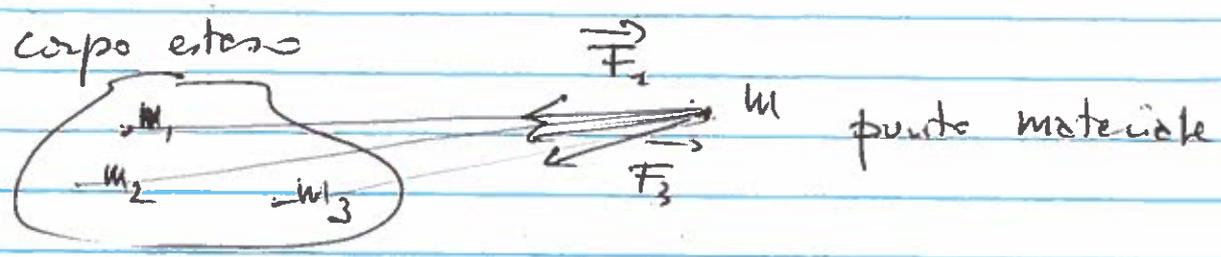


Forze di gravita' su corpi estesi



$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i = - \sum_i G \frac{m m_i}{r_i^2} \hat{u}_r$$

Per una distribuzione continua di massa
 $m_i \rightarrow dm$ funzione del posto
 $dm = \rho dV$ espressa tramite la densita'

In generale $\rho = \rho(\vec{r})$, funzione del posto

Per ogni elemento infinitesimo:

$$d\vec{F} = - G \frac{m dm}{r^2} \hat{u}_r$$

Forza complessiva tra punto materiale e corpo esteso:

$$(1) \quad \vec{F} = - G \int_M \frac{m dm(r)}{r^2} \hat{u}_r = - \int_V \frac{G m \rho(r)}{r^2} dV \hat{u}_r$$

Se anche il corpo m e' un corpo esteso,
 per ciascun suo punto si calcola la forza tramite la (1) e poi sommano
 →

vettorialmente la forza per tutti i punti. La forza risultante è la somma vettoriale della forza di interazione tra tutte le coppie di punti:

$$\vec{F} = - \int \int_{V_1, V_2} G \frac{\rho_1(\vec{r}_1) \rho_2(\vec{r}_2)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^2} \hat{u}_{\vec{r}_{12}} dV_1 dV_2$$

Espressione molto complicata. La situazione è più semplice per corpi a SIMMETRIA SFERICA che rappresentano molte situazioni interessanti

→ pianeti, corpi celesti, etc.

Questi corpi sono con buona approssimazione rappresentabili come sfere ~~eventualmente~~ omogenee, o costituite da gusci sferici concentrici e omogenei

- Calcoliamo l'interazione tra corpi con questa configurazione

- La soluzione generale richiede strumenti di calcolo avanzato. Ne vedrete numerosi esempi a Fisica II (la struttura della legge di forza elettrica è identica a quella gravitazionale - in q.s. conto non affronto il problema generale, mi limito soltanto al teorema di Gauss e mi limito a calcolare l'interazione per configurazioni a SIMM. SFERICA)

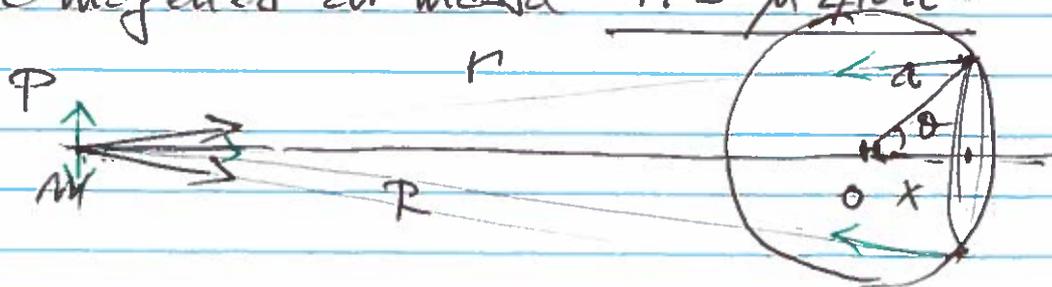
Inoltre, poiché $\vec{F} = -\nabla \Phi_p$ è univocamente determinata da Φ_p , conviene calcolare Φ_p evitando le complicazioni del calcolo vettoriale.

Segue lo schema di Holliday - Resnik.

x Sfera piena = sovrapposizione di sfere (gusci sferici) cave di raggio variabile.

- 1) Calcolo interazione per punto materiale e sfera ^{cava} di spessore infinitesimo
- 2) Deriva interazione per sfera piena sommando (integrando) su infiniti gusci sferici contenuti nella sfera
- 3) Di corpi sferici

1) Φ_p tra massa puntiforme e SFERA CAVA Omogenea di massa $M = \rho 4\pi a^2$



Per motivi di simmetria \vec{F} è diretta lungo la congiungente di P con il centro della sfera: $\vec{F} = F \hat{u}_R$

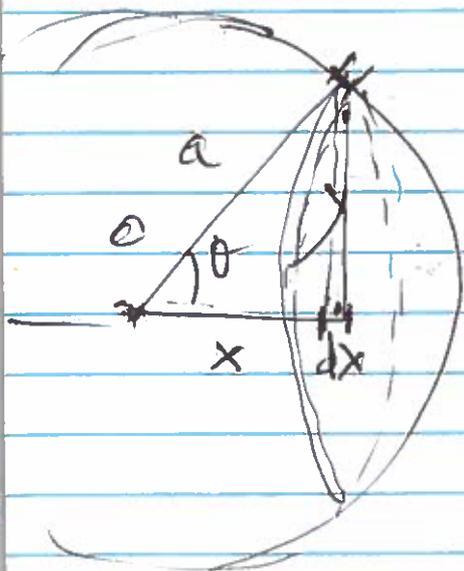
Infatti, per ogni punto sul guscio esiste un punto simmetrico rispetto all'asse OP t.c. delle forze componenti (vedi figura prec.)

\times componenti \perp a OP si elidono
componenti \parallel a OP si sommano

Dunque: F è lungo R e
 E_p varia lungo R e le
superfici equipotenziali sono
ortogonali a \vec{U}_R

Calcoliamo $E_p(R)$, e poi $F = -\frac{dE_p}{dR} \vec{U}_R$

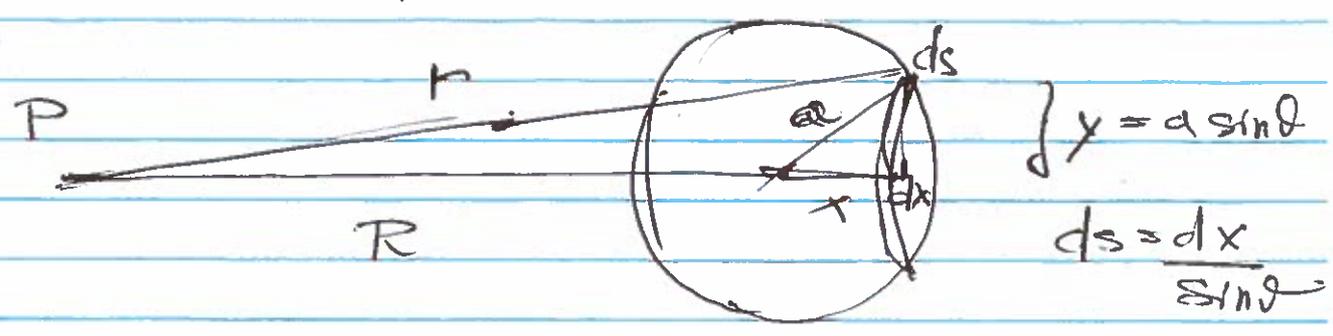
Mantenendo la simmetria del problema e cioè considerando l'interazione tra il punto m e un ANELLO ortogonale a \vec{U}_R



Raggio Anello: $y = a \sin \theta$
Spessore $ds = dx / \sin \theta$

$$\text{Massa: } dm = \mu 2\pi y ds \\ = \mu 2\pi a dx$$

Distanza dei punti dell'anello da P



$$r^2 = (R^2 + x^2) + y^2$$

$$= R^2 + 2Rx + x^2 + y^2 = R^2 + 2Rx + a^2$$

Variazioni di distanza per punti entro l'anello

$$d(r^2) = 2r dr = d(R^2 + 2Rx + a^2)$$

$$= 2R dx \quad [R \text{ e } a \text{ sono parametri fissi del problema}]$$

Daunque $dr = \frac{R dx}{r}$ o $dx = \frac{r dr}{R}$

La massa dell'anello può essere scritta:

$$dm = \mu 2\pi a dx = \frac{\mu 2\pi a}{R} r dr$$

in funzione di r

10' Tutti i punti dell'anello distano ~~dal~~
 tua r e $r+dr$ dal punto P - L'energia
 potenziale dovuta all'interazione tra
~~il punto in P~~ la massa in P e l'anello
 è

$$dE_p(r) = -G \frac{m \, dm}{r} = -G \mu M \frac{2\pi a \, r \, dr}{R^2}$$

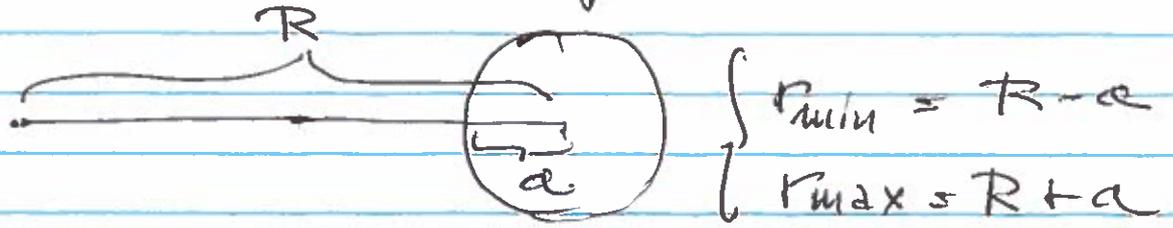
L'energia potenziale complessiva, dovuta
 all'interazione dell'intero generatore e'

$$E_p = \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} dE_p = -G \mu M \frac{2\pi a}{R^2} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} r \, dr$$

dove r_{\min} e r_{\max} rappresentano la dist.
 minima e massima da P dei possibili
 anelli infinitesimi in cui abbiamo
 "affettato" la sfera cava -

Si hanno due situazioni differenti
 a seconda che il punto P sia interno
 o esterno alla sfera

1) Punto esterno alla sfera carica



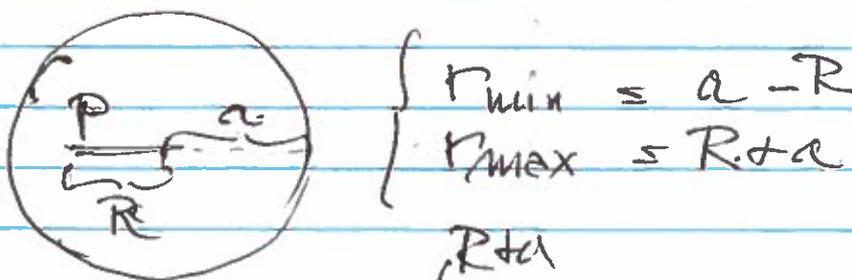
$$\Phi_p = -G M \mu \frac{2\pi a}{R} \int_{R-a}^{R+a} \frac{dr}{r}$$

$$= -G M \mu \frac{2\pi a}{R} [(R+a) - (R-a)] =$$

$$= -G M \mu \frac{4\pi a^2}{R} = -G \frac{M M}{R}$$

Energia potenziale equivalente alla interazione con un punto di massa totale M posto nel centro della sfera carica

2) Punto interno alla sfera



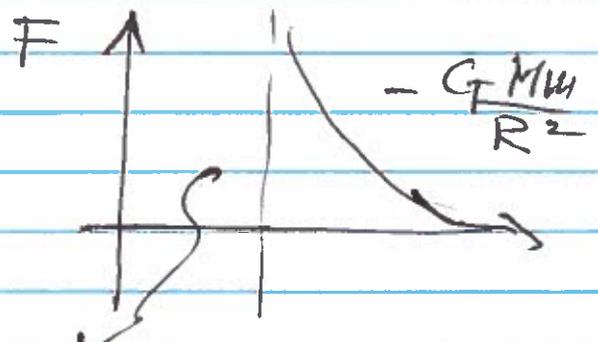
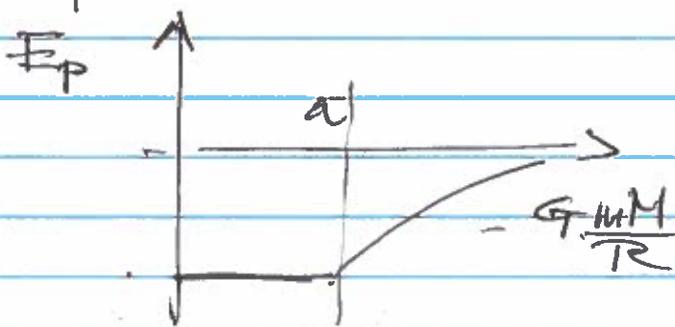
$$\Phi_p = -G M \mu \frac{2\pi a}{R} \int_{a-R}^{R+a} dr = -G M \mu \frac{4\pi a}{R} = -G \frac{M M}{a}$$

→ costante, indep. della posizione di P

Forza: $\vec{F}(R) = - \frac{dE_p}{dR} \hat{u}_R$

$$F(R) = \begin{cases} 0 & \text{per } R < 0 \text{ punto interno} \\ -\frac{GMm}{R^2} & \text{per } R > 0 \text{ pto ext.} \end{cases}$$

Per $R=a$ il risultato per punto esterno e interno coincidono per E_p - discontinuità per F

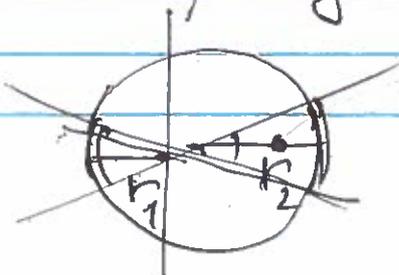


$F=0$; equilibrio indiff.

Nota: la condizione $\vec{F}=0$ all'interno di
di una distribuzione omogenea
a simmetria sferica è caratteristica
delle forze con $F(R) \propto 1/R^2$

→ Test di precisione della dipendenza
da $1/R^2$ della forza

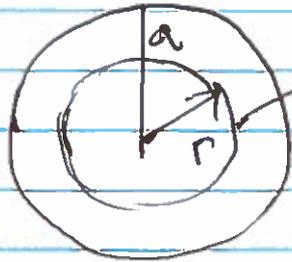
È un fatto geometrico:



$$F \propto \frac{1}{r^2}$$

massa ~~della~~ r^2
[nella stessa superficie solida]

SFERA OMOGENEA di RAGGIO a



$dm(r)$

massa di una
sfera cava (guscio)
di raggio r

$$M = \int_0^a dm(r)$$

massa totale della
sfera (nota: non tutti
i gusci hanno la stessa
massa - dip. da r)

Per ciascun guscio, la forza su un punto
di massa m è:

$$dF(dm) = \begin{cases} 0 & \text{per } R < r \\ -\frac{GMdm}{R^2} & \text{per } R > r \end{cases}$$

La forza complessiva è la somma (integrale)
su tutti i gusci concentrici:

$$F = \int_0^R dF(r) = -\frac{GM}{R^2} \int_0^R dm$$

Due casi a seconda che R sia interno
o esterno alla sfera

1) Punto esterno $R \geq a$

→ l'integrale si estende fino ad a
(poi $dm = 0$ per $R > a$)

$$F = - \int_0^a \frac{G M dm}{R^2} = - \frac{G M M}{R^2}$$

$$M = \int_0^a dm = \text{massa totale (anche se la sfera non è omogenea, perché ha densità variabile)}$$

- Sfera equivalente a punto materiale con tutta la massa concentrata nel centro → giustificata approx per pianeti e satelliti, corpi celesti

2) Punto interno alla sfera $r \leq a$

I gusci con $r > R$ non danno nessun contributo alla forza ($F = 0$ sui punti interni ad una sfera cava)

Solo la massa contenuta entro il raggio R contribuisce alla forza

$$F = - \frac{GM}{R^2} \int_0^R dm = - \frac{GM}{R^2} \int_0^R \rho 4\pi r^2 dr$$

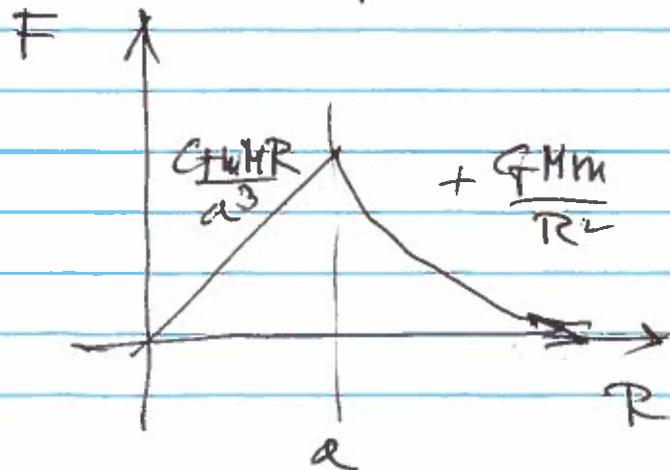
per una sfera omogenea $\rho = \frac{M}{V} = \frac{3M}{4\pi a^3}$

e' indipendente da r e puo' essere portato fuori dall'integrale:

$$F = - \frac{GM}{R^2} \rho \int_0^R 4\pi r^2 dr = - \frac{GM}{R^2} 4\pi \rho \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^R =$$

$$= - \frac{GM}{a^3} \frac{4\pi}{3} \rho a^3 \cdot R = - \frac{GMm}{a^3} R$$

→ La forza cresce linearmente con R fino a $R = a$ → F costante di tipo elastico



$$\frac{dE_p}{dr} = -F$$

$F_p \propto R^2$ all'interno
 $\propto \frac{1}{R}$ all'est

Es. classico (si trova nei libri) moto di un punto in un tunnel sottomarino che passa dal centro della terra -

$$F_s = -kR$$

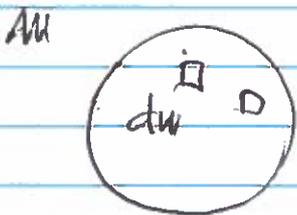
$$k = \frac{GMm}{a^3}$$

ma moto oscillatorio

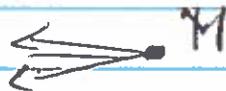
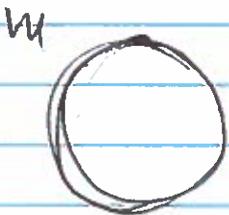
però è un caso che non esiste -

Ci sono applicazioni più interessanti (moti galileici) - ma prima -

- Generalizzazione ~~dei~~ due corpi esteri (sferici - omogenei) - Eg. Terra - MEA



1) Per ogni punto di massa dm il corpo M è equivalente a un punto nel centro.



2) L'azione di m sul punto di massa M è equivalente a un pto mat. nel centro di M .



$$F = - \frac{GMm}{R^2}$$

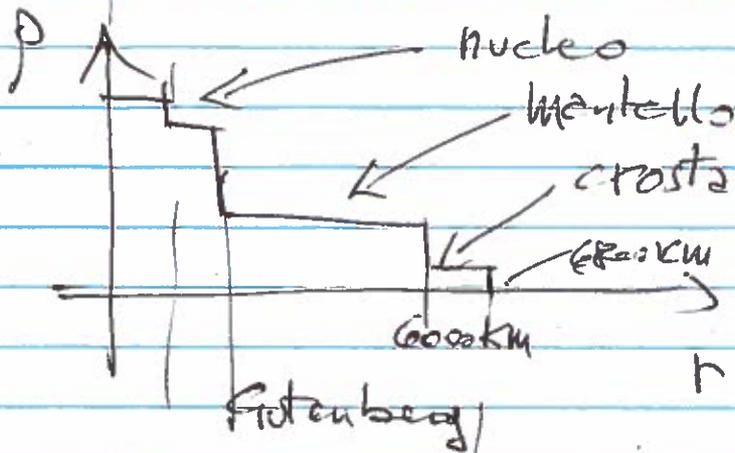
- È ragionevole assumere

$$g = \frac{GM_T}{R_T^2} \quad !!$$



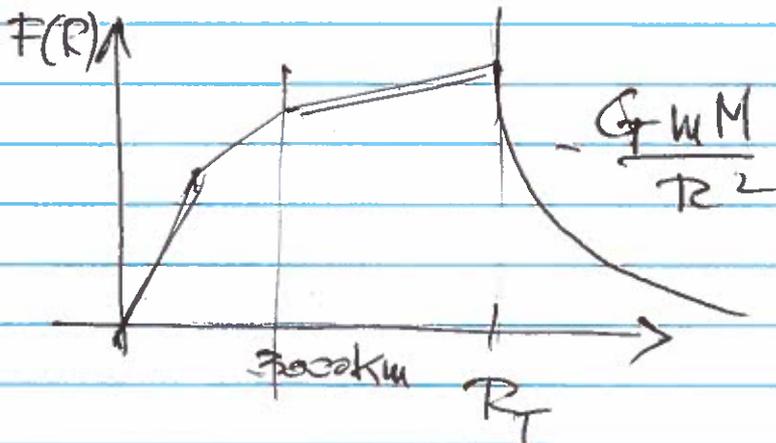
TERRA : sfera non omogenea

Profilo di densità variabile con r



- dall'ecografia del sodo (onde sismiche)

Richter



Per un punto esterno :

$$F(r) = - \frac{Gm}{r^2} \int_0^r dm$$

$$\text{con } M = \int_0^a dm$$

indipendentemente dalla distribuzione di massa all'interno (purché omogenea)

[→ cambia però il mom. di inerzia della terra]

Ricapitolando:

1) Leggi di Keplero \rightarrow legge di Forza

$$(*) \quad \vec{F} = - \frac{G m_1 m_2}{r^2} \hat{u}_r \quad \text{approx di pt}$$

mass con un punto
giro

2) Legge universale dimostrata ven anche per sistemi mutuamente interagenti con masse confrontabili (prob. dei due corpi)

$$F_{12} = - \frac{G M m}{r^2} \hat{u}_r \quad \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}, \quad M = m_1 + m_2$$

3) Per corpi esteri a simmetria sferica (soli, pianeti, corpi celesti), la legge (*) si valida con m_1, m_2 masse totale e r distanza tra i centri (geometrici \approx CM) dei corpi

4) Per corpi esteri anche di forma non sferica sulla linea \vec{F}_G sui punti sono tutte parallele

($R_T \gg$ dimensioni dei corpi)

Si è dimostrato che in ogni configurazione la forza peso agente sul ADM come se tutta la massa fosse in quel punto (1^a lezione sul corpo rigido)

Orbite nelle galassie (Applicazioni notevoli)

- Troviamo la relazione tra σ orbitale e il raggio dell'orbita per corpi orbitanti

- 1) - All'interno di una distribuzione di massa omogenea (es. galassie)
- 2) - All'esterno di una dist. di massa (es. pianeti nel sist. solare)

1) Per $R < R_0$ con R_0 raggio della distribuzione

$$\rightarrow F(R) = -\frac{GM M}{R_0^3} R \hat{u}_R \quad \text{mag di tipo elastico}$$

Condizioni per orbita circolare:

$$M \frac{\sigma^2}{R} = \frac{GM M R}{R_0^3}$$

$$\sigma^2 \propto R^2 \Rightarrow \boxed{\sigma \propto R}$$

La velocità è proporzionale al raggio dell'orbita - in altri termini la velocità angolare è identica per ogni orbita circolare!

$$\sigma = \omega R \quad \rightarrow$$

Un sistema di n tipo si dice COROTANTE
- tutti i corpi si muovono con ω comune
come se si trattasse di un corpo rigido

$\times \exists$ il moto che si osserva per le stelle
all'interno delle galassie

→ Le stelle si muovono all'interno
di una distribuzione di massa
omogenea

→ Osservazione gravitazionale consistente
(qualitativa) con distribuzione delle
stelle osservate (per emissione luminosa)

2) Velocità per $R > R_0$;

\times nelle galassie R_0 è definito dalle
stelle luminose - \times sono pochi pochi
corpi orbitanti nei bracci, molto
lontano dal raggio visibile della galassia

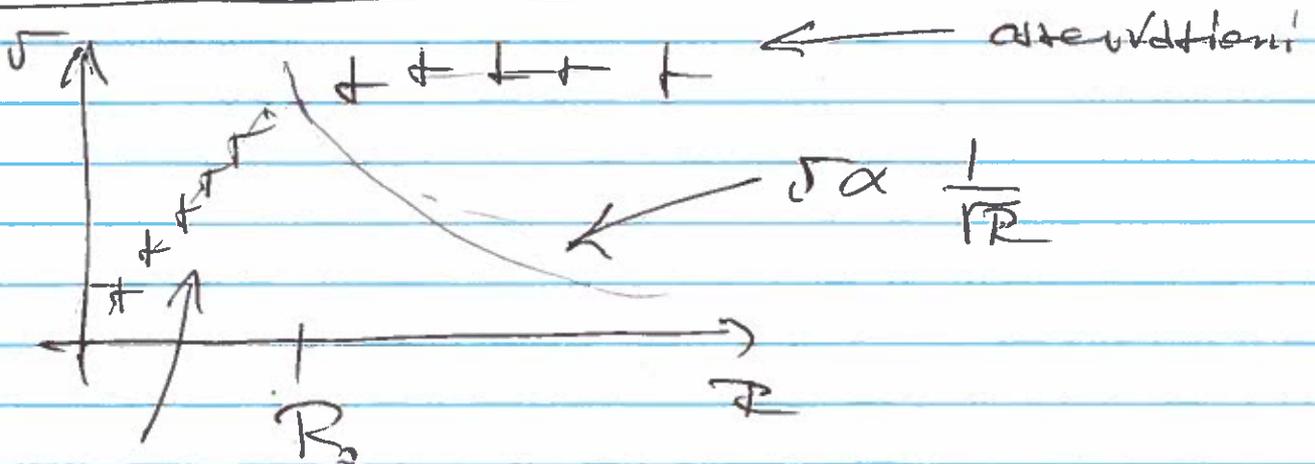
$$\frac{m v^2}{R} = \frac{GMm}{R^2} \Rightarrow v \propto \frac{1}{\sqrt{R}}$$

La velocità deve diminuire con la stessa
relazione che si osserva per le orbite di t_1
nel sistema solare (massa tutta concentrata
nel sole)

Galassie a spirale

- x Disco piatto con nucleo luminoso **costante** più alone sferico
- x si dice **raggio ottico** R_0 la distanza dal centro del disco in cui la luminosità diventa uguale alla luminosità del fondo cosmico (materia luminosa galattica indistinguibile dal fondo extragalattico)
- x ci si attende che per i pochi oggetti rivelabili (in banda radio, perché non sono visibili in banda ottica, per definizione) e $R > R_0$ la velocità scali come $v \propto 1/\sqrt{R}$

Risultati osservativi



Nucleo costante

$R > R_0$ $v \sim$ costante (prime osservazioni di Vera Rubin anni '60)

⇒ compatibili con distribuzioni di massa (non luminosa) che si estende oltre R_0

$$\frac{m v^2}{R} = \frac{G M M(R)}{R^2}$$

con $M(R)$ massa contenuta entro l'orbita di raggio R

$M(R) \propto R$ per $v \propto \text{cost}$

→ la massa continua a ~~per~~ crescere proporzionalmente a R

[Nota $M(R)$ cresce, ma la densità diminuisce, perché $M \propto R$, ma il volume cresce con R^3]

- queste masse, legate gravitazionalmente
⇒ non palpabili, non è visibile (non interagisce per via elettromagnetica)

⇒ MATERIA OSCURA

L'ipotesi di materia oscura è corroborata da altre osservazioni (cosmologiche e astronomiche)

La natura della materia oscura è ignota

Possibilita'

1) La legge di gravitazione (o la 2^a legge della dinamica) richiede una modifica.

→ modelli MOND (modified Newton dynamics) meno popolari dell'ipotesi Dark matter (meglio compatibile con alcune osservazioni) - ma non ancora completamente esclusa

2) La massa di oggetti non luminosi è sotto stimata (pianeti, gas, buchi neri)

3) Esiste una forma di materia (o ~~pa~~ corpo scalare) con proprietà di interazione ignote -

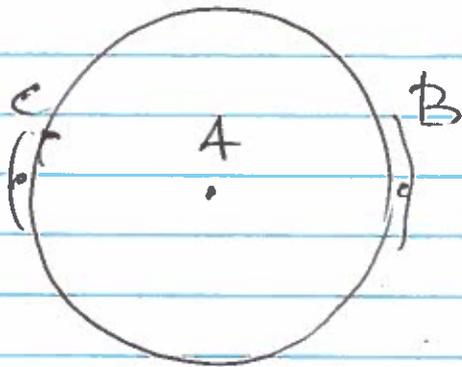
La ricerca di materia oscura "corpuscolare" è un fronte di ricerca vivace

* Ricerca indiretta: 1) Rincubi di particelle ordinarie (nucleoni/elettroni/nuclei) dovuti all'urto con particelle Dark Matter
→ Eventi rari: Lab. Gran Sasso

* 2) Segnali astroparticellari (esperimenti su satellite o Green Bank)

* Ricerca diretta: Produzione di Dark Matter a collider di particelle (LHC)

Esempio 4: Forze di MAREE



- Periodo osservato 12h associato al moto ^{apparente} della luna (periodo 24h)
 → Rotazione della Terra su se stessa

- Si osserva marea agli antipodi in coincidenza

Scomponiamo M_T in elementi di pari massa dm in A, B, C con A = centro

$$F_A = \frac{G m_L dm}{r^2} \quad \text{con } r^2 = \text{distanza Terra-luna}$$

$$F_{B,C} = \frac{G m_L dm}{(r \pm R_T)^2} = \frac{G m_L dm}{r^2 (1 \pm \frac{R_T}{r})^2} \approx \frac{G m_L dm}{r^2} \left(1 \mp 2 \frac{R_T}{r} \right)$$

La forza di attrazione lunare è un po' più (meno) intensa in B (C) rispetto ad A
 → i punti A, B, C "cadono" verso la luna con accelerazioni differenti

Le maree sono descritte nel rif. terrestre A rispetto al quale B e C sono soggetti all'attrazione lunare e a una

forza apparente dovuta al fatto che A non è in riferimento inerziale -

L'acc. di A verso la luna è

$$a_A = \frac{F_A}{dm}$$

= accelerazione del riferimento (non inerziale) terrestre: $a_T = Gm_L / r^2$

Le forze apparenti in B e C è

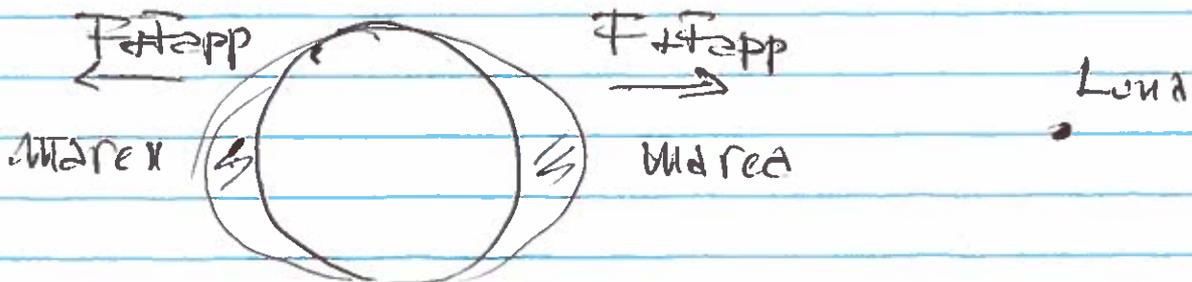
$$F_{app} = -dm a_A = -F_A$$

Nel riferimento di A dunque:

$$F'_{B,C} = F_{B,C} + F_{app} = F_A \left(1 \pm \frac{2R_T}{r} \right) - F_A$$

$$= \pm \frac{2R_T}{r} F_A = \pm 2 \frac{Gdm m_L R_T}{r^3}$$

La forza nel riferimento di A ha segno opposto in B e in C



Nota entrambi i punti sono tirati verso A dalla forza peso (gravitazione terrestre). Queste forze sono uguali e opposte sono presenti per ogni elemento di acqua. Non hanno ruolo nel determinare la differenza di innalzamento dei diversi punti

• Intensità della marea:

$$F' = \frac{\rho_m d m R_T}{r_L^3} \left(\frac{M_L}{r_L^3} \right)$$

- dipende dall'angolo inverso del seno della distanza
- È sensibile al "differentiale" della forza nei punti - la forza dipende di $1/r^2$, il diff. $d\left(\frac{1}{r^2}\right)$ è $\frac{1}{r^3}$

• Confronto Maree Lunare / Solare

- Le maree lunari sono circa 3 volte più intense delle maree solari

Rapporto delle forze di marea:

$$\frac{F_L}{F_S} = \frac{\rho_m d m R_T \left(\frac{M_L}{r_L^3} \right)}{\rho_s d m R_T \left(\frac{M_S}{r_S^3} \right)}$$

r_{LS} = raggi orbite
Lunare / Solare

$$= \frac{\rho_L \left(\frac{R_L}{r_L} \right)^3}{\rho_S \left(\frac{R_S}{r_S} \right)^3} \approx \frac{\rho_L}{\rho_S} \quad \text{rapporto di densità Luna/Sole}$$

$$\frac{R_L}{r_L} \approx \frac{R_S}{r_S}$$

→ l'angolo di apertura di Luna e Sole visto da Terra sono identici, come sappiamo dalle eclissi

