VERIFICHE SPERIMENTALI DELLA CINEMATICA RELATIVISTICA

- Relazioni tra intervalli di tempo e spazio compatibili con i postulati della Rel. speciale:

$$\begin{cases} \Delta x' = \gamma \Delta x - \gamma\beta\, c\Delta t \\ c\Delta t' = -\gamma\beta \Delta x + \gamma\, c\Delta t \end{cases}$$ Da S a S' in moto relativo con $\beta c = v$

$$\begin{cases} \Delta x = \gamma \Delta x' + \gamma\beta\, c\Delta t' \\ c\Delta t = \gamma\beta \Delta x' + \gamma\, c\Delta t' \end{cases}$$ Da S' a S [Reciprocità del moto]

- Spazio e tempo non sono invarianti (assoluti)

[Esercizio: Dimostrare che $\Delta s^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta x^2$ è invariante di Lorentz]

- CASI PARTICOLARI:

$\Delta t' = \gamma \Delta t$ per $\Delta x = 0$ $\quad [\Delta t = \gamma \Delta t'$ per $\Delta x' = 0]$

$\Delta x' = \Delta x / \gamma$ per $\Delta t' = 0$ $\quad [\Delta x = \Delta x'/\gamma$ per $\Delta t = 0]$

Dilatazione dei tempi e contrazione delle lunghezze nel riferimento in moto relativo rispetto a tempi e lunghezze propri nel sistema COMOVENTE

Verifiche (alcune verifiche):

1) Vita media di particelle instabili
2) Effetto Doppler relativistico

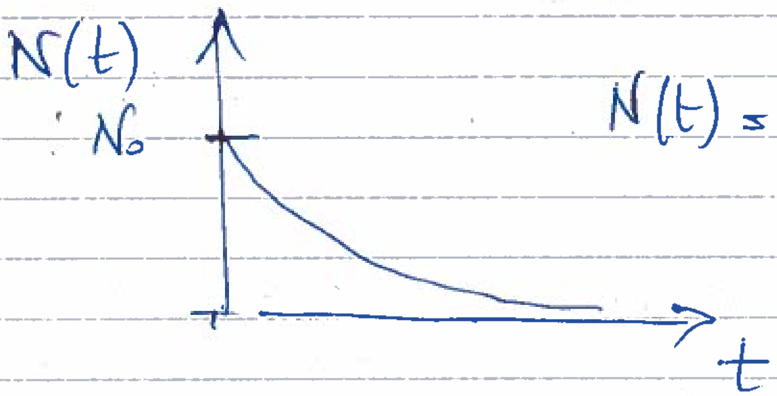
La misura 1) controlla la dilatazione dei tempi, la misura 2) controlla più in generale la struttura delle trasf. di Lorentz

1) VITA MEDIA DI PARTICELLE INSTABILI

• Decadimento (radioattivo): processo stocastico con prob. di decadimento (frazione di decadimenti) proporzionale all'intervallo di tempo

→ Variazione della popolazione: $\frac{dN}{N} = -\frac{dt}{\tau}$

→ Evoluzione della popolazione



$$N(t) = N_0 e^{-t/\tau}$$

$\tau \equiv$ vita media ($\langle t \rangle$) parametro caratteristico del processo (dipende dalla particella)

Vita media: Somma sulla popolazione della vita di ciascuno (t) pesata per il numero di persone che vivono t e diviso per la popolazione totale (N_0)

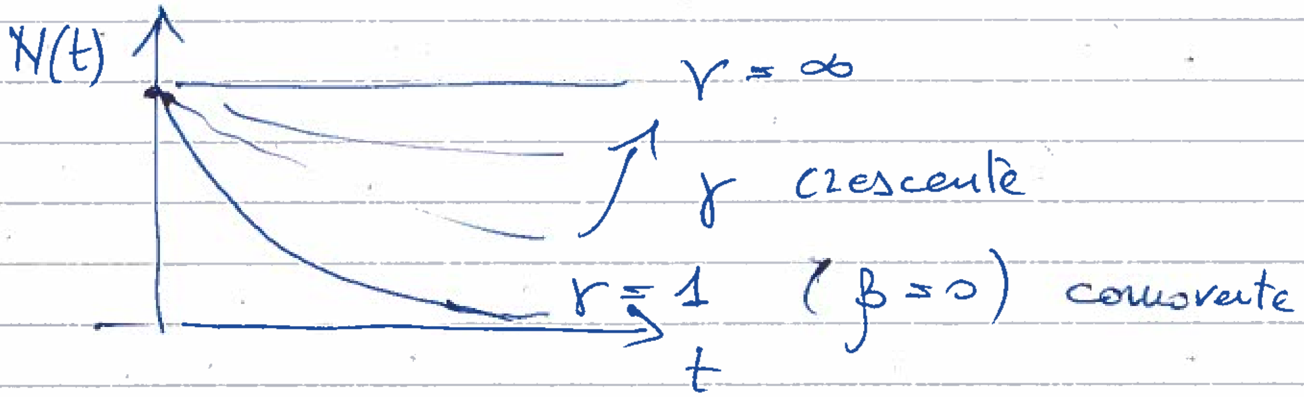
$$\langle t \rangle = \frac{1}{N_0}\int_0^\infty \underbrace{N_0 e^{-t/\tau}}\; t \;\underbrace{\frac{dt}{\tau}} = \tau$$

La popolazione sopravvissuta fino a t

morta (decaduta) fra t e $t+dt$

vive t

- Nel riferimento comovente: τ_0
- Nel riferimento in moto rel. $\tau' = \gamma\tau_0$



* La vita media, misurata contando l'evoluzione dei decadimenti nel tempo, dipende dal sistema di riferimento

* Particelle in moto nel rif. del Laboratorio hanno vite più lunghe di particelle a riposo

Esempio MUONI COSMICI (μ)

* Prodotti da interazioni di raggi cosmici primari (protoni) con l'atmosfera a distanza tipica $L = 10$ km dal suolo
* Velocità tipica $\beta = 0.995$ $(\gamma \simeq 10)$
* Vita media propria (misurata in laboratorio con μ a riposo)

$$\tau_\mu = 2.2 \times 10^{-6}\, s$$

* Rivelati al suolo $(\sim 100\, \mu / m^2/s)$

Descrizione classica (non corretta) (rif. del Laboratorio)

- tempo necessario per raggiungere il suolo

$$\Delta t = \frac{L^{lab}}{v} = \frac{L^{lab}}{\beta c}$$

(L^{lab} è misurata nel rif. del lab)

- Popolazione sopravvissuta al suolo:

$$N(t) = N_0\, e^{-t/\tau_\mu} = N_0\, e^{-\frac{L^{lab}}{\beta c \tau_\mu}}$$

$$\beta c \tau_\mu \simeq c\tau_\mu \simeq 600\ m$$

$$e^{-\left(\frac{10\ km}{0.6\ km}\right)} \sim 10^{-7}$$

$\longrightarrow$ i muoni non raggiungono il suolo

A) Relatività speciale : RIF. DEL LABORATORIO

- μ in moto relativo con $\gamma \simeq 10$
- $\tau_\mu^{Lab} = \gamma \tau_\mu$ La vita media del μ nel riferimento comovente con il μ è misurata per $\Delta x = 0$ in quel riferimento $\Longrightarrow$ Dilatazione di τ

Popolazione al suolo:

$$N(t) = N_0\, e^{-\frac{L^{lab}}{\beta c \gamma \tau_\mu}} \simeq N_0 \times 0.22$$

$$\gamma \beta c \tau_\mu \simeq 6000\ m \quad (\text{"Length di volo"})$$

B) Rel. speciale : RIF. DEL MUONE

- Nel riferimento del muone τ_μ è proprio
- $L^\mu = L^{lab}/\gamma$ la distanza dal suolo vista dal sistema comovente con il μ è contratta di un fattore γ

Popolazione al suolo:

$$N(t) = N_0\, e^{-\frac{L^\mu}{\beta c \tau_\mu}} = N_0\, e^{-\frac{L^{lab}}{\gamma \beta c \tau_\mu}}$$

Le descrizioni coincidono (e sono in accordo con i risultati sperimentali)

2) EFFETTO DOPPLER RELATIVISTICO

Descrizione classica: variazione della freq. percepita per sorgente in moto relativo nella stessa direzione di propagazione dell'onda

$$\nu' = \nu\left(1 \pm \frac{u}{v_s}\right)$$

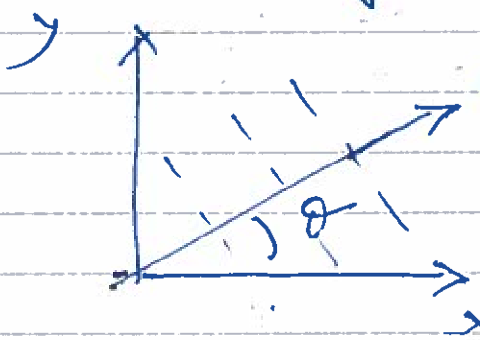
$u \equiv$ velocità relativa

$v_s \equiv$ velocità del suono

Effetto longitudinale (segno $\pm$ dipende dal verso)

Relatività speciale: prevede anche un effetto Doppler trasversale: variazione di ν anche per angolo ~~tra~~ di $90°$ tra direzione di propagazione dell'onda e direzione del moto relativo.

Per ricavare il risultato generale, estendiamo la descrizione dell'onda al caso in cui l'angolo con l'asse x è $\vartheta \neq 0$



direzione di prop. dell'onda

$$\hat{u}_k = \cos\vartheta\, \hat{u}_x + \sin\vartheta\, \hat{u}_y$$

$$\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda}\hat{u}_k$$

Onda piana: $f(\vec{r},t) = A\sin\left[\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t\right]$

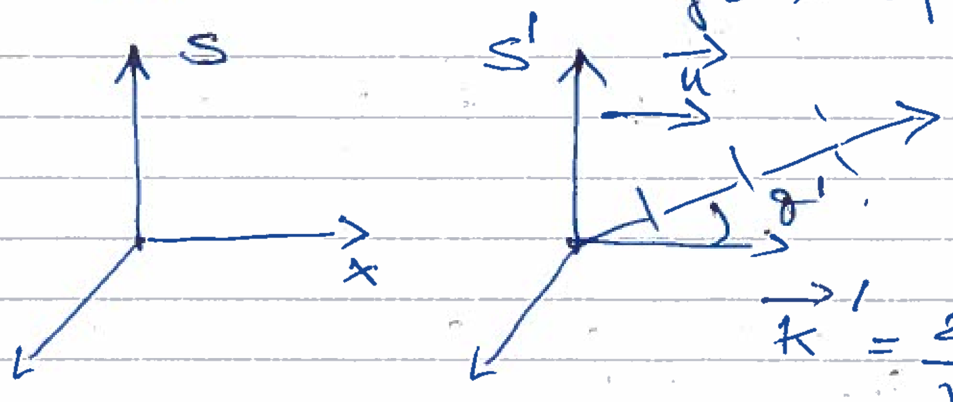
Con questa scrittura:

$$(*) \quad f(\vec{r},t) = A \sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}(\cos\vartheta\, x + \sin\vartheta\, y) - 2\pi\nu t\right]$$

per $\cos\vartheta = 1$ $\quad \vartheta = 0 \longrightarrow$ prop. lungo x
per $\cos\vartheta = -1$ $\quad \vartheta = \pi \longrightarrow$ " $-x$
per $\sin\vartheta = 1$ $\quad \vartheta = \pi/2 \longrightarrow$ " y
per $\sin\vartheta = -1$ $\quad \vartheta = \frac{3}{2}\pi \longrightarrow$ " $-y$

- Dunque qs. scrittura rappresenta un'onda con direzione di propagazione generica ϑ
- Inoltre: $\boxed{\lambda\nu = c}$ onda elettromagnetica

Consideriamo una sorgente in moto con velocità $\vec{u}$ lungo x (positivo)



$$\hat{u}_k' = \cos\vartheta'\, \hat{u}_x + \sin\vartheta'\, \hat{u}_y$$

$$\vec{k}' = \frac{2\pi}{\lambda'}\hat{u}_k'$$

Onda nel riferimento comovente S':

$$(**) \quad f'(\vec{r}',t') = A' \sin\left[\frac{2\pi}{\lambda'}(\cos\vartheta'\, x' + \sin\vartheta'\, y') - 2\pi\nu' t'\right]$$

* Poichè c è indip. dal SRI in S e in S' devono valere contemp.

$$\nu\lambda = \nu'\lambda' = c$$

* Poichè le trasf. di Lorentz sono lineari nello spazio-tempo un'onda piana in S' è piana anche per S. Dunque (*) e (**) devono coincidere tramite trasformazioni di Lorentz (ossia la descrizione di S deve essere ottenibile dalla descrizione di S' tramite trasf. di Lorentz) –

Ciò richiede che coincidano le fasi delle onde e le ampiezze –

- La relazione tra le ampiezze dipende da come si trasformano i campi elettromagnetici e non è oggetto di questo corso –

- La relazione tra le fasi è puramente cinematica (relativa alla descrizione cinematica della propagazione dell'onda) e possiamo esplicitarla usando le trasformazioni di Lorentz per x e t

Fase di (**):

$$2\pi\left[\frac{\cos\vartheta'}{\lambda'}x' + \frac{\sin\vartheta'}{\lambda'}y' - \nu' t'\right] = (\text{Lorentz})$$

$$= 2\pi\left[\frac{\cos\vartheta'}{\lambda'}(\gamma x - \gamma\beta c t) + \frac{\sin\vartheta'}{\lambda'}y - \nu'\left(-\frac{\gamma\beta}{c}x + \gamma t\right)\right] =$$

$$= 2\pi\left[\gamma\frac{(\cos\vartheta' + \beta)}{\lambda'}x + \frac{\sin\vartheta'}{\lambda'}y - \gamma(1+\beta\cos\vartheta')\nu' t\right]$$

Eguagliando alla fase in S (*), si ottiene:

$$\begin{cases} \dfrac{\cos\vartheta}{\lambda} = \gamma\dfrac{(\cos\vartheta' + \beta')}{\lambda'} \\ \dfrac{\sin\vartheta}{\lambda} = \dfrac{\sin\vartheta'}{\lambda'} \end{cases} \Rightarrow \operatorname{tg}\vartheta = \frac{\sin\vartheta'}{\gamma(\cos\vartheta' + \beta)}$$

$\operatorname{tg}\vartheta' \neq \operatorname{tg}\vartheta$ — <u>Aberrazione ottica relativistica</u>

$\nu = \gamma\nu'(1+\beta\cos\vartheta')$ — VARIAZ. DI FREQ.

Nel riferimento fisso – usando l'angolo ϑ misurato in S – possiamo scrivere per <u>reciprocità del moto</u>

(***) $\nu' = \gamma\nu(1-\beta\cos\vartheta)$

ν' = Freq. propria nel rif. comovente
ν = Freq. misurata nel rif. in moto relativo alla sorgente

- **Limite classico** $\beta \ll 1$ e $\gamma \simeq 1$

$$\nu' \simeq \nu (1 - \beta \cos\vartheta)$$

$$\nu \simeq \nu' / (1 - \beta\cos\vartheta) \simeq \nu' (1 + \beta \cos\vartheta)$$

Nelle direzione longitudinale:

$$\nu \simeq \left\{ \nu' (1 \pm \beta) \right. \qquad \vartheta = 0, \pi$$

$\vartheta = 0 (\pi)$ corrisponde all'osservatore che vede la sorgente avvicinarsi (allontanarsi)

Nelle direzione trasversa

$$\vartheta = \frac{\pi}{2} \left(+ n\pi \right) \qquad \nu \simeq \nu'$$

-- Nel caso relativistico (***) c'è variazione di frequenza anche per $\vartheta = \pi/2$:

$$\nu = \nu'/\gamma$$

– freq percepita ν inferiore alla freq. propria

NOTA: Nel riferimento S' comovente l'oscillazione ha periodo proprio

$T' = \frac{1}{\nu'}$, e avviene per $\Delta x' = 0$ (comovente)

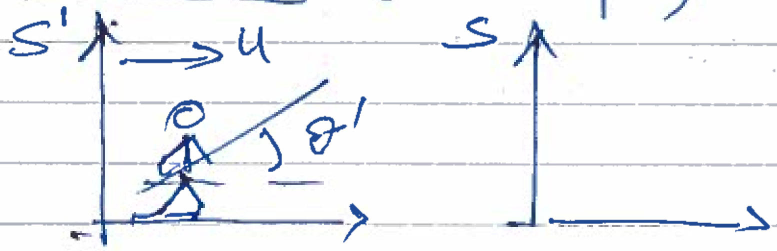
Il termine $\nu'/\gamma = \frac{1}{\gamma T'}$ è la dilatazione dei tempi

- l'aberrazione ottica segue dalle differenti delle trasf. di Lorentz per coordinate trasverse e longitudinali

- Non solo lo spazio non è assoluto ma la contrazione delle lungh. longitudinali cambia gli angoli

- La previsione è consistente con le osservazioni sperimentali. Nel limite classico ($u \ll c$) si riduce all'aberrazione ottica ricavabile per via geometrica come discusso nel caso dell'aberrazione astronomica annua.

Problema (esempio) :

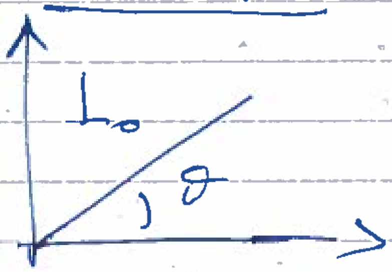


- Nei giochi galattici il saltatore con l'asta corre con velocità u, mantenendo l'asta inclinata di un angolo θ rispetto al suolo (nel proprio rif.). L'asta ha lunghezza propria L_0

  - Qual è la lunghezza dell'asta per il pubblico ?

  - Quale angolo forma con il suolo ?

Soluzione



$$L_x = L_0 \cos\vartheta$$
$$L_y = L_0 \sin\vartheta$$

Nel riferimento del pubblico

$$\begin{cases} L_y' = L_y \\ L_x' = L_x / \gamma \end{cases}$$

Invarianza delle lung. trasverse
contrazione delle lungh. longitudinali

$$L_0' = \sqrt{L_x'^2 + L_y'^2} = L_0 \left[\frac{\cos^2\vartheta}{\gamma^2} + \sin^2\vartheta \right]^{1/2}$$

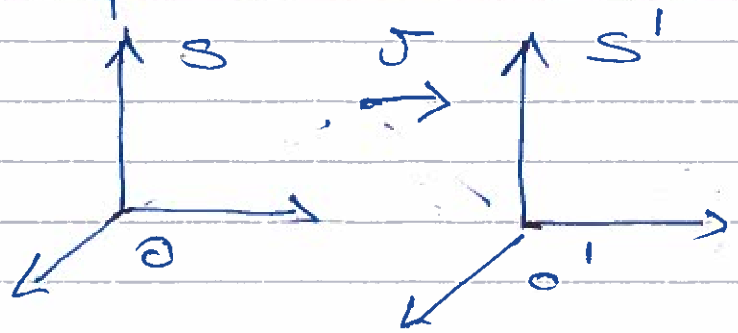
$$= \frac{L_0}{\gamma} \left[\cos^2\vartheta + \gamma \sin^2\vartheta \right]^{1/2}$$

$$\operatorname{tg}\vartheta' = \frac{L_y'}{L_x'} = \frac{L_0 \sin\vartheta}{L_0 \cos\vartheta / \gamma} = \gamma \operatorname{tg}\vartheta$$

Per $\gamma = 1$ $\quad \operatorname{tg}\vartheta' = \operatorname{tg}\vartheta$

Per $\gamma \to \infty$ $\quad \vartheta'$ diventa verticale

Composizione delle velocità



$\vec{v}_{OO'} \equiv \vec{u}$

Galileo : $\vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{u}$ tempo e spazio assoluto

Relatività speciale : $\beta = u/c$

$$\vec{v}\,' = \frac{d\vec{r}\,'}{dt'}$$

Componente x :

$$v_x' = \frac{dx'}{dt'} = \frac{\gamma dx - \gamma \beta c\, dt}{\gamma dt - \frac{\gamma \beta}{c} dx}$$

$$= \frac{\frac{dx}{dt} - \beta c}{1 - \frac{\beta c}{c^2}\frac{dx}{dt}} = \frac{v_x - u}{1 - \frac{v_x u}{c^2}}$$

Per $u \ll c$ si riduce al caso classico

$$\boxed{v_x' = \frac{v_x - u}{1 - v_x u/c^2}}$$

Componenti trasversali al moto relativo

$$v_y' = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{\gamma dt - \frac{\gamma\beta}{c} dx} =$$

$$= \frac{1}{\gamma}\left(\frac{v_y}{1 - \frac{v_x u}{c^2}}\right)$$

Analogamente per z —

- Nel limite di $\beta \to 0$ $u << c$ $v_y' = v_y$ e $v_z' = v_z$
- Nel caso generale $v_{y,z}' \neq v_{y,z}$ (eccetto $v_x = 0$). La differenza rispetto al caso classico discende da $dt' \neq dt$, anche se $dy' = dy$ e $dz' \neq dt$

<u>Sommario</u>:

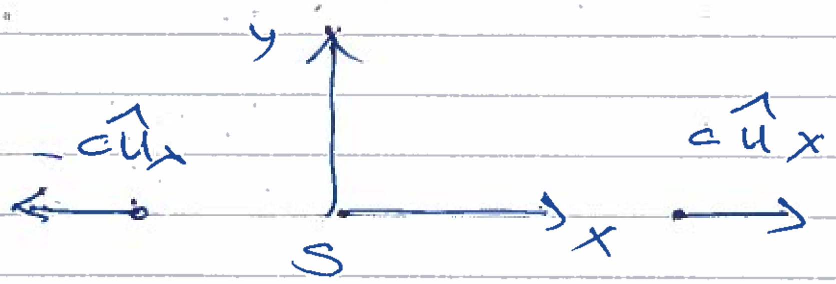
$$v_x' = \frac{v_x - u}{1 - v_x u/c^2}$$

$$v_y' = \frac{1}{\gamma}\frac{v_y}{1 - v_x u/c^2}$$

$$v_z' = \frac{1}{\gamma}\frac{v_z}{1 - v_x u/c^2}$$

<u>Esempio</u>: Nel riferimento S due impulsi luminosi si allontanano dall'origine in direzione x e versi opposti con velocità

$$\vec{v}_1 = c\,\hat{u}_x$$
$$\vec{v}_2 = -c\,\hat{u}_x$$



1) Trovare la differenza di velocità tra gli impulsi in S (in modulo)

2) Trovare la velocità dell'impulso 2 nel riferimento S' solidale con 1

1) $|\Delta\vec{v}| = |\vec{v}_2 - \vec{v}_1| = 2c$

Per S i due impulsi si allontanano con ~~velocità~~ diff. di velocità 2c. Per ciascuno di essi S misura una velocità c (compatibile con il postulato di relatività speciale).

2) Nel riferimento S' comovente con l'impulso 1, si ha

$$v'_{2,x} = \frac{v_{2,x} - u}{1 - v_{2,x} u / c^2}$$

dove $v_{2,x} = -c\,\hat{u}_x$ velocità in S

$u = +c$ velocità di S' nel rif. di S

Dunque:

$$v'_{2,x} = \frac{-c - c}{1 - \frac{(-c)c}{c^2}} = -\frac{2c}{2} = -c$$

L'impulso 2 si allontana dal riferimento S' (comovente con 1) con velocità in modulo c, diretta lungo l'asse x in verso negativo

$$v'_{2,x} = -c\,\hat{u}'_x$$

La velocità c è velocità limite in tutti i SRI. La legge di composizione è compatibile con il postulato di Einstein $c = \text{cost}$ $\forall$ SRI

Accelerazioni in S e S' con moto rel. u

Galileo : $\vec{a}'_x = \vec{a}$ invarianti

Lorentz : $\vec{a}' \neq \vec{a}$ non inv.

Ad esempio :

$$a'_x = \frac{a_x \left[1-\beta^2\right]^{3/2}}{\left[1-\frac{v_x u}{c^2}\right]^3} \qquad (*)$$

dimostrazione per esercizio, ~~con suggerimento~~:

$$a'_x = \frac{dv'_x}{dt'} = \frac{d\left[v_x - u/\left(1-\frac{u v_x}{c^2}\right)\right]}{dt'}$$

Suggerimento :

$$\frac{df}{dt'} = \frac{df}{dt}\frac{dt}{dt'} = \frac{df}{dt}\left(\frac{dt'}{dt}\right)^{-1}$$

con $dt' = -\gamma\beta\, dx + \gamma dt$

Conclusione : $\vec{F} = m\vec{a}$ Richiede revisione poiché $\vec{F}$ e $\vec{a}$ non sono invarianti relativistici

$\longrightarrow$ Revisione della dinamica e dei concetti di energia, q.tà di moto e massa

Dimostrazione della relazione (*)

$$a_x' = \frac{dv_x'}{dt'} = \underbrace{\frac{d}{dt}\left[\frac{v_x - u}{1 - \frac{u v_x}{c^2}}\right]}\;\underbrace{\left[\frac{dt'}{dt}\right]^{-1}}$$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{v_x - u}{1 - \frac{u v_x}{c^2}}\right] = \frac{a_x\left(1 - \frac{u v_x}{c^2}\right) + \frac{u a_x}{c^2}(v_x - u)}{\left[1 - \frac{u v_x}{c^2}\right]^2}$$

$$= \frac{a_x(1 - \beta^2)}{\left[1 - \frac{v_x u}{c^2}\right]^2}$$

$$\left[\frac{dt'}{dt}\right]^{-1} = \left[-\frac{\gamma\beta}{c}\frac{dx}{dt} + \gamma\frac{dt}{dt}\right]^{-1} =$$

$$= \frac{1}{\gamma}\,\frac{1}{1 - \frac{u v_x}{c^2}} = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1 - \frac{u v_x}{c^2}}$$

Combinando:

$$a_x' = \frac{a_x\left[1 - \beta^2\right]^{3/2}}{\left[1 - \frac{u v_x}{c^2}\right]^2}$$