La potenza media dipende dal ~~quad~~

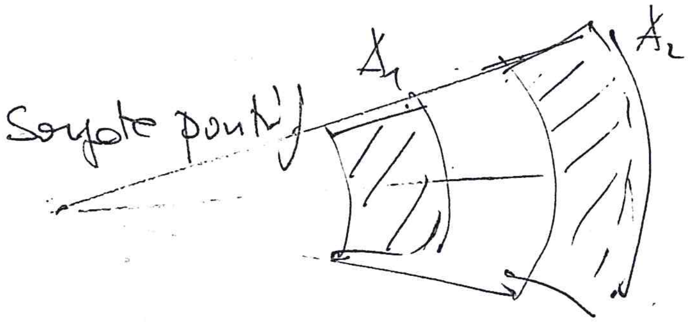
- quadrato dell'ampiezza
- quadrato della frequenza

$\boxed{\text{Risultato generale}}$ e non soltanto per le corde

xxx - - -

x In onde 2D o 3D si usa l'intensità anziché la potenza per tener conto della geometria del sistema:

$I = \langle P \rangle / \text{Area}$ — potenza per unità di superficie



La potenza è costante. L'intensità diminuisce con $1/r^2$

si può trovare espressione per onde ~~stazion~~ sferiche:

$$I = \frac{\langle P \rangle}{4\pi r^2}$$ ⇝ potenza per unità di superficie diminuisce

Poiché $I \div A^2 \Rightarrow f(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t) = \frac{A}{r}\sin(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)$

Ampiezza decrescente con $1/r$ — onda sferica

ONDE DI PRESSIONE (MONODIM.)

- Fluido ⇝ Completamente deformabile, non può sostenere sforzi di taglio per quasi → la forza perde significato geom. (non c'è direzione privilegiata, eccetto alle superfici limite):

Per qualsiasi superficie interna:

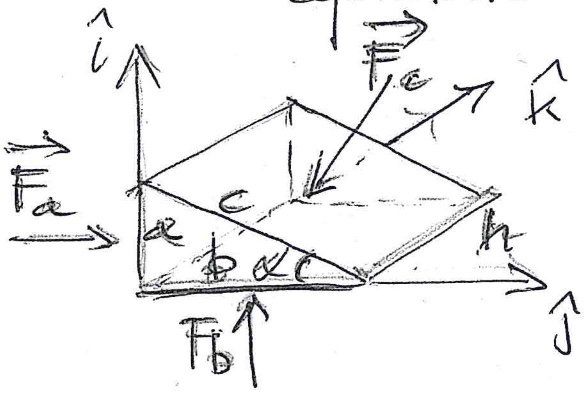
- F tangenziale nulle
- F è ortogonale alla superficie

- Pressione = grandezza scalare (indip. dalla geom)

$$p = \frac{\vec{F}\cdot\vec{n}}{S}$$ per qualsiasi superficie (infinitesima) passante per il punto

Definizione indip. dall'orientazione di S

Esempio: Elemento infinitesimo di fluido in equilibrio statico ($\sum_i \vec{F} = 0$)



$p_a = F_a/ah = F_a/c\sin\alpha\, h$

$p_b = F_b/bh = F_b/c\cos\alpha\, h$

$p_c = F_c/ch$

Eq. statico: $\vec{F}_a + \vec{F}_b + \vec{F}_c = 0$

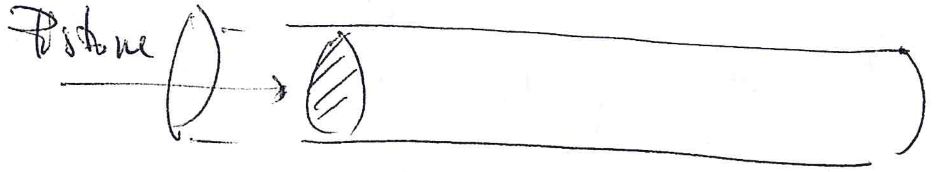
Eq. lungo asse x: $F_a = F_c \sin\alpha \Rightarrow p_a = p_c$

" asse y: $F_b = F_c \cos\alpha \Rightarrow p_b = p_c$

Cioè $p_a = p_b = p_c \equiv p$ Pressione identica, indip. dall'orientazione della superficie

ONDE IN UN TUBO (Colonna d'aria)

$\longrightarrow$ longitudinale e monodim.



Comprimibilità di un fluido (equivalente alla relazione empirica di Young per un corpo di geom. indefinita)

$$\Delta p = -\beta \frac{\Delta V}{V} \qquad \left(\frac{F}{S} = E \, \frac{S\,dl}{S\,l} \right)$$

Per i liquidi $\beta \sim 10^9$ Pa (~ poco comprimibili)

gas $\beta \sim 10^5$ Pa ($\sim p_0$)

Note: $[p] = [\frac{F}{S}] \longrightarrow 1\text{ Pa} = \frac{1\text{ N}}{1\text{ m}^2}$ unità S.I.

definiremo β per i gas, studiando le leggi dei gas. Dipende dal tipo di trasformazione

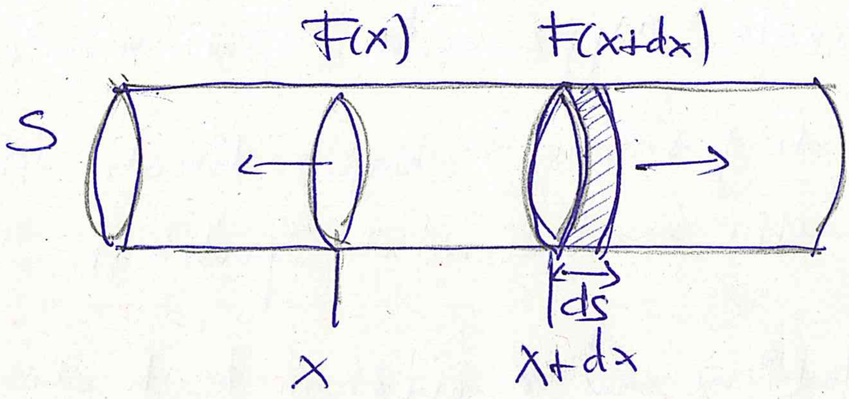
Densità: Fluido $\leadsto$ geometria variabile: il concetto di massa è sostituito dalla densità

$$\rho = \frac{dm}{dV} \quad \leadsto \quad \frac{d\rho}{\rho} = -\frac{dV}{V}$$

Variabili pressione e densità adeguate per lo studio della propagazione delle onde:

β = proprietà elastica

ρ = " inerziale



$$V = S\,dx$$
$$dV = S\,ds$$

$$\Delta p = -\beta \frac{dV}{V} = \beta \frac{d\rho}{\rho}$$

Variazione di volume e densità → perturbazione di pressione

Forze su elemento dx di massa $dm = \rho S dx$:

$$dF = S\left[p(x) - p(x+dx)\right] = -S\,dP = S\,\beta\frac{dV}{V} =$$
$$= S\beta\frac{\partial s}{\partial x}$$

2ª legge di Newton per $dm = \rho S dx$:

$$\cancel{S}\beta\frac{\partial s}{\partial x} = (\rho \cancel{S} dx)\frac{\partial^2 s}{\partial t^2}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} - \frac{\rho}{\beta}\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = 0}$$

EQ. D'ONDA per spostamenti longitudinali del fluido

$$v = \sqrt{\frac{\beta}{\rho}} \equiv \left[\frac{\text{Proprietà elastica del mezzo}}{\text{Proprietà inerziale del mezzo}}\right]^{1/2}$$

Velocità di propagazione della perturbazione

- L'eq. d'onda trovata rappresenta "spostamenti" (perturbazioni di posizione) longitudinali del fluido attorno alla condizione di equilibrio

- Cerchiamo relazione con <u>variazioni locali di pressione</u>:

  - Poiché non c'è <u>spostamento netto</u> di materia $\longrightarrow$ variazioni locali di pressione e posizione avvengono a <u>massa costante</u> nel volume $S dx$

Senza perturbazione: $dm = \rho S dx$

Con perturbazione (cioè variazione di ρ e/o posizione locale): $dm' = (\rho + d\rho) S (dx + ds)$

$$= \rho S dx \left(1 + \frac{d\rho}{\rho}\right)\left(1 + \frac{\partial s}{\partial x}\right)$$

$$= dm \left(1 + \frac{d\rho}{\rho} + \frac{\partial s}{\partial x} + \cancel{\frac{d\rho}{\rho}\frac{\partial s}{\partial x}}\right)$$

trascurabili Inf. 2° ordine

Condizione $dm' = dm$: $\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{\partial s}{\partial x}$

D'altronde: $\Delta p = \beta \frac{d\rho}{\rho} = -\beta \frac{\partial s}{\partial x}$

$$p(x,t) = p_0 - \beta \frac{\partial s}{\partial x}$$

Variazioni di p legate alla <u>derivata di s</u> -

Se $s(x,t)$ è sinusoidale, $p(x,t)$ è sinusoidale (con fase relativa di $\pi/2$)

$$\frac{\partial}{\partial x}(\sin x) \longleftrightarrow \cos x$$

Per onde <u>stazionarie</u> sinusoidali

nodi di s $\longleftrightarrow$ ventri di p

ventri di s $\longleftrightarrow$ nodi di p

Eq. d'onda per la pressione:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(p_0 - \beta\frac{\partial s}{\partial x}\right) = \qquad \left[\text{relazione } p, \frac{\partial s}{\partial x}\right]$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(-\beta\frac{\partial^2 s}{\partial x^2}\right) = \qquad \left[p_0 \text{ è cost.}\right]$$

$$= -\rho\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 s}{\partial t^2}\right) = \qquad \left[\text{Eq. d'onda per } s\right]$$

$$= -\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right) = \qquad \left[\text{inversione ordine di derivazione}\right]$$

$$= +\frac{\rho}{\beta}\frac{\partial^2}{\partial t^2}p \qquad \left[\text{relazione } p \text{ e } \frac{\partial s}{\partial x} \text{ e ignoro } p_0 \text{ poichè compare in una derivata}\right]$$

$$\Longrightarrow \boxed{\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{\rho}{\beta}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0}$$

EQ. D'ONDA per p –

Di fatto l'eq. d'onda è per $\delta p = p - p_0 = -\beta\frac{\partial s}{\partial x}$, poichè p_0 cost è nullo in ogni derivazione

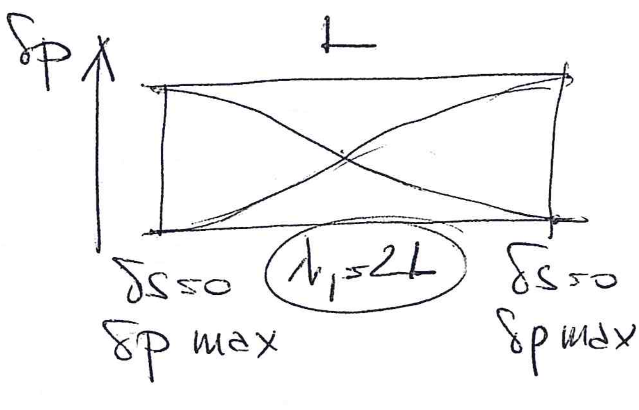
* Onda acustica di pressione
    * spost. (perturbazione) longitudinale
    * Δp sfasato di $90°$

* s e p sono di natura differente; <u>s è vettoriale</u> (è uno spostamento) "appare" scalare nell'analisi 1-D. La grandezza <u>p è sempre scalare</u> (anche in 2D e 3D) come deve essere una grandezza che non dipenda dalla geometria

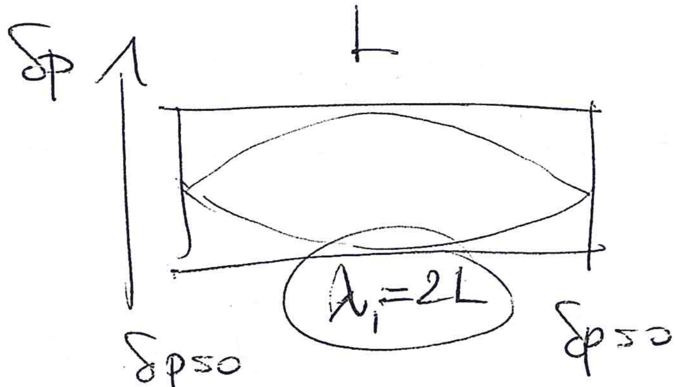
* Il principio di sovrapposizione vale per <u>pressione</u> (e non per $\vec{s}$) e onde di pressione

– ONDE in un tubo (colonne d'aria, canne)

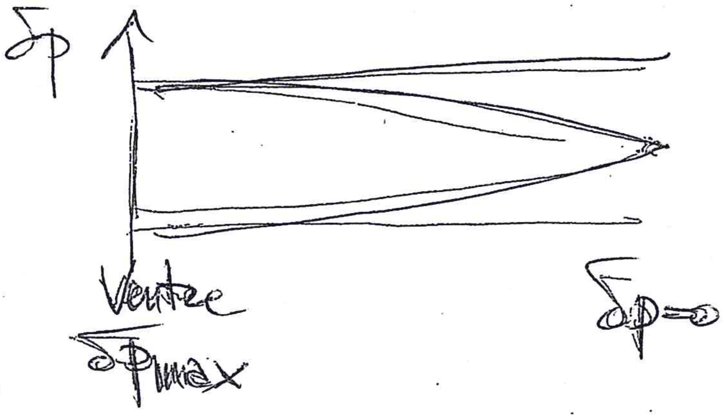
1) <u>TUBO CHIUSO</u>
Onda stazionaria
Non c'è spostamento agli estremi → <u>nodi di s</u>
<u>e ventri di p</u>



2) <u>TUBO APERTO</u>
onda stazionaria
$\delta p=0$ agli estremi
(equilibrio di pressione con il gas esterno)
→ <u>nodi di p e ventri di s</u>



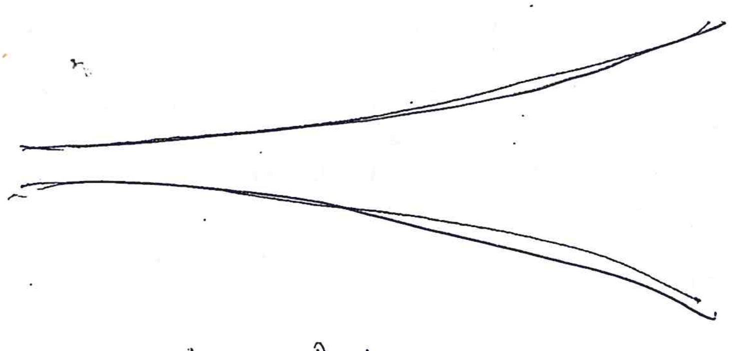
3) TUBO SEMICHIUSO (O SEMIAPERTO)



$\lambda_1 = 4L$

In realta' i tubi aperti non sono vincoli ideali per p (condizione δp = 0 ~~che~~ non "rigida")
→ c'e' trasferimento di energia all'esterno e l'onda acustica si propaga anche fuori dallo strumento.

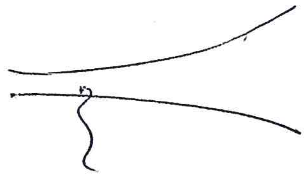
– Forma della bocca di uno strumento che massimizza il trasf. di energia



Espansione del corno

→ per esercitto

Profilo della tromba (adattamento di impedenza)



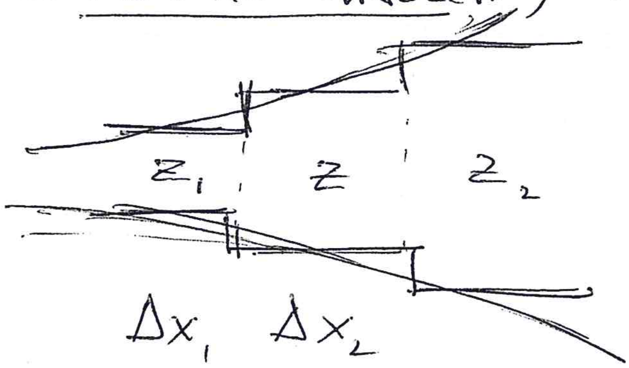
$dm = \infty$

$dm = \rho S dx$

$Z = \mu v = \rho S v$

La variazione di impedenza di un tratto dx, $Z(x)$, dipende solo da S, poiché ρ e v sono costanti nello stesso gas.

- Modello discreto; tratti identici



$\Delta x_1 = \Delta x_2$

Troviamo Z t.c. il trasf. di energia da Z_1 a Z_2 sia massimo

Siano Z_1 e Z_2 fissi e $Z_1 < Z < Z_2$

Troviamo il massimo della potenza trasmessa da

$$\frac{d}{dZ}\left(\frac{P_t}{P_i}\right) = \frac{d}{dZ}\left[\underbrace{\frac{4\,Z_1 Z}{(Z_1+Z)^2}} \cdot \frac{4\,Z Z_2}{(Z_2+Z)^2}\right] = 0$$

Trasmissione da Z_1 a Z $\times$ da Z a Z_2

Lo zero della derivata ~~dp~~ è lo zero del numeratore (a meno di termini costanti):

$$z(z_1+z)^2(z_2+z)^2 - z^2(z_1+z)(z_2+z)^2 - z^2(z_1+z)^2(z_2+z) = 0$$

$$z(z_1+z)(z_2+z)\underbrace{\left[(z_1+z)(z_2+z) - z(z_2+z) - z(z_1+z)\right]}_{z_1 z_2 + z(z_1+z_2) + z^2 - z(z_1+z_2) - 2z^2 = 0} = 0$$

$$z_1 z_2 - z^2 = 0$$

$$z = \sqrt{z_1 z_2} \qquad \text{media geometrica}$$

Variazione relativa su ciascun tratto:

$$\Delta x_1 : \quad \frac{\Delta z}{z} = \frac{z - z_1}{z_1} = \frac{\sqrt{z_1 z_2} - z_1}{z_1} = \sqrt{\frac{z_2}{z_1}} - 1$$

$$\Delta x_2 : \quad \frac{\Delta z}{z} = \frac{z_2 - z}{z} = \frac{z_2 - \sqrt{z_1 z_2}}{\sqrt{z_1 z_2}} = \sqrt{\frac{z_2}{z_1}} - 1$$

Medesima variazione relativa su due tratti identici (**)

Limite continuo $\rightarrow$ stessa variazione relativa su ciascun tratto dx:

$$\frac{dz}{z} = \alpha\, dx \quad \longrightarrow \quad z = z_0 e^{\alpha x}$$

$$\cancel{\rho\sigma S = \rho\sigma S_0 e^{\alpha x}}$$

$$r = r_0 e^{\frac{\alpha}{2} x} \qquad \text{Profilo esponenziale}$$

(**) Esercizio: Dimostrare che si ottiene lo stesso risultato per la massa m che massimizza il trasf. di energia da M a M_1 con urto elastico