

## DERIVAZIONE DELLE TRASF. DI LORENTZ

A

• Trasf. delle coordinate spatio-tempo pu osservatori in SRI, compatibili con il principio di relatività e le Hp di Einstein:

- 1) Reciprocità del moto
- 2) costante di  $c$  in tutti i SRI

2) sostituire ipotesi di tempo assoluto, 1) e' come nella meccanica classica ]

Per moto relativo rettilineo uniforme, la transf. più generale ha la forma:

$$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}t \\ y' = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24}t \\ z' = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34}t \\ t' = a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44}t \end{cases}$$

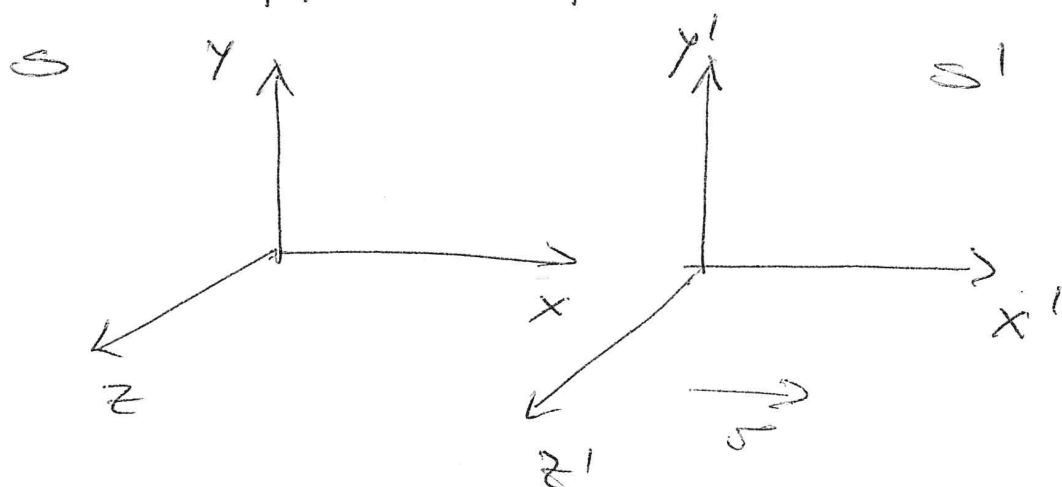
\* Rappresenta rotazione degli assi;  $a_{ij}$  = coseni direttori (rotazione lascia invariato  $Hr^2$ )

\* Rappresenta traslazione dip. del tempo ( $\gamma$  cost)

\* Generalizza la transf. di Galileo ( $a_{44} = 1$  e  $a_{4i} = 0$ ) ad una ~~trasf.~~ rotazione 4D nello spatio-tempo (se vogliamo figurarcela in termini geometrici)

(2)

Per semplificare il problema assumiamo:



- 1) ~~Ab~~ Assi orientati con  $x \parallel x'$  e allineati alla direzione del moto relativo che avviene con velocità  $v$
- 2)  $y' \parallel y$  e  $z' \parallel z$  ed equivalenti

Poiché i due riferimenti non sono rotati e la direzione di moto è lungo  $x$ :

$$a_{12} = a_{21} = 0$$

$$a_{13} = a_{31} = 0$$

$$a_{24} = a_{34} = 0$$

~~$y, z'$~~  non dip da  $x$  e  $z, y$   
(non c'è rotazione)

$y, z'$  non dipendono da  $t$

Sì ha per  $y'$  e  $z'$ :

$$y' = a_{22} y$$

$$z' = a_{33} z$$

In modo formale, assumiamo che i coefficienti possano dipendere da  $\sigma$

$$a_{22} = a_{33} = \lambda(\sigma)$$

sono uguali tra di loro poiché  $y'$  e  $z'$  ( $e y$  e  $z$ ) possono ~~essere~~ essere scelti in modo completamente arbitrario nel piano ortogonale a  $x // x'$ .

Si ha; per la reciprocità del moto:

$$y' = \lambda(\sigma)y \quad \text{e} \quad y = \lambda(-\sigma)y'$$

$$y' = \lambda(\sigma)\lambda(-\sigma)y'$$

Scambiando il verso di  $x$  (la scelta del verso è arbitraria) otteniamo relazioni identiche, ma con  $\sigma$  al posto di  $-\sigma$  (cambiando  $x$ , cambia il verso di  $\sigma$ ) :

$$y' = \lambda(-\sigma)\lambda(\sigma)y'$$

$$\text{Da cui } \lambda(-\sigma) = \lambda(\sigma) \quad \text{e} \quad \lambda^2 = 1 \Rightarrow \lambda = \pm 1$$

Avendo assunto  $y'$  e  $y$  equivalenti e'  $\lambda = 1$

$\Rightarrow$  Le coordinate trasverse sono invarianti!

Dimostriamo in modo più "fisico",  
con un esperimento concettuale che:

1) - Le lunghezze sono invarianti nelle  
direzioni ortogonali a  $\vec{v}$

Si veda lezione prec.  
(orologio di Einstein)

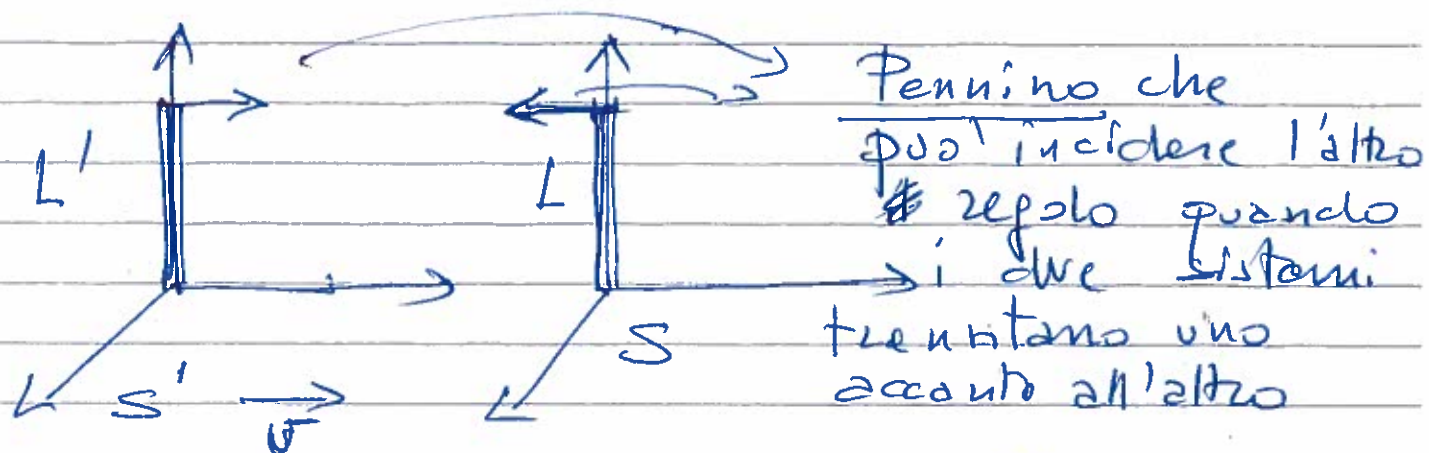
Abbiamo implicitamente assunto 1) nel  
ricavare la relazione di dilatazione dei  
tempi, assumendo  $L_0$  comune a  $S$  e  $S'$

Dimostriamo che se le lunghezze trasversali  
variano, si avrebbero osservazioni incompatibili con  
l'invarianza delle leggi e  
fenomeni negli SRT)

Esperimento concettuale ("GEDANKEN")

- Due sistemi in moto relativo con velocità  $v$  e con reperi di lunghezza  $L$  identica (calibrati da fermo) disposti ortogonalmente alla direzione di moto relativo =





$S'$  in moto relativo nella direzione  $L$  al regolo

- Quando i regoli si incontrano poiché sono ortogonali a  $v$ , l'incontro è simultaneo per tutti i punti del regolo

- Ipotesiamo, per assurdo, che per  $S$   $L' < L$  - Allora quando i regoli si incontrano, il pennino di  $S'$  lascia una traccia sul regolo di  $S$

- Per reciprocità del moto l'osservatore  $S'$  vede  $L < L'$  e per  $S'$  dunque è il pennino di  $S$  a lasciare una traccia sul regolo di  $S'$

Affinché ~~questo~~ il fenomeno sia lo stesso in entrambi i riferimenti, nessuno dei due regoli deve essere inciso

Dunque  $L' = L$  (sotto ipotesi di reciprocità del moto = cui non rinunciamo)

(4)

Per la coordinata  $x$ , osserviamo che i punti  
solidali con  $S'$  hanno  $x' = \text{cost}$  -

Detti punti si muovono rispetto a  $x$ , con  
la velocità di  $S'$ , quindi  $x - vt = \text{cost}$

Dunque  $x' = a_{11}x + a_{14}t$  deve avere  
la forma (con  $\gamma(v)$  da determinare):

$$x' = \gamma(v)(x - vt) \quad (*)$$

Usando la reciprocità del moto, si ha:

$$x = \gamma(-v)(x' + vt') \quad (**)$$

E, analogamente alla discussione per  $y'$  e  $z'$ ,

$$\gamma(v) = \gamma(-v)$$

✓ D'altronde per il principio  
di relatività e i risultati  
sulla contrazione delle  
lunghezze, non devono  
ottenersi differenze scambiando  
 $S$  e  $S'$  e mandando  $v$  in  $-v$ .

Possiamo risolvere (\*\*) rispetto a  $t'$ :

$$t' = \frac{1}{v} \left[ \frac{x}{\gamma(v)} - x' \right]$$

Eliminando, per comodità di scrittura, (5)  
 la dip. da  $\sigma$  in  $\gamma$ , e sostituendo a  $x'$   
 l'espressione (\*), si ottiene

$$t' = \frac{1}{\sigma} \left[ \frac{x}{\gamma} - \gamma(x - \sigma t) \right] = \frac{1}{\sigma} \left( \frac{1}{\gamma} - \gamma \right) x + \gamma t$$

Troviamo quindi le equazioni:

$$\begin{cases} x' = \gamma [x - \sigma t] \\ t' = \gamma x + \gamma t \end{cases} \quad \text{con } \sigma = \frac{1}{\gamma} \left[ \frac{1}{\gamma} - \gamma \right]$$

Si noti che imponendo  $t = t'$  (Hp tempo assoluto), ~~le equazioni trovate~~ si avrebbe  
 $\gamma = 0$  e  $\gamma = 1$ . Si otterrebbero quindi

le trasformazioni di Galileo, recuperando  
 simultaneità e spazio assoluto

Il procedimento adottato è dunque generale,  
 vogliamo però ora imporre la condizione di  
 Einstein  $c = \text{cost}$  in ogni SRI

(6)

Ricorriamo al postulato di Einstein:

$c$  = costanti in tutte le direzioni per ogni osservatore inerziale

Dunque sia in  $S$  e in  $S'$  vale la condizione

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = 0 \quad (X)$$

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 = 0 \quad (Q)$$

che lega le coordinate  $(x, y, z)$  o  $(x', y', z')$  raggiunte da un segnale luminoso in un tempo  $t$  o  $t'$ , partito dall'origine del rispettivo sist. di riferimento.

Per essere contemporaneamente valide  $(X)$  e  $(Q)$  devono essere uguali a meno delle trasf. cercate:

$$\begin{aligned} x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 &= \\ \gamma^2 (x - vt)^2 + y^2 + z^2 - c^2 (\gamma t + \gamma v x/c^2)^2 &= \\ (\gamma^2 - v^2/c^2) x^2 + y^2 + z^2 - \gamma^2 (c^2 - v^2) t^2 - 2\gamma(\gamma v + v/c^2) x t &= \\ x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 \end{aligned}$$

Da queste relazioni seguono:

$$\begin{cases} \gamma^2 - \gamma^2 v^2/c^2 = 1 \\ \gamma^2 (c^2 - v^2) = c^2 \\ \gamma v + v/c^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad \beta = \frac{v}{c}$$

Possiamo ricavare  $v$  dalla sua definizione

(7)

l'occhio: se le si ricava dalle eq. precedenti, bisogna prendere le soluzioni con segno giusto, perché sono relazioni quadratiche.

Verificare per esercizio che le 3 condizioni sono soddisfatte per la soluzione trovata.

$$v = \frac{1}{\gamma} \left[ \frac{1}{\gamma} - \gamma \right] =$$

$$= \frac{\gamma}{\gamma} \left[ \frac{1}{\gamma^2} - 1 \right] = \frac{\gamma}{\gamma} [1 - \beta^2 - 1] = -\frac{\gamma\beta}{c}$$

Sostituendo nelle trasformazioni:

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - vt) \\ t' = \gamma\left(t - \frac{\beta x}{c}\right) \end{cases}$$

TRASF. DI LORENTZ

E per le reciproche:

$$\begin{cases} x = \gamma(x' + vt') \\ t = \gamma\left(t' + \frac{\beta x'}{c}\right) \end{cases}$$

x Trasformate di Lorentz in modo analogo come trasformazioni che rendono invarianti le

eq. di Maxwell dell'elettromagnetismo

x Derivate da Einstein a partire dai postulati di relatività speciale

(8)

Le trasformazioni di Lorentz si possono scrivere in una forma facile da ricordare:

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - vt) \\ t' = \gamma t - \frac{\gamma\beta}{c}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = \gamma x - \gamma\beta ct \\ ct' = \gamma ct - \gamma\beta x \end{cases}$$

In forma matriciale:

$$\begin{pmatrix} x' \\ ct' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta \\ -\gamma\beta & \gamma \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix} \quad \text{da } O \text{ a } O'$$

$$\begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & \gamma\beta \\ \gamma\beta & \gamma \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ ct' \end{pmatrix} \quad \text{da } O' \text{ a } O$$

In forma estesa alle 4 coordinate:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ ct' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ ct \end{pmatrix}$$

Nota: per  $v \ll c$   $\gamma = 1$  e ~~beta~~ le trasformazioni di Lorentz si riducono alle trasf. di Galileo

**γ, μν γ, β; μν γ, β, γ!**

## Dilatazione relativistica del tempo (dalle transf. di Lorentz)

In termini generali, la relazione tra gli intervalli di tempo  $\Delta t$  e  $\Delta t'$  e tra le distanze  $\Delta x$  e  $\Delta x'$  tra due eventi  $(x_1, t_1)$  e  $(x_2, t_2)$  in  $S$  e  $S'$  si possono ottenere scrivendo le transf. di Lorentz in forma differenziale

$$x_1' = \gamma x_1 - \gamma v t_1$$

$$x_2' = \gamma x_2 - \gamma v t_2$$

$$t_1' = \gamma t_1 - \gamma \frac{v}{c} x_1$$

$$t_2' = \gamma t_2 - \gamma \frac{v}{c} x_2$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta x' = \gamma \Delta x - \gamma v \Delta t} \quad \boxed{\Delta t' = \gamma \Delta t - \gamma \frac{v}{c} \Delta x}$$

- Un cronometro solidale con  $S$  ha coordinate  $x = \text{cost}$  —  $\Delta x = 0$

- il tempo  $\Rightarrow \boxed{\Delta t' = \gamma \Delta t}$

Il tempo  $\Delta t$  scandito dai cronometri solidali con  $S$ , risulta dilatato di un fattore  $\gamma$  in  $S'$  (e viceversa)

## Simultaneità: (classe trasf. di Lorentz)

\* Eventi simultanei in  $S$  in posizioni differenti non sono simultanei in  $S'$  e viceversa —

• Siano  $(x_1, t^*)$  e  $(x_2, t^*)$  simultanei in  $S$  — cioè  $t_1 = t_2 = t^*$

— Per le trasf. di Lorentz in  $S'$ ,

$$t_1' = \gamma t_1 - \frac{\gamma \beta}{c} x_1$$

$$t_2' = \gamma t_2 - \frac{\gamma \beta}{c} x_2 \quad t_1 = t_2 = t^*$$

— In termini di tempo in  $S'$ :

$$\Delta t' = t_2' - t_1' = -\frac{\gamma \beta}{c} (x_2 - x_1) \neq 0 \quad (*)$$

- Per eventi <sup>simultanei</sup> in  $S$  con  $\Delta x \neq 0$ ,  $\Delta t' \neq 0$  in  $S'$
- $\Delta t' \geq 0$  a seconda di  $\Delta x \leq 0 \Rightarrow$  Eventi simultanei in  $S$  possono essere nel passato o nel futuro di  $S'$  — Tra eventi di q.s. tipo non possono sussistere relazioni causali

Possiamo ~~aprire~~ ricavare da (\*) la relazione tra  $\Delta t'$  e  $\Delta x'$  :

$$\Delta x' = \gamma \Delta x - \gamma \beta c \Delta t$$

Poichè gli eventi in  $S$  sono simultanei,  
 $\Delta t = 0$  e  $\Delta x' = \gamma \Delta x$  -

Sostituendo in (\*) :

$$\Delta t' = -\frac{\beta}{c} \Delta x'$$
$$\boxed{\Delta t' = -\frac{v}{c^2} \Delta x'}$$

Qs relazione coincide con la relazione trovata (in modo più laborioso) nella lezione in cui si è introdotto il concetto di simultaneità -

In modo reciproco ; per eventi simultanei in  $S'$   $\Delta t = \frac{v}{c^2} \Delta x$  -

~~Varia~~

Es. Simultaneità

$$A \quad (x_A, t_A) = (1000 \text{ m}, 2.0 \times 10^{-6} \text{ s})$$

$$B \quad (x_B, t_B) = (3000 \text{ m}, 4.0 \times 10^{-6} \text{ s})$$

$$C \quad (x_C, t_C) = (500 \text{ m}, 0.50 \times 10^{-4} \text{ s})$$

$$D \quad (x_D, t_D) = (3500 \text{ m}, 2.500 \times 10^{-4} \text{ s})$$

Trovare  $\beta$  che rende simultanei gli eventi in  $S'$   
(se esiste) -

$$t'_A = t'_B$$

condizione di sim.

$$-\cancel{\frac{x}{c}} x_A + \cancel{t}_A = -\cancel{\frac{x}{c}} x_B + \cancel{t}_B$$

$$\beta (x_B - x_A) = c (t_B - t_A)$$

$$\beta = \frac{\Delta t}{\Delta x} c < 1$$

$$\beta_{AB} = \frac{2 \times 10^{-6} \text{ s}}{2 \times 10^3 \text{ m}} \cdot 3 \times 10^8 \text{ m/s} = 0.3 < 1 \text{ ok}$$

$$\beta_{CD} = \frac{2.10^{-4} \text{ s}}{3.10^3 \text{ m}} \cdot 3 \times 10^8 \text{ m/s} = 20 > 1$$

eventi C e D non sono simultanei  
in nessun SR I

## Es. simultaneità ; SALUTO A DISTANZA

• Due persone separate da una distanza  $D$  in un riferimento solidale  $S$ , si salutano per un ~~tempo~~ intervallo di tempo  $T$ , muovendo le mani.

Quanto deve durare  $T$  affinché il saluto sia simultaneo per tutti gli osservatori inerziali?

— Soluzione: Si  $S'$  un rif. inerziale in moto con velocità  $v$  rispetto a  $S$  —  
In  $S'$ :  $\Delta t' = \gamma \Delta t - \gamma \frac{v}{c} \Delta x$

Affinché l'evento sia simultaneo:  $\Delta t' = 0$   
e cioè  $\Delta t = \frac{v}{c} \Delta x = \frac{v}{c} D$

I possibili SRI in moto rettilineo unif. rispetto a  $S$  hanno velocità comprese tra  $v = -c$  e  $v = +c$  cioè  $-1 \leq \beta \leq 1$

Nel primo estremo:

$$\Delta t_- = -\frac{D}{c}$$

Nel secondo estremo

$$\Delta t_+ = +\frac{D}{c}$$

$$\Rightarrow T = \frac{2D}{c}$$

Se, ad esempio,  
 $D = \text{tena-bile}$ ,  $T = 16 \text{ min}$

## Contrazione delle distanze (dalle trasformazioni di Lorentz)

in  $S$  (solidale con il regolo)



$$l_{AB} = x_B - x_A = \Delta x$$

in  $S'$ , in moto relativo rispetto a  $S$ ,  
~~il~~ il regolo si muove - Per misurare  
la lunghezza  $l'_{AB} = \Delta x'$ , l'osservatore  
 $S'$  deve misurare le coordinate  $x'_A$  e  $x'_B$   
degli estremi del regolo nello stesso tempo  
 $t'$  - Se misurate a due tempi diversi,  
la misura di  $x'_A$  e  $x'_B$  non darebbe la  
lunghezza del regolo, poiché il regolo è  
in moto rispetto a  $S'$  -  
Dunque la misura va compiuta con  $\Delta t' = 0$   
(eventi simultanei in  $S'$ ) -

Poiché  $\Delta t' = 0$  e  $\Delta x' \neq 0$ , gli eventi  
associati alla misura ~~da~~ non sono  
simultanei in  $S \Rightarrow \Delta x \neq 0$  e  $\Delta t \neq 0$

Le trasf. di Lorentz in forma differenziale  
di sono:

$$\text{da } S \text{ a } S' : \Delta x' = \gamma \Delta x - \gamma \beta c \Delta t$$

$$\text{da } S' \text{ a } S : \Delta x = \gamma \Delta x' + \gamma \beta c \Delta t'$$

La prima relazione non permette di stabilire  
una relazione diretta tra  $\Delta x'$  e  $\Delta x$ , in  
qs. caro, poiché  $\Delta t \neq 0$

Dalla seconda relazione, invece, poiché la  
misura è compiuta in  $S'$  con  $\Delta t' = 0$ ,  
si ricava:

$$\Delta x = \gamma \Delta x'$$

$$\text{cioè: } l_{AB}' = l_{AB} / \gamma$$

Contrazione delle lunghezze di un fattore  $\gamma$   
viste dal sistema in moto relativo -

~~Attenzione!~~

# Es. Difesa <sup>relativistica</sup> galileiana - Paradosso del granchio

Per S solidale con Gate Stenare.

$$L_0 = 90 \text{ m}$$

$$D_0 = 60 \text{ m}$$

$$\rightarrow L = 60 \text{ m se } \beta =$$

$$\sqrt{1-\beta^2} = \frac{D_0}{L_0}$$

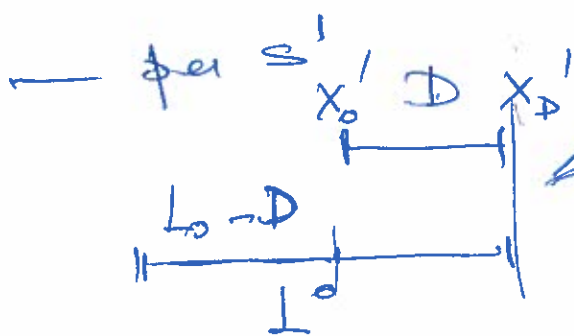
$$\beta^2 = 1 - \left(\frac{D_0}{L_0}\right)^2$$

Per S' solidale con astinere

$$D = D_0 \sqrt{1-\beta^2} = \frac{D_0^2}{L_0} \text{ contratto -}$$

— per S Apertura/chiusura cancello simultanea  
in  $(D_0, t^*)$  in  $(D, t^*)$

quanto pwa/poppa astinere coincide  
con la posizione dei cancelli



evento in  $(X_D, t_0')$   
Apertura cancello

Esattamente quando la pwa  
arriva in  $X_D'$



evento in  $(X_0', t_0')$   
chiusura cancello

$\Rightarrow$  Verifichiamo che qd evento coincide  
con il passaggio della ~~astinere~~ poppa  
dell'astinere da  $X_0'$  cio' che rende  
la duration di S' e S equivalenti

$$t_D' = \gamma t^* - \frac{\gamma \beta}{c} (D_0 + x_0) \quad t^* - \text{simultane per } S$$

$$t_0' = \gamma t^* - \frac{\gamma \beta}{c} x_0$$

$$t_0' - t_D' = \frac{\gamma \beta}{c} D_0 > 0$$

$$t_0' = t_D' + \frac{\gamma \beta}{c} D_0 \quad t_0' > t_D'$$

Il cancello in  $a$   
 si chiude dopo  
 l'apertura del cancello  
 in  $D_0$  

Verifichiamo lo spazio percorso dall'astronave  
 nel tempo  $\Delta t' = t_0' - t_D'$

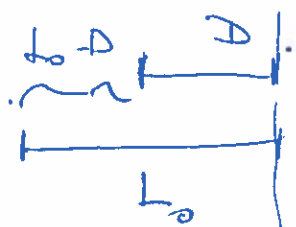
$$\Delta s = v \Delta t' = \beta c \Delta t'$$

$$= \gamma \beta^2 D_0$$

D'altronde  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{L_0}{D_0}$

$$\beta^2 = 1 - \left(\frac{D_0}{L_0}\right)^2$$

$$\Delta s = \frac{L_0}{D_0} \left(1 - \left(\frac{D_0}{L_0}\right)^2\right) D_0 = L_0 - \frac{D_0^2}{L_0} = \underline{L_0 - D}$$



Visuale da  $S' \rightarrow$  credi!