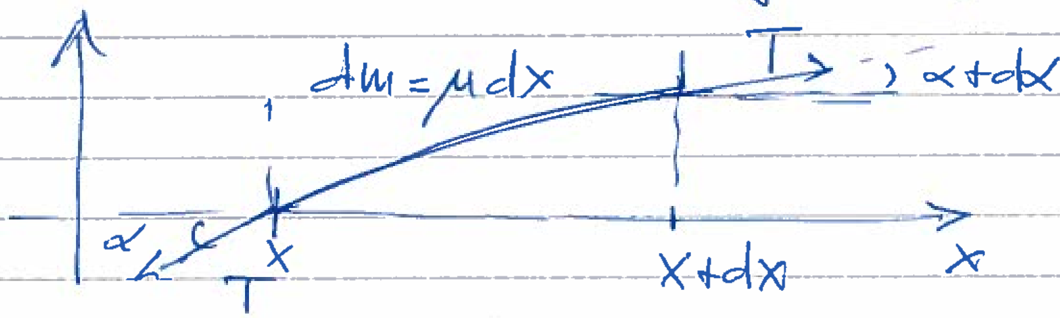
EQUAZIONE D'ONDA: DINAMICA DI UNA CORDA TESA

Analisi dinamica del moto di una corda in condizioni "idealizzate"

- corda estesa indefinitamente
- tensione T costante e non alterata dallo spostamento dall'equilibrio (spostam. trascurabile rispetto alla lungh. della corda — ovvio per corda infinita)
- Angoli infinitesimi $\tan\alpha \simeq \alpha \simeq \frac{\partial y}{\partial x}$
- Corda omogenea con densità lineare di massa ~~omogenea~~ uniforme $\mu = m/l$



$$F_x = T\cos(\alpha+d\alpha) - T\cos\alpha$$
$$F_y = T\sin(\alpha+d\alpha) - T\sin\alpha$$

$$F_x \simeq T\,\underbrace{\alpha\, d\alpha}_{\text{entrambi infinitesimi}} \simeq 0$$

Trascurabile, consistentemente con l'idea che non ci sia moto lungo x

$$F_y = T\left[\sin(\alpha + d\alpha) - \sin\alpha\right] =$$
$$= T\left[\cancel{\sin\alpha\cos d\alpha} + \sin d\alpha \cos\alpha - \cancel{\sin\alpha}\right]$$
$$\simeq T\, d\alpha$$

→ infinitesimo del 1° ordine rispetto a F_x, che è del 2° ordine ($\alpha\, d\alpha$)

Eq. dinamica di Newton:

$$T\, d\alpha = dm\, a_y = \mu\, dx\, a_y$$

$$T \frac{d}{dx}(\alpha) \cancel{= \mu\, dx\, a} = \mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$T \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

Eq. DELLE ONDE DI D'ALEMBERT:

$$\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{\mu}{T}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0}$$

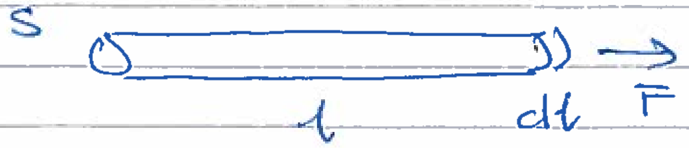
Per dimensioni $v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$ ha le dimensioni di una velocità:

$$\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0}$$

$$v = \left[\frac{\text{Proprietà elastica}}{\text{Proprietà inerziale}}\right]^{1/2}$$

ONDE ELASTICHE IN UNA SBARRA

Forza elastica: $\frac{F}{S} = E \frac{dl}{l}$

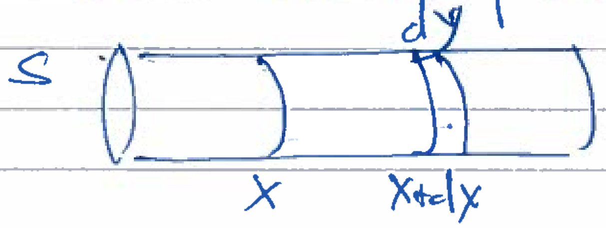


E = modulo di Young

F rappresenta la forza ESTERNA necessaria per allungare la sbarra di un tratto dl

Esiste una forza interna di richiamo uguale e contraria ($F = -k\,dx$ — f. elastica)

Onda di compressione/dilat. (1D - Longitudinale)



dy = allungamento

$\frac{dy}{dx} \ll 1$ allung. relativo

$$dF = F(x+dx) - F(x) = E S \frac{\partial y}{\partial x}$$ prop. elastica

Eq. di Newton per $dm = \rho S\, dx$

$$E \cancel{S} \frac{\partial y}{\partial x} = \rho \cancel{S}\, dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \qquad (F_y = m a_y)$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}}$$ Eq. d'onda

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}} = \left[\frac{\text{Proprietà elastica}}{\text{Proprietà inerziale}}\right]^{1/2}$$

Dimostriamo, per sostituzione, che $y = f(x \mp vt)$ è soluzione dell'eq. di D'Alembert con $v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$ $\equiv$ velocità di fase delle onde

Sia $z = x \mp vt$
possiamo vedere $f(x \mp vt) = f(z(x,t))$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial z} \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t} = \mp v \frac{\partial f}{\partial z} \qquad \frac{\partial f}{\partial t} = \mp v$$

Derivata seconda:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)\frac{\partial z}{\partial t} = v^2 \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Sostituendo nell'eq. di D'Alembert:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} v^2 \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0 \qquad \text{cvd.}$$

- Si dimostra anche che $f(x \mp vt)$ è l'unica soluzione dell'eq. delle onde
- Qs. dimostrazione è complessa e non viene coperta in qs. corso

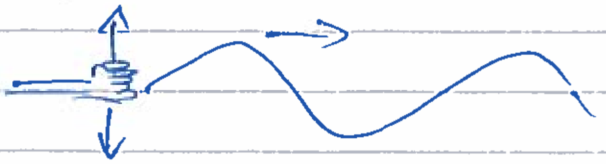
La forma più generale è la somma di un'onda progressiva e un'onda regressiva

$$y(x,t) = f(x-vt) + g(x+vt)$$

Le condizioni al contorno del problema definiscono (o limitano) la forma di f e g.

Nota : L'equazione delle onde è lineare ; compaiono solo derivate di ordine n rispetto a x e t. Quindi per qs. equazioni vale il PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI

POTENZA TRASPORTATA DALL'ONDA (NON STAZIONARIA)



flusso continuo di energia

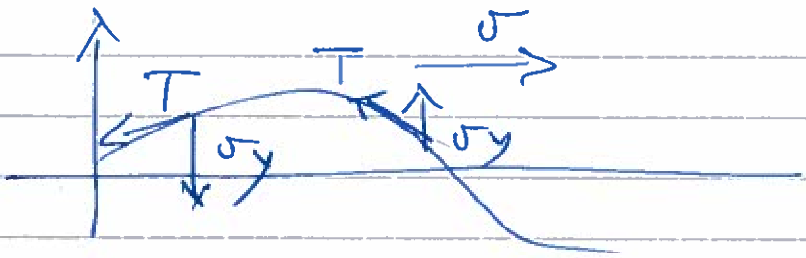
Immissione di lavoro tramite forza esterna per sostenere il treno di impulsi

→ trasporto di energia all'estremità opposta della corda senza trasporto di materia

x calcolo della POTENZA immessa in un tratto dx per spostare la corda di una velocità v_y.

$$P = F_y v_y$$

— non c'è spostamento lungo x!



$$F_y = -T \frac{\partial y}{\partial x} \quad e \quad v_y = \frac{\partial y}{\partial t}$$

sono concordi in segno

Forza esercitata su dx dal tratto che lo precede

(segno negativo verso opposto alla pendenza $\frac{\partial y}{\partial x}$)

$$P = -T \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial t}$$

Per un'onda sinusoidale –

$$y(x,t) = A \sin(kx - \omega t)$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = Ak \cos(kx - \omega t)$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = -A\omega \cos(kx - \omega t)$$

$$P = T A^2 k\omega \cos^2(kx - \omega t)$$

$$= \left[\frac{T}{v}\right] A^2 \omega^2 \cos^2(kx - \omega t)$$

$$= [\mu v] A^2 \omega^2 \cos^2(kx - \omega t)$$

Potenza media su un periodo:

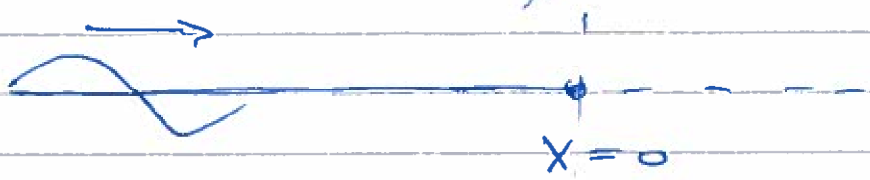
$$\langle P \rangle = \frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} P\,dt = \frac{1}{2} [\mu v] A^2 \omega^2$$

$$\langle P \rangle \propto \begin{cases} \text{ampiezza quadrato} \\ \text{frequenza} \quad \text{"} \quad \text{dell'onda} \end{cases}$$

$$Z = \mu v = \frac{T}{v} \equiv \text{Impedenza acustica}$$

controlla trasmissione e riflessione tra mezzi non c'è trasporto di energia oltre il vincolo → riflesse

SOLUZIONE GENERALE PER FILO CON ESTREMO VINCOLATO



"Filo semi-infinito"
tensione T e
densità $\mu = m/\ell$

Onda proveniente da $x < 0$, concorde con vincolo fisso a $x = 0$: $y(0,t) = 0$

Soluzione generale:

$$y(x,t) = f(x-ct) + g(x+ct) \qquad (1)$$

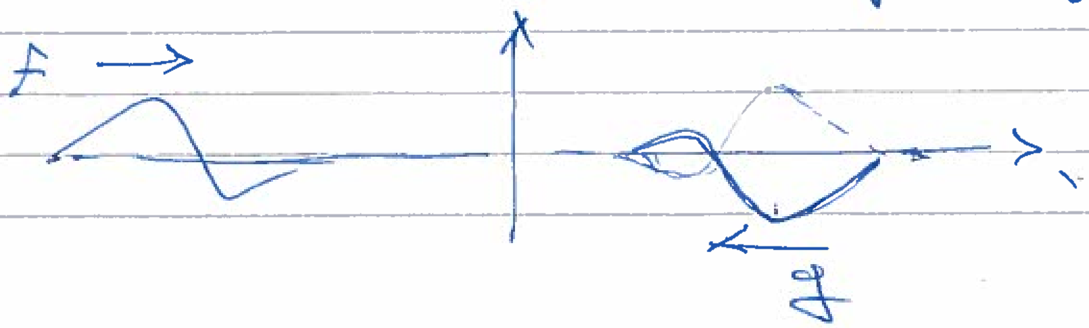
Condizione imposta dal vincolo:

$$f(-ct) = -g(ct) \qquad [y(0,t) = 0]$$

Qs. relazione pone una condizione di simmetria sulle funzione:

$$f(-z) = -g(z)$$

g ha in z lo stesso valore di f in $-z$, cambiato di segno $\Rightarrow$ È una funzione speculare rispetto a $x = 0$ e capovolta attorno all'asse x (cambio di segno in y)



Per $z = x + ct$ $\quad g(x+ct) = -f(-(x+ct))$

$$y(x,t) = \underbrace{f(x-vt)}_{\text{progressiva}} \underbrace{- f(-(x+vt))}_{\text{regressiva speculare e capovolta}}$$

- l'onda regressiva si propaga nel filo "non fisico"
- Quando le onde si incontrano in $x = 0$ si elidono (interf. distruttiva)

- Poi l'onda progressiva si perde nel filo non esistente, l'onda regressiva entra nel filo —

- Nel filo "FISICO": l'onda subisce una RIFLESSIONE all'estremo vincolato e si propaga capovolta

$\Longrightarrow$ In $x = 0$ c'è interf. distruttiva tra l'onda progressiva incidente e l'onda riflessa sfasata di $180° = \Delta\phi = \phi_1 - \phi_2$

∘ Si può descrivere il fenomeno anche così:

- C'è solo l'onda progressiva
- In $x = 0$, la perturbazione esercita una forza F_y sul vincolo
- Il vincolo esercita una forza uguale e contraria (Azione-Reazione) determinando una perturbazione uguale e contraria a quella in arrivo

Se $f(x-vt)$ è sinusoidale:

$$f(x-vt) = A\sin(kx-\omega t)$$

Soluzione gen. su corda con estremo fisso:

$$y(x,t) = A\sin(kx-\omega t) - A\sin(-(kx+\omega t)) =$$

$$= A\sin(kx-\omega t) + \underbrace{A\sin(kx+\omega t)}_{\text{seno è funzione dispari}}$$

$$= A\sin(kx)\cos(\omega t)$$

$\Longrightarrow$ La riflessione di un'onda sinusoidale genera un'onda stazionaria

× si sommano la sinusoide progressiva con la sinusoide regressiva

× non si tratta di un singolo impulso riflesso, ma di una sequenza infinita (periodica) di impulsi

In generale, per un'onda periodica, tutte le componenti sinusoidali generano un'onda stazionaria $\Longrightarrow$ Un'onda PERIODICA su una corda con estremo fisso dà un'onda stazionaria

CORDA VINCOLATA IN DUE ESTREMI

- Lunghezza L $\qquad y(0,t) = 0$
$\qquad y(L,t) = 0$

* Onda sinusoidale: la condizione $y(0,t)$ impone che l'onda sia stazionaria

$$y(x,t) = A \sin(kx)\cos(\omega t)$$

La condizione sul secondo estremo, mette vincoli sulla lungh. d'onda

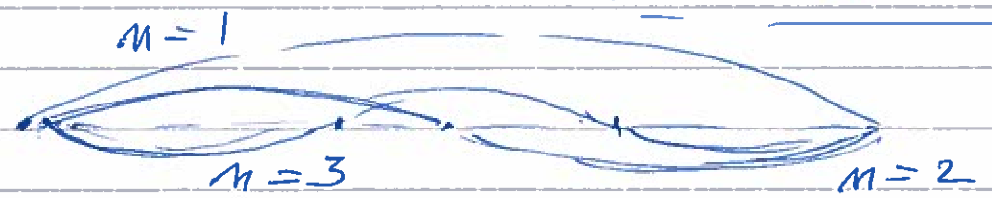
$$A \sin(kL)\cos(\omega t) = 0 \quad \forall t$$

$$\sin(kL) = 0$$

$$\Rightarrow \quad kL = n\pi \quad \Rightarrow \quad \frac{2\pi}{\lambda} L = n\pi$$

Soluzioni armoniche: $\boxed{\lambda_n = 2L/n}$

Freq. Armoniche $\boxed{\nu_n = \frac{v}{\lambda_n} = n\frac{v}{2L}}$



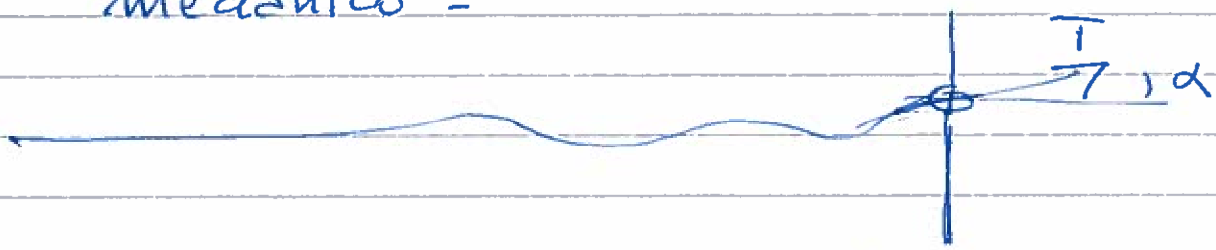
STRUMENTI A CORDA:

$$\nu_n = n\frac{v}{2L} = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

- La freq. fond. scala con $\sqrt{T}$
- corde spesse, freq. basse

CORDA SEMI-INFINITA CON ESTREMITÀ LIBERA

- Si osserva riflessioni con caratt. differenti. Similmente al caso con estremo fisso, l'impulso non può propagare nella regione a $x > 0$, ove non c'è supporto meccanico.



. Per non esserci dissipazioni di energia, ci deve essere riflessione

Al capo libero, la componente y della forza è nulla ad ogni tempo.

[un elemento di massa infinitesima, non può sostenere una forza finita — avrebbe accelerazione infinita]

$$\Longrightarrow T_y(0) = 0 \quad \forall t$$

$$T \sin\alpha \simeq T\alpha \simeq T \frac{\partial y}{\partial x}(0,t) = 0$$

Questa relazione pone una condizione sulle derivate di f e g nella soluzione generale:

$$y(x,t) = f(x - vt) + g(x + vt)$$

$$\cancel{\frac{\partial y}{\partial t}(0,t) = 0} \quad \cancel{=} \; f'(t$$

Capo vincolato $g(z) = -f(-z)$

Capo libero $g'(z) = -f'(-z)$

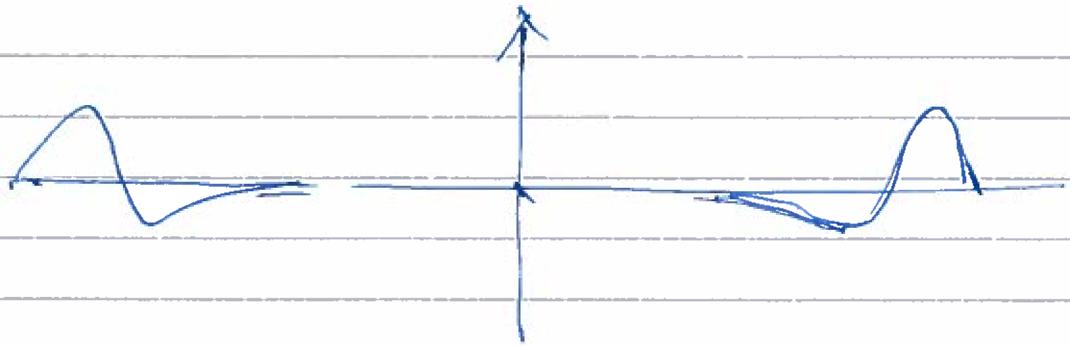
$$g(z) = f(-z) + \text{cost}$$

Poiché a tempi infiniti (dopo il passaggio dell'impulso e prima) il capo è a riposo

$$y_+(0,t) = y_-(0,t) = 0 \implies \text{cost} = 0$$

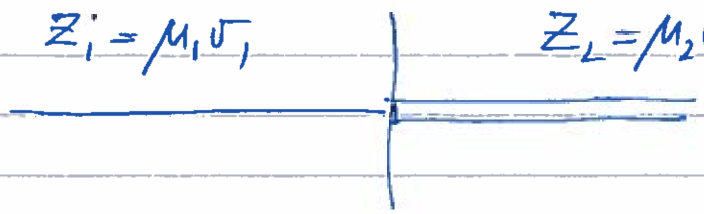
$g(z) = f(-z)$ speculare, non capovolt

$$y_+(x,t) = f(x - vt)$$
$$y_-(x,t) = f(-(x+vt))$$



In $x = 0$ le onde interferiscono costruttivamente e l'ampiezza è doppia.
Poi l'onda regressiva si propaga riflessa

Riflessione tra mezzi con imp. acustiche Z_1 e Z_2



$$Z_i = \frac{T_i}{v_i}$$

$T_1 = T_2$ per eq. lungo x

$$P_t = \frac{(Z_1 - Z_2)^2}{(Z_1 + Z_2)^2} P_i \qquad \text{onda trasmessa}$$

$$P_r = \frac{4 Z_1 Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2} P_i \qquad (P_r = 1 - P_t) \ \text{riflessa}$$

Casi corda libera $Z_2 = 0$
vincolo fisso $Z_1 = \infty$ $\Longrightarrow$ Riflessioni totale

Caso generale: condizioni di continuita'

1) $y_1(0,t) = y_2(0,t) \quad \forall t$

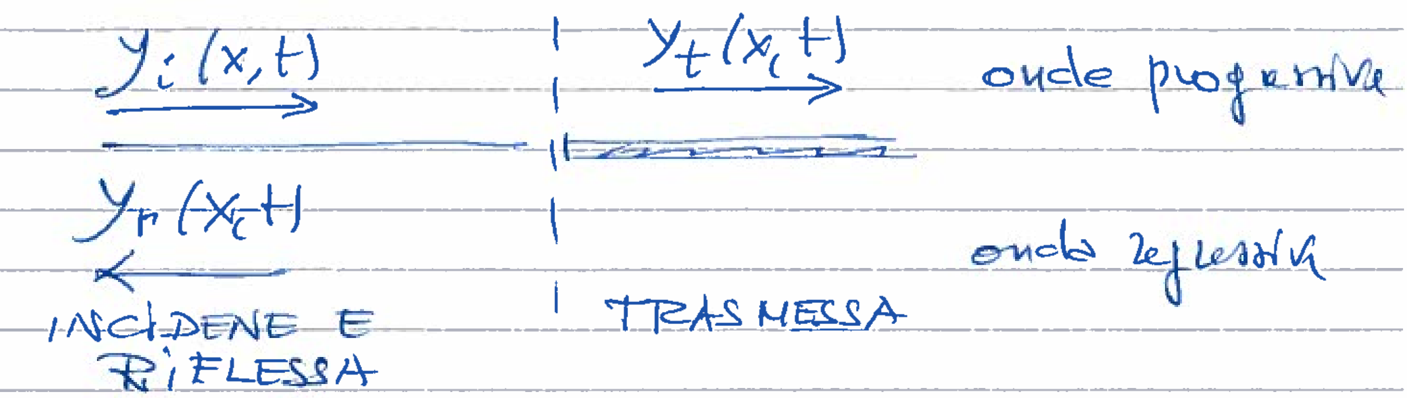
2) $\dfrac{\partial y_1}{\partial t}(0,t) = \dfrac{\partial y_2}{\partial t}(0,t)$

} corde si muovono assieme

3) $\dfrac{\partial y_1}{\partial x}(0,t) = \dfrac{\partial y_2}{\partial x}(0,t)$ Forza F_y nulla sul giunto

$\longrightarrow$ nessuna forza finita può essere sostenuta da un elemento di massa nulla

Per un onda sinusoidale



$$y_1(x,t) = A_i \sin(k_1 x - \omega_1 t) + A_r \sin(k_1 x + \omega_1 t)$$

$$y_2(x,t) = A_t \sin(k_2 x - \omega_2 t)$$

Seno è funzione dispari:

$$A_r \sin(k_1 x + \omega_1 t) - A_i \sin(\omega_1 t - k_1 x) = -A_t \sin(\omega_2 t - k_2 x)$$

In $x = 0$, condizione 1):

1) $[A_r - A_i] \sin(\omega_1 t) = -A_t \sin(\omega_2 t)$

$\Rightarrow$ richiede $\omega_1 = \omega_2$

Onda trasmessa ha la stessa freq. dell'onda (FORZANTE) incidente

$\Rightarrow$ ci si può aspettare che la trasmissione sia tanto più efficiente, quanto più il secondo mezzo sia simile (risponde alle stesse frequenze) —

Condizioni sulla forza:

3) $K_1(A_r + A_i)\cancel{\sin \omega t} = K_2 A_t \cancel{\sin(\omega t)}$

$$A_r + A_i = \frac{K_2}{K_1} A_t$$

Conviene scrivere:

$$\frac{K_2}{K_1} = \frac{\omega}{v_2} \cdot \frac{v_1}{\omega} = \frac{v_1}{v_2} = \left(\frac{T}{v_2}\right)\left(\frac{v_1}{T}\right) = \frac{Z_2}{Z_1}$$

Esprimo la relazione tramite una caratteristica del mezzo e non tramite una caratt. dell'onda – In qs termini la relazione e' vera per ogni onda –

Sistema:
$$\begin{cases} A_i - A_r = A_t \\ A_i + A_r = \dfrac{Z_2}{Z_1} A_t \end{cases}$$

$$\Longrightarrow A_t = \frac{2 Z_1}{Z_1 + Z_2} A_i$$

$$A_r = \left(\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}\right) A_i$$

$\longrightarrow$ da cui, quadrando, le relazioni per la potenza –

Per una sbarra, corpo solido $Z = \rho v$