastici} \quad E_K^{\text{in}} = E_K^{\text{fin}}$$

→ significa che la somma delle
energie entranti è identica alla
somma delle energie uscenti

↪ le particelle collidono, ma rimangono
identiche prima e dopo l'urto

(ci sono urti quasi-elastici in cui le
particelle cambiano, ma "poco")

$$\text{Inelastici} \quad \Delta E_K \neq 0 \quad (< 0)$$

L'energia cinetica si trasforma in
energia delle particelle nello stato finale
[se c'è energia sufficiente]

"Esplorivi" → Disintegratori o acceleratori

$$\Delta E_K \geq 0 \quad \Delta E_K = \Delta m c^2$$

L'energia di massa nello stato iniziale
si converte in energia cinetica dei prodotti
di decadimento.

Le relazioni di riferimento per l'analisi degli urti sono:

$$(1) \quad \vec{p} = \gamma m_0 \vec{v}$$

v - velocità
nel r.f.s. S
 m_0 - massa nel
r.f.s. comovante

$$(2) \quad E_k = \gamma m_0 c^2 (\gamma - 1)$$

$$\approx \frac{1}{2} m_0 v^2 \text{ per } v \ll c$$

$$\frac{1}{2} \frac{p^2}{m_0}$$

$$(*) \quad E^2 = (pc)^2 + (m_0 c^2)^2$$

Energia totale

$$E = m_0 c^2 + E_k$$

La relazione (*) si ottiene manipolando (1):

$$\begin{aligned} p^2 &= (\gamma m_0 v)^2 + (\gamma m_0 c)^2 - (\gamma m_0 c)^2 \\ &= -m_0^2 c^2 + (\gamma m_0 c)^2 \\ (pc)^2 + (m_0 c^2)^2 &= E^2 \quad (\text{moltiplicando per } c) \end{aligned}$$

Se i prodotti dell'urto (o decadimento) sono 'lenti' ($\beta \rightarrow 0$ e $\gamma \rightarrow 1$), si può usare la relazione (2') nel limite classico. Altrimenti si deve usare la (2) completa o la (*) per mettere in relazione E e p o E_k e p delle singole particelle.

Esempio Decadimento α - Processo (3)
 spontaneo in cui un nucleo (A, Z)
 si disintegra in un nucleo (A', Z') e una particella
 α (${}^4\text{He}$) - Nel decadimento α :

$$A' = A - 4 \quad \text{— nucleo con 4 nucleoni in meno di } (A, Z)$$

$$Z' = Z - 2 \quad \text{— nucleo con 2 protoni in meno di } (A, Z)$$

Bilancio:

Nel SR di (A, Z) , ossia in cui A, Z è
 a riposo possiamo scrivere:



$$E_A = m_A c^2$$

$$E_{K,A} = 0 \quad A \text{ è fermo}$$

$$\vec{p}_A = \vec{p}_{A'} + \vec{p}_\alpha = 0$$

Dalla conservazione dell'energia:

$$E_A = E_{A'} + E_\alpha$$

$$(1) \quad m_A c^2 = m_{A'} c^2 + m_\alpha c^2 + E_{K,A'} + E_{K,\alpha}$$

Dalla cons. della q.tà di moto (momento
 lineare in relatività)

$$(2) \quad p_\alpha = p_{A'} \quad (\text{in modulo})$$

Dalle relazioni di dispersione (relazioni tra E e p) per ciascuna particella:

$$E_{A'}^2 = (p_{A'} c)^2 + (m_{A'} c^2)^2 \quad (3)$$

$$E_{\alpha}^2 = (p_{\alpha} c)^2 + (m_{\alpha} c^2)^2 \quad (4)$$

Complessivamente ho 4 equazioni
e ~~4 incognite~~ (assumendo note

* per m_{α} , m_{λ} , $m_{A'}$ note ho
quattro incognite:

$E_{A'}$, E_{α} , $p_{A'}$ e p_{α} (oppure $E_{K,A'}$, $E_{K,\alpha}$, $p_{A'}$ e p_{α})

* Oppure, se ~~noti~~ in un rivelatore misuro
 E_{α} e $E_{A'}$ ecc., posso risolvere per m_{α}, m_{λ} .

Ipotesiamo $m_{\lambda}, m_{A'}$ e m_{α} assegnati (ad
esempio $^{210}\text{Po} \rightarrow ^{210}\text{Pb} + \alpha$ - "killer di sple")

Bilancio in energia

$$M_A = M_{A'} + m_{\alpha} + \left(\frac{E_{K,A'} + E_{K,\alpha}}{c^2} \right)$$

Si ottiene il risultato già menzionato:

→

$$\frac{\Delta E_K}{c^2} = \Delta m^{\pm}$$

(5)

Affinché il processo sia possibile $\Delta E_K > 0$,
ossia $\Delta m^{\pm} = (M_A - M_{A'} + m_\alpha) > 0$

$$M_A > M_{A'} + m_\alpha$$

La grandezza $\Delta E_K \equiv Q$ è detta Q
valore della
reazione

Corrisponde al "calore" misurato da un
calorimetro che cattura l'energia rilasciata
nel processo — Le particelle liberate irritano
gli atomi circostanti in collisioni inelastiche
"elastiche" e dissipano l'energia cinetica in
calore —

⇒ Ma non avevamo detto che l'eu. cinetica
non è dissipata ma è convertita in massa?

→ Sì — ma questo è possibile solo se l'energia
della collisione è sufficiente a
creare la massa di una particella
stabile — Altrimenti l'energia
viene progressivamente dissipata —

Quando le particelle sono lente, la dissi-
pazione diventa dove viene recuperata

(6)

Nel decadimento α analitici

$$Q \approx 4-10 \text{ MeV}$$

$$(1 \text{ eV} = 1.6 \times 10^{-19} \text{ J})$$

$$m_\alpha \approx 4 \text{ GeV}$$

$$m_A \approx 100-200 \text{ GeV}$$

$$E_K \ll m_0 c^2 \quad \text{per tutte le particelle coinvolte}$$

$$E_K \approx m_0 c^2 + E_K$$

$$\text{Poiché } E_K = m_0 c^2 (\gamma - 1) \ll m_0 c^2$$

$$\text{implica } (\gamma - 1) \ll 1 \quad \text{ovvero } \gamma \approx 1$$

Le particelle prodotte sono non relativistiche e possiamo usare la relazione ~~per~~ nel

$$E_K = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} \frac{p^2}{m} \quad \text{per risolvere}$$

il sistema e trovare E_K e q dei prodotti di decadimento:

$$\begin{cases} M_A c^2 - (M_{A'} + m_\alpha) c^2 = E_{K,\alpha} + E_{K,A'} \\ \phi_\alpha = \phi_{A'} \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_\alpha = p_{A'} \\ Q = \frac{p_\alpha^2}{2m_\alpha} + \frac{p_{A'}^2}{2M_{A'}} = \frac{p_\alpha^2}{2m_\alpha} + \frac{p_{A'}^2}{2M_{A'}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow Q = E_{K,\alpha} \left(1 + \frac{m_\alpha}{M_{A'}} \right)$$

Poichè $m_\alpha \ll M_{A'}$, si ottiene

$$\begin{cases} E_{K,\alpha} \approx Q \\ E_{K,A'} \approx 0 \end{cases} \quad \begin{cases} p_\alpha \approx \sqrt{2m_\alpha Q} \\ p_{A'} \approx p_\alpha \end{cases}$$

Il nucleo A' , perante, rimane ^{ed era} a riposo.
La particella α rincula contro il nucleo che si disintegra -

- Calcolo esplicito di γ -

Nella soluzione abbiamo usato il limite non relativistico, osservando che $\gamma \approx 1$.

Possiamo essere più precisi e calcolare γ in modo esplicito -

Nel riferimento scelto (la particella α ~~non~~ ^è ferma) ~~esempio~~, ma il risultato è generale) ha

$$\vec{p} = \gamma m_\alpha \vec{v}$$

$$E = \gamma m_\alpha c^2$$

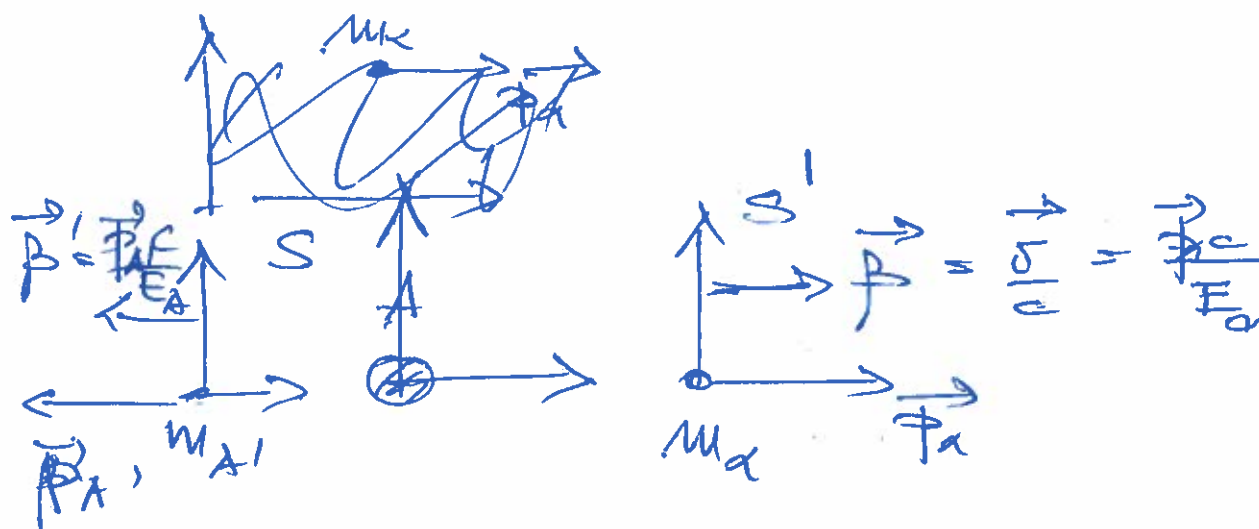
Dalla seconda: $\gamma = \frac{E}{m_\alpha c^2}$

Dalla prima ^{perchè} $\beta = \frac{pc}{E}$

(8)

Conoscendo E , p e m_0 di un corpo in un SRI si conoscono in modo immediato i valori di γ e β per esportarli al SRI comoviente con m_0

$$\gamma = \frac{E}{m_0 c^2} \quad \beta = \frac{pc}{E}$$



dunque in modo esplicito nell'esempio precedente:

$$\begin{aligned} \gamma_\alpha &= \frac{E_\alpha}{m_\alpha c^2} = \frac{E_{K,\alpha} + m_\alpha c^2}{m_\alpha c^2} = \\ &= 1 + \frac{E_{K,\alpha}}{m_\alpha c^2} \approx 1 + \frac{4 \text{ MeV}}{4 \text{ GeV}} \\ &\approx 1.001 \end{aligned}$$

Siamo nel limite non relativistico.

Nel caso relativistico con $\gamma \gg 1$, si deve usare le relazioni di dispersione complete

$$E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2$$

Qs. relazione merita alcune osservazioni:

1) Si può semplificare notevolmente la notazione ponendo $c = 1$

* E, p, m hanno le stesse unità di misura ($\equiv$ energia)

* Per le conversioni in SI:

$$\begin{array}{lll} E \rightarrow E & & \\ p \rightarrow p \cdot c & c = 3 \times 10^8 \text{ m/s} & \\ m \rightarrow mc^2 & c = 3 \times 10^8 \text{ m/s} & \end{array}$$

* Δx e Δt hanno le stesse unità di misura (~~$\equiv$ lunghezza~~) (~~tempi~~ lunghezze)

~~$$\Delta x \rightarrow c \Delta t$$~~

Es. 1 anno luce - distanza coperta dalla luce in 1 anno

2) Riorganizzando

$$m_0^2 = E^2 - p^2 \quad \text{---} \quad \boxed{\text{Invariante Rel.}}$$

Poiché m_0 è proprietà scalare ^(invarianta) di un corpo, m_0 è invariante relativistica

— La massa calcolata come $m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$

ma m_0 è la stessa proprietà del corpo in ogni SRI — È ben definita come massa nel sistema comovante

Ne consegue che $E^2 - p^2 = m_0^2 c^4$ è invariante relativistico

~~Non abbiamo ancora trovato come sono~~

E e p singolarmente non sono invarianti, dipendono dal moto relativo

$$E = \gamma m_0 c^2$$

$$\vec{p} = \gamma m_0 \vec{v}$$

γ dip. dal moto rel.

γ e $\vec{v}$ dip. dal moto

$E^2 - p^2$ è invariante.

- ~~qualitativo~~ (r)
- Dimostreremo in modo esplicito q.s. proprietà di invarianza nella collisione, quando troveremo ~~che~~ come E e $\vec{p}$ si trasformano al cambio di SR
 - [Trasf di Lorentz per E e p]
 - Ma per ora è sufficiente l'osservazione fisica che m_0 è proprietà intrinseca del corpo

Più in generale in ogni collisione e disintegrazione: $\neq$

$$E = \sum_i E_i$$

$$\vec{p} = \sum_i \vec{p}_i$$

cons. ENERGIA

" q.tà di moto

Se dunque in una collisione si forma una particella di massa m_0

$$m_0^2 = E^2 - \phi^2 = \left(\sum_i E_i \right)^2 - \left(\sum_i \vec{p}_i \right)^2$$

q.s. quantità è invariante relativistico

Andopamente, se un sistema si disintegra
in n particelle

$$m_0^2 = \left(\sum_f E_f \right)^2 - \left(\sum_f \vec{p}_f \right)^2$$

Se un sist. di n particelle - si trasforma in
 m particelle finali -

$$\left(\sum_i E_i \right)^2 - \left(\sum_i \vec{p}_i \right)^2 = \left(\sum_f E_f \right)^2 - \left(\sum_f \vec{p}_f \right)^2 = 0$$

Qual è il vantaggio di qst. espressione
rispetto alle relazioni individuali?

$$\begin{aligned} \sum_i E_i &= \sum_f E_f \\ \sum_i \vec{p}_i &= \sum_f \vec{p}_f \end{aligned}$$

→ la quantità $m^* = \left(\sum E \right)^2 - \left(\sum \vec{p} \right)^2$
è un invariante relativistico
detto **MASSA INVARIANTE** -

Posso calcolarlo in qualsiasi SR e
sfruttare questa proprietà di invarianza
per semplificare la soluzione del pb.

Posso scegliere un SR diverso per
lo stato iniziale e quello finale, se
qst. semplifica la soluzione

Note finali (prima degli esempi)

$$m^{*2} = E^2 - p^2 \quad \text{è invariante relativistica}$$

in modo analogo $\Delta s^2 = \Delta t^2 - \Delta x^2$
con la diff. che $m \geq 0$ - Non esistono
misure negative -

La relazione di dispersione e tutte le
relazioni discusse valgono anche per $m_0 = 0$

Particelle di massa nulla (ad esempio:
fotoni) hanno $E = pc$

$$2) \frac{pc}{E} = \beta = 1$$

$$3) \frac{E}{m_0 c^2} = \gamma = \infty$$

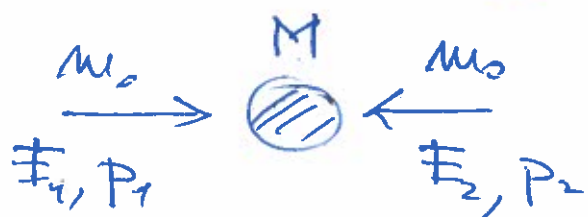
- Particelle di massa $m = 0$ hanno $v = c$
- Non si può realizzare una transf. di Lorentz
ad un SR in cui la particella è a riposo
(cioè $\gamma = \infty$, ciò che si muove con $v = c$
in un SR, si muove con $v = c$ in tutti
i SR $\perp$ $\rightarrow$ postulato di rel. speciale)
- $E = \gamma m c^2 = pc$ si mantiene finito
 $\gamma \Rightarrow \infty$ e $m \Rightarrow 0$

Esempi di collisioni e disintegrazioni

(14)

1) Collisione Frontale nel CM di due oggetti di massa identica m_0 -

(Vedi let. prec. per dim. della conservazione ΔE_K in massa - ora uso il formalismo della massa invariante che "assume" la conservazione di E_{tot} relativistica)



$$\vec{p}_1 = -\vec{p}_2$$
$$E_1 = E_2$$

Nel SR del CM il corpo di massa M è prodotto a riposo. La sua massa è uguale alla massa invariante del sistema entrante -

$$Mc^2 = \left[(E_1 + E_2)^2 - \underbrace{(\vec{p}_1 + \vec{p}_2)^2}_{=0 \text{ nel CM}} \right]^{1/2}$$
$$= [E_1 + E_2] = 2E$$

$$= 2m_0 + E_{K1} + E_{K2}$$

Qs. risultato coincide con il risultato trovato nell'analisi della lezione precedente. Il nuovo ps. formalismo estende (simplifica) quel risultato

L'esempio rappresenta la collisione di due fasci di particelle con CM coinc. con il SR-de-LAB

§) Collisioni frontali in bersaglio fisso (15)
nel laboratorio

$$\begin{array}{ccc} m_0 & m_0 & E = m_0 c^2 \\ \longrightarrow & \odot & p = 0 \\ E & & \end{array}$$

Massa invariante dell'oggetto che si può formare:

$$M = \sqrt{(E + m_0 c^2)^2 - p^2}$$

poiché

$$E_1 = E$$

$$E_2 = m_0 c^2 \quad \leftarrow \text{Fermo}$$

$$p_1 = p$$

$$p_2 = 0 \quad \leftarrow \text{Fermo}$$

$$\begin{aligned} M &= \sqrt{\underbrace{E^2 + 2m_0 E + m_0^2 c^4}_{= m_0^2 c^4} - p^2} = \\ &= \sqrt{2m_0 E + 2m_0^2 c^4} \end{aligned}$$

In questo caso $M \propto \sqrt{E}$

con fasci collidenti $M \propto E$

$$\begin{aligned} (\text{Nota se } m_1 \neq m_2 \Rightarrow M &= \sqrt{2m_1 E + m_1^2 c^4 + m_2^2 c^4} \\ M &\propto \sqrt{E} \end{aligned}$$

3) Disintegrazione $\rho \rightarrow \pi\pi$ con $m_\rho > 2m_\pi$ e $\beta_\pi = 0.932$ nel ref. a riposo delle ρ particellesia $m_\pi = 0.14 \text{ GeV}/c^2$ trovare m_ρ Soluzione:

$$\vec{P}_\rho = 0 \Rightarrow \vec{P}_\pi + \vec{P}_\pi = 0 \quad P_\pi \equiv P_1 = P_2$$

Massa Invariante:

$$\begin{aligned} m_\rho &= \left[(E_1 + E_2)^2 - (\vec{P}_1 + \vec{P}_2)^2 \right]^{1/2} = \\ &= \left[E_1^2 + 2E_1E_2 + E_2^2 - P_1^2 - 2\vec{P}_1 \cdot \vec{P}_2 - P_2^2 \right]^{1/2} = \\ &= \left[m_1^2 + m_2^2 + 2E_1E_2 - 2\vec{P}_1 \cdot \vec{P}_2 \right] \end{aligned}$$

Poiché m_ρ è invariante, quindi posso calcolare $E_1, E_2, \vec{P}_1, \vec{P}_2$ in qualsiasi sistema di riferimento - in quello in cui ρ è a riposo $\vec{P}_1 = \vec{P}_2$

$$m_\rho = \left[(E_1 + E_2)^2 \right]^{1/2} = 2E_\pi = 2\gamma m_\pi c^2 = \frac{2m_\pi c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

(fine)

Nota: ① Se misurati $\vec{p}_1$ e $\vec{p}_2$
 con $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 \neq 0$, come posso riportarmi
 al SR in cui p è a riposo?

$$\vec{p}_p = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$$

$$E_p = E_1 + E_2$$

$$E_1 = p_1^2 + m_\pi^2$$

$$E_2 = p_2^2 + m_\pi^2$$

$$\Rightarrow \beta = \frac{p_p c}{E_p}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Nota ②: Non sarebbe necessario - Poiché

M_p è invariante, se misurati $\vec{p}_1$ e $\vec{p}_2$

e E_1 e potrei determinare M_p

da:

$$M_p = \left[(E_1 + E_2)^2 - (\vec{p}_1 + \vec{p}_2)^2 \right]^{1/2}$$

con p_1 e p_2 misurati e

$$E_1^2 = p_1^2 + m_\pi^2$$

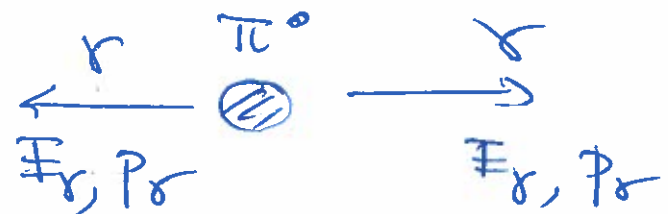
$$E_2^2 = p_2^2 + m_\pi^2$$

4) Disintegrazione $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ (18)

con $\gamma \equiv$ fotoni, particelle di massa nulla - $m_{\pi^0} = 0.14 \text{ GeV}$

Trovare E_γ della disintegrazione -

Soluzione:



$$m_\pi = \left[(E_1 + E_2) - (\vec{p}_1 + \vec{p}_2) \right]^{1/2}$$

nel riferimento del π^0 a riposo

$$\vec{p}_{\pi^0} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 0$$

$$E_1 = p_1 \quad (m_\gamma = 0)$$

$$E_2 = p_2$$

$$\Rightarrow m_\pi = 2E_\gamma$$

$$E_\gamma \equiv E_1 = E_2$$

$$E_\gamma = \frac{m_\pi}{2}$$

$$p_\gamma = \frac{m_\pi}{2}$$

(attenzione non
ho messo i c)

5) Annichilazione del positronio

(19)



$$W_e = 511 \text{ keV}$$

$$m^* = \sqrt{(E_{e^+} + E_{e^-})^2 - (\vec{p}_{e^+} + \vec{p}_{e^-})^2} \quad \text{Stato iniziale}$$

Nel rif. in cui il positronio è a riposo
 $\vec{p}_{e^+} + \vec{p}_{e^-} = 0$ $\vec{p}_{e^+} = 0$ e $\vec{p}_{e^-} = 0$

$$E_{e^+} = E_{e^-} = m_e$$

$$m^* = 2m_e$$

Stato finale: $\vec{p}_\gamma(1) + \vec{p}_\gamma(2) = 0$

$$p_\gamma(1) = p_\gamma(2)$$

$$E_\gamma(1) = E_\gamma(2) = E_\gamma$$

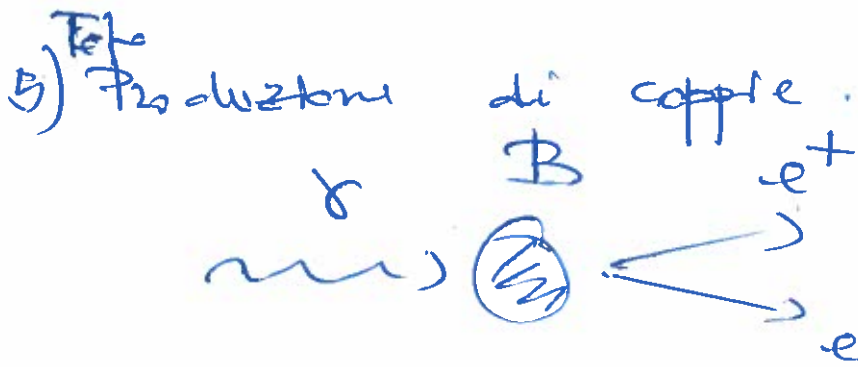
$$m^* = \sqrt{(E_\gamma(1) + E_\gamma(2))^2 - (\underbrace{\vec{p}_\gamma(1) + \vec{p}_\gamma(2)}_{=0})^2} =$$

$$2m_e = 2E_\gamma \quad \Rightarrow \quad E_\gamma = m_e$$

Ciascun fotone ha energia (cinetica)

uguale all'energia di massa a riposo dell'elettrone

→ TECNICA USATA NELLA DIAGNOSTICA PET



(20)

- Un fotone su un bersaglio di massa m_B può convertirsi in una coppia e^+e^- se c'è energia sufficiente

- Troviamo l'energia minima (di soglia) affinché il processo sia possibile

Stato iniziale Stato Finale

$$\gamma + B \rightarrow B + e^+ e^-$$

Stato iniziale ; $E_\gamma = p_\gamma$
(bersaglio a riposo) $E_B = m_B$ $p_B = 0$

Stato finale di energia minima !

$E_B = m_B$	$p_B = 0$
$E_{e^+} = m_e$	$p_{e^+} = 0$
$E_{e^-} = m_e$	$p_{e^-} = 0$

! Nel Rif. in cui tutte le particelle sono a riposo si deve infatti che l'energia sufficiente a produrre le masse degli elettroni -

Calcoliamo E_γ —

(2)

Stato iniziale: $m^* = \left[(E_B + E_\gamma)^2 - (\vec{p}_B + \vec{p}_\gamma)^2 \right]^{1/2}$

$$= \left[E_B^2 + 2E_\gamma E_B + \underbrace{E_\gamma^2 - p_\gamma^2}_{=0} \right]^{1/2} \quad m_\gamma = 0$$

$$m^{*2} = m_B^2 + 2E_\gamma m_B$$

Stato finale:

$$m^{*2} = \left[(E_B + E_{e^+} + E_{e^-})^2 - (\vec{p}_B + \vec{p}_{e^-} + \vec{p}_{e^+})^2 \right]^{1/2}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{= m_B + 2m_e}$
 $\underbrace{\hspace{10em}}_{= 0 \text{ nelle condizioni di En. minima}}$

$$m^{*2} = (m_B + 2m_e)^2$$

Conservando:

$$\cancel{m_B^2} + 2E_\gamma m_B = \cancel{m_B^2} + 4m_B m_e + 4m_e^2$$

$$E_\gamma = 2m_e + \frac{2m_e^2}{m_B} =$$

$$= 2m_e \left(1 + \frac{m_e}{m_B} \right)$$

Se $m_B \gg m_e$

se $m_B = m_e$

se $m_B = 0$

$$E_\gamma \approx 2m_e$$

$$E_\gamma = 4m_e$$

$$E_\gamma = \infty \rightarrow \text{non e' possibile nel vuoto}$$

Un fotone non può materializzarsi
in una coppia di particella-antiparticella
nel vuoto -

Il processo non continuerebbe energia e
quantità di moto -

Per materializzare occorre un
terzo -

Se il terzo è pesante $E_\gamma = 2m_e$