(1)

Lezione 2 : Gravitazione

- Leggi K $\longrightarrow$ legge della Forza

$$\vec{F} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\hat{u}_r \qquad (a)$$

Hp. usate : 1) rif. nel sole
2) masse puntiformi

$\longrightarrow$ Grav. universale : $F_{peso} = F_G$ (masse puntif.)

1) Il sole, né i pianeti sono SRI in senso stretto $\longrightarrow$ mutue int. reciproche

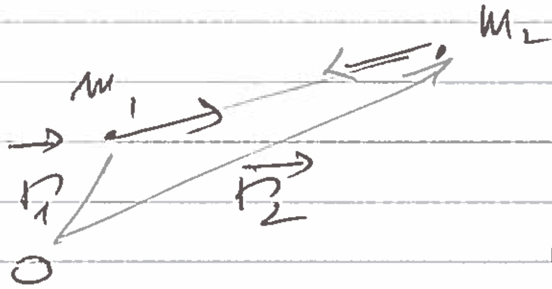
2) L'interazione non è tra punti materiali ma tra corpi estesi (= sist. continuo di punti) $\longrightarrow$ $\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i$

1+2) Approx. che vogliamo chiarire per capire se (a) descrive correttamente la struttura della forza

1) Problema dei due corpi
$\longrightarrow$ e conseguenze

2) Interazione tra corpi estesi

1) Problema dei due corpi



$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

Né m_1, né m_2 buon riferimento inerziale

Se $\vec{R}^{(E)} = 0$ il CdM è un buon riferim. (ed è inerziale) — Se ci sono altri corpi (sistema planetario = many body) la descrizione è approx. Poiché l'interazione Sole-pianeti è dominante, l'approx a due corpi è buona.

Dinamica di $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$ $\left(\begin{array}{l} \vec{F}_{12} = m_1 \vec{a}_1 \\ \vec{F}_{21} = m_2 \vec{a}_2 \end{array} \right)$

Sostituita da dinamica di

$$\begin{cases} \vec{r}_{CM} = \dfrac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} & \text{dipende solo da } \vec{R}^{(E)} \\ \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 & \text{dipende da } F_{12} \text{ e } F_{21} \end{cases}$$

~~Abbiamo~~ Dimostriamo:

$$\mu \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = - \frac{G m_1 m_2}{r^2} \vec{u}_r \qquad \text{con } \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

Forza centrale per massa ridotta

con centro delle forze nel CdM del sistema

Equazioni del moto per $\vec{r}$

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = \vec{a}_2 - \vec{a}_1$$

$$= \frac{\vec{F}_{12}}{m_2} - \frac{\vec{F}_{21}}{m_1} = \vec{F}\left(\frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_1}\right)$$

$$= \vec{F}\left(\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}\right)$$

Definiamo $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ massa ridotta

L'equazione trovata è $\mu \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}$

con $\vec{F} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\hat{u}_r$ oppure

$$\vec{F} = \frac{-G}{r^2}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(m_1 + m_2)\hat{u}_r$$

$$\boxed{\vec{F} = -G\frac{\mu M}{r^2}\hat{u}_r}$$

Forza centrale per punto materiale di massa μ

$\longrightarrow$ orbita Kepleriana per μ attorno al CdM (centro della forza)

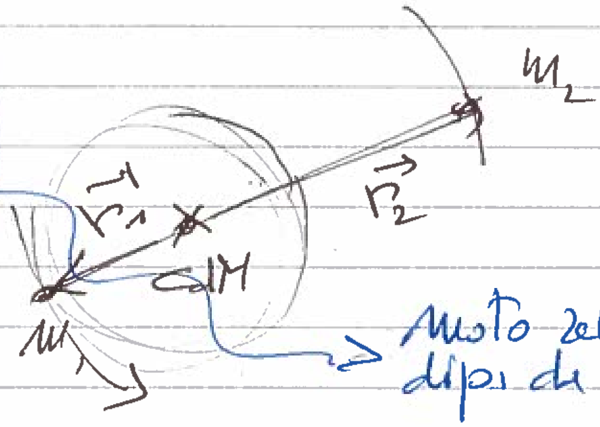
Problema dei due corpi = equivalente a problema con 1 pto materiale con F centrale

Risolto il moto per un pto materiale di massa ridotta μ, si trova il moto di m_1 e m_2 dalle eq. che legano $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$ a $\vec{r}_{CM}$ e $\vec{r}$:

$$\begin{cases} M\vec{r}_{CM} = m_2\vec{r}_2 + m_1\vec{r}_1 & (\times M) \\ m_1\vec{r} = m_1\vec{r}_2 - m_1\vec{r}_1 & (\times m_1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} M\vec{r}_{CM} + m_1\vec{r} = M\vec{r}_2 \\ M\vec{r}_{CM} - m_2\vec{r} = +M\vec{r}_1 \end{cases}$$ in modo analogo

$$\begin{cases} \vec{r}_1 = \vec{r}_{CM} - \frac{m_2}{M}\vec{r} \\ \vec{r}_2 = \vec{r}_{CM} + \frac{m_1}{M}\vec{r} \end{cases}$$



moto del CdM dipende da $\vec{R}^{(E)}$

moto relativo dipende da F interna

I pianeti orbitano attorno al CdM a distanze

$$\begin{cases} d_1 = \frac{m_2}{M} d \\ d_2 = \frac{m_1}{M} d \end{cases}$$

relativa ai corpi

~~Caso~~ La posizione del CdM e il moto dei corpi dipende dalla relazione tra le masse

Sta sulla congiungente

1) SOLE - PIANETI

$M \gg m_p$ ($m_p \simeq 10^{-6} M$ nel Sist. solare)

CdM : $\vec{r}_{cM} = \dfrac{M\vec{H} + m_p \vec{r}_p}{M + m_p} \simeq \vec{r}_s$

coincide con la posizione del sole

$\vec{r}_s = \vec{r}_{sp} \cdot \dfrac{m_p}{m_p + M_s} \simeq \cancel{r_{sp}}$ 0

$\vec{r}_p \simeq \vec{r}_{sp}$ ⟵ il pianeta orbita attorno al sole!

* Il Sole è un buon rif. inerziale e le leggi di Keplero non richiedono correzioni significative

2) TERRA LUNA : $m_L \simeq \dfrac{1}{80} m_T$ ($\simeq 1\%$)

$\vec{r}_{cM} = \dfrac{\vec{r}_T m_T + \vec{r}_L m_L}{m_T + m_L}$

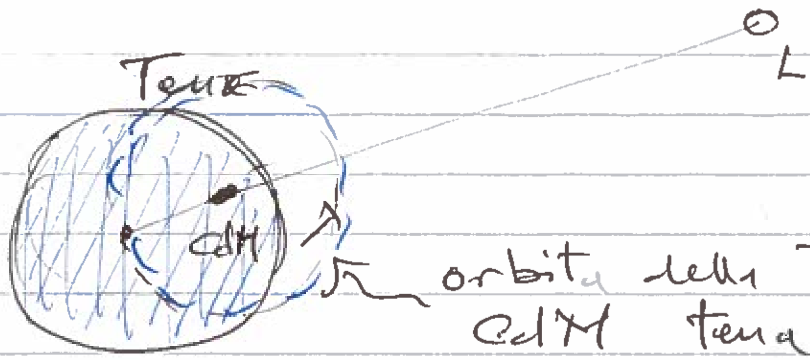
nel riferimento terrestre : $\vec{r}_T = 0$

$r_{cM} = \dfrac{m_L}{m_T + m_L} r_{TL} \simeq \dfrac{1}{80} r_{TL}$

D'altronde sappiamo che r_{TL} (distanza terra-luna) è 50 volte del raggio terrestre R_T

$r_{cM} = \dfrac{50}{80} R_T = \dfrac{5}{8} R_T \simeq 4700\ km$

3



orbita della Terra attorno al CdM terra-luna

Periodo di rotazione : $\longrightarrow$ moto ~~k~~eplerianno per corpo di massa ridotta μ

$$\mu \omega^2 r = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \equiv G \frac{\mu M}{r^2}$$

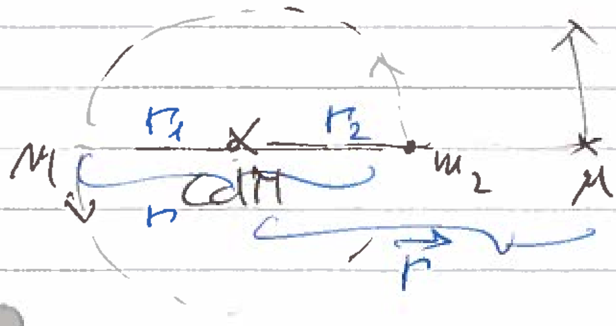
$$\frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{GM}{r^3} \rightsquigarrow T = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{r^3}{GM}\right]^{1/2}$$

se guardassimo la luna assumendo la terra SRI

$$\rightsquigarrow T = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{r^3}{G m_T}\right]^{1/2} = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{r^3}{GM}\right]^{1/2} \left[\frac{M}{m_T}\right]^{1/2}$$

correzione piccola

3) Stelle binarie $m_1 = m_2$ $\longrightarrow$ correzione imp.



$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{m}{2}$$

FORZA CENTRALE.

In ogni caso, l'analisi dinamica di un sistema di due corpi dimostra:

- Legge di forza - centrale
- Centro della forza = Centro di massa
- Nel caso di Gravità:

$$F(r) = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\hat{u}_r \equiv -G\frac{\mu M}{r^2}\hat{u}_r$$

[Sistema equivalente con μ ridotta]

Proprietà generali delle forze centrali:

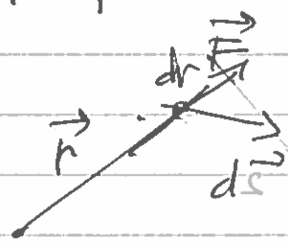
1) $\vec{L}$ conservato

PER OGNI FORZA CENTRALE:
- 2^ LEGGE DI K.
- ORBITE PIANE
(Parte delle 1^ LEGGE DI K. (**))

2) F è conservativa

$\longrightarrow$ il lavoro di F può essere espresso tramite energia potenziale

Dim. $\vec{F} = F(r)\hat{u}_r$



$$dW = F\hat{u}_r \cdot d\vec{s} = F(r)dr$$

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{s} = \int_A^B F(r)dr$$ dipende solo da r

(**) La forma dell'orbita (ellittica o altro) dipende della forza e dalle condizioni iniziali, come vedremo. Solo F = kr e F = k/r^2 hanno soluzioni con orbite chiuse

Dunque esiste funzione di r : $U = U(r)$
t.c.

$$\int_A^B F(r)\,dr = U(r_A) - U(r_B)$$

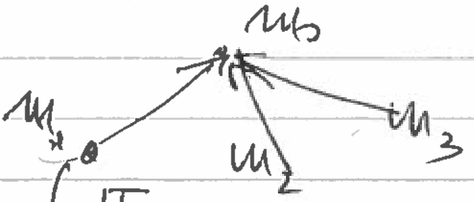
Usiamo qs. funzione per definire l'energia pot.

$$W_{AB} = -\left[E_p(r_B) - E_p(r_A)\right] = -\Delta E_p$$

L'espressione di E_p va calcolato in modo esplicito e partire dalla forza e calcolando il lavoro della forza

Nel caso generale per una distribuzione di masse, la forza agente su una massa m_0 è la <u>somma vettoriale</u> di tutte le forze:

$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i$



Al limite continuo $\int dF$

Il lavoro complessivo $W_{TOT} = \vec{F}_{TOT} \cdot \vec{ds}$
$= \left(\sum_i \vec{F}_i\right) \cdot \vec{ds}$

Poichè ciascun termine della somma descrive l'interazione tra due punti, che è una forza conservativa, la F di g. è conservativa per qualunque distribuzione di masse

→ È utile conoscere l'espressione dell'energia potenziale per masse puntiformi e poi sfruttarla per calcolare E_p con distribuzioni di massa più complesse

Ricordiamo inoltre che

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} E_p = -\left(\frac{\partial E_p}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial E_p}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial E_p}{\partial z}\hat{k}\right)$$

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i = \sum_i \vec{\nabla} E_p(i)$$

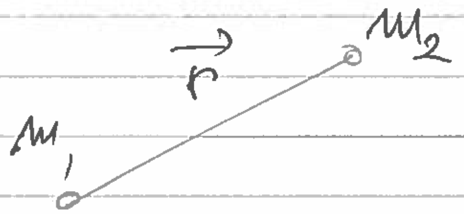
$$= \vec{\nabla}\left(\sum_i E_p(i)\right)$$

derivata è funzione lineare

cioè ← dalle $E_p(i)$ elementari possiamo costruire la somma delle energie pot. che è legata alla $\vec{F}$ risultante

⇝ $\boxed{\text{Le energie potenziali si sommano}}$

1) Energia potenziale (gravitazionale) per un sistema di 2 punti



$$F_{12} = -G\frac{m_1 m_2}{r_{12}^2}$$

La F è radiale → $\vec{F} = F\hat{u}_r \Rightarrow F = -\frac{dE_p}{dr}$

Si ricordi che $\frac{dx^{\alpha+1}}{dx} = (\alpha+1)x^{\alpha}$

$$W_{AB} = -\int_{r_A}^{r_B} \frac{G m_1 m_2}{r^2} dr$$

$$= -G m_1 m_2 \int_{r_A}^{r_B} \frac{dr}{r^2} = \left[\frac{G m_1 m_2}{r}\right]_{r_A}^{r_B}$$

$$= \frac{G m_1 m_2}{r_B} - \frac{G m_1 m_2}{r_A} = -\left(E_p(r_B) - E_p(r_A)\right)$$

$$E_p(r) = -\frac{G m_1 m_2}{r} + \text{cost}$$

Poichè la cost è arbitraria e le funzione è nulla a $r=\infty$, scegliamo cost $=0$ a $r=\infty$ per semplificare l'espressione:

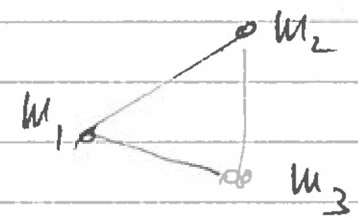
En. potenziale per <u>masse puntiformi</u>

$$E_p(r) = -\frac{G m_1 m_2}{r}$$

Nota: Rappresenta E_p di m_1 sotto l'azione di m_2 o altrimenti di m_2 sotto l'azione di m_1

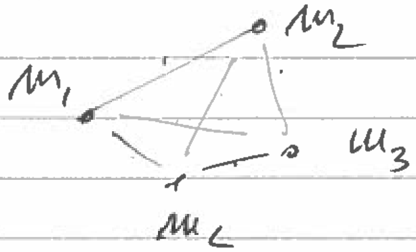
a) Non c'è E_p se c'è solo una massa
b) Non ci sono due termine, con due masse, ma un termine solo

N - masse :



$$E_p = -G\frac{m_1 m_2}{r_{12}} + \\ -G\frac{m_1 m_3}{r_{13}} + \\ -G\frac{m_2 m_3}{r_{23}}$$

→ tre termini : tre mutue interazioni



6 mutue interazioni ← (4 masse)

Caso generale : $E_p = -\sum_{i=1}^{N}\sum_{j>i} G\frac{m_i m_j}{r_{ij}}$

1	12			
2	13	23		
3	14	24	34	
⋮	⋮		⋮	
N-1	1N	2N	3N	(N-1)N

N-1 + N-2 + N-3 ... 1   ~~(N-1) termini~~ ~~(N-1) volte~~

→ Regola di Gauss : somma di N-1 ~~termini~~ interi : $\frac{N(N-1)}{2}$

↳ 1 + 2 + 3 + ... N-1 etc.

<u>Segno negativo di E_p</u> è conseguenza ~~in modo conf~~ della natura attrattiva della forza gravitazionale con direzione verso il <u>centro</u> della forza

Immaginiamo massa μ a $r = \infty$ da una massa M

$$E_p(\infty) = -\frac{G\mu M}{r}\bigg|_{r=\infty} = 0^-$$

Sotto l'azione della F di gravitazione il corpo si avvicina a M (dopo una piccola perturbazione che lo posti a r ~~...~~ un po' meno di ∞. (d'altronde $|F|$ è 0^+)

Durante lo spostamento $\vec{F} \parallel$ a $\vec{ds}$

$$\vec{ds} = \vec{r}_f - \vec{r}_1 < 0$$

$$\vec{F} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\hat{u}_r < 0$$

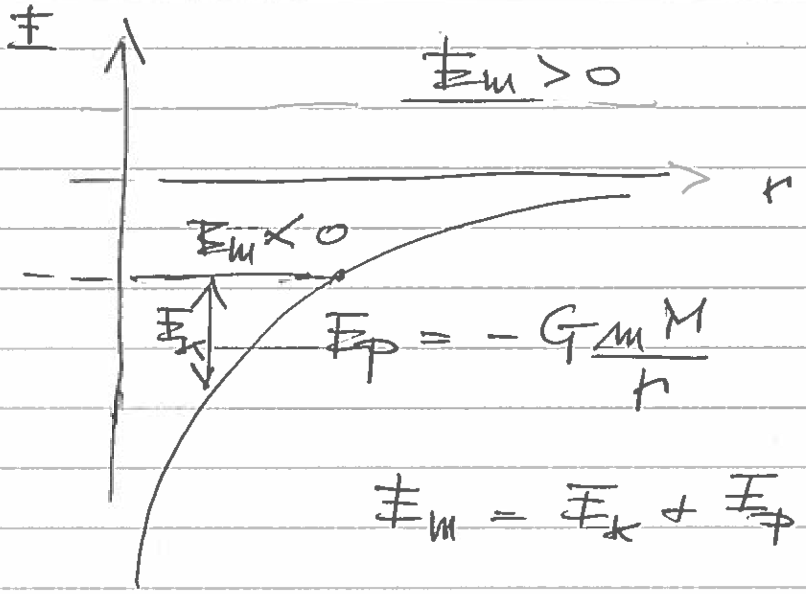
e il lavoro è positivo. Dunque $\Delta E_k > 0$
Poichè la forza è conservativa $E_m = cost$

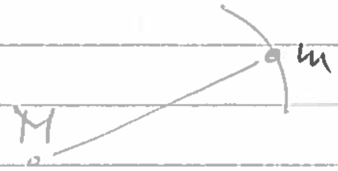
$$E_p + E_k = cost$$

Se $\Delta E_k > 0$, deve essere $\Delta E_p < 0$

coerentemente con il segno di E_p trovato

Grafici (qualitativi) di energia meccanica





m orbitante attorno a M fisso

$$E_m = E_k + E_p$$

$$E_k = E_m - E_p = E_m + G\frac{mM}{r} \geq 0$$

L'energia cinetica non può essere negativa $E_k = \frac{1}{2}mv^2$, dunque

1) - Se $E_m \geq 0$ l'orbita non è confinata (orbita aperta) poiché $E_k \geq 0$ per qualunque valore di r, anche $r = \infty$

2) Se $E_m < 0$ l'orbita è confinata entro un r_{max}:

$$\frac{GmM}{r_{max}} \geq -E_m$$

$$r \leq \frac{GmM}{|E_m|} \equiv r_{max}$$

Per $r = r_{max}$, $E_k = 0$

Esempi

Relazioni tra v e r su orbite per E_M = cost (senza immissione di lavoro)

$$E_M = \frac{1}{2} m v_1^2 - \frac{GmM}{r_1} = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{GmM}{r_2}$$

Da cui la relazione generale:

$$v_1^2 = v_2^2 + 2GM\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \quad (*)$$

— Casi notevoli:

1) Velocità di fuga da posizione di raggio r_1

- per fuga si intende che il corpo orbitante raggiunge distanza infinita, ove l'interazione con il corpo di massa M diventa nulla $\Longrightarrow r_2 = \infty$

- La minima velocità per cui ciò è possibile è detta velocità di fuga

Si realizza quando $r_2 = \infty$ è raggiunto a $v_2 = 0$ $(E_k(2) = 0)$

$$\Longrightarrow v_f^2 = \frac{2GM}{r_1}$$

Per la velocità di fuga dalla Terra:

$$v_f = \left[\frac{2GM}{R_T}\right]^{1/2} \qquad g = \frac{GM}{R_T^2}$$

$$= \left[2\, g R_T\right]^{1/2}$$

$$= \left[2 \cdot 9.8\, m/s^2 \cdot 6800 \times 10^3\, m\right]^{1/2}$$

$$\simeq 11\,000\ \cancel{Km}\ m/s$$

$\longrightarrow$ la velocità di fuga è indip. dalla massa dell'oggetto

$\longrightarrow$ L'energia cinetica da imprimere all'oggetto dipende dalla massa $E_f = \frac{1}{2} m v_f^2$

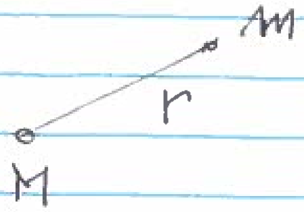
2) Relazione tra v_1 e v_2 e forza peso in prossimità della superficie terrestre:

$$r_1 = R_T + h_1 \quad ; \quad r_2 = R_T + h_2$$

$$v_1^2 = v_2^2 + 2GM\left(\frac{r_2 - r_1}{r_2 r_1}\right)$$

$$\simeq v_2^2 + \frac{2GM}{R_T^2}\left(h_2 - h_1\right) = v_2^2 + 2g\Delta h$$

Relazione tra E_p, E_k e E_M : orbita circolare



Condizioni per orbita circolare

$r = \text{cost} \implies \omega = \text{cost}$ (v. areale cost)

$$\cancel{m}\,\omega^2 r = \frac{G\cancel{m}M}{\cancel{r}^2} \qquad (*)$$

→ La massa del corpo orbitante non interviene nella ~~relazione~~ condizione di orbita circolare

→ Si può mantenere su un orbita di raggio r definito un corpo (satellite) di qualunque massa, purché gli si fornisca l'energia meccanica necessaria.

Dalla (*) $\implies \dfrac{v^2}{\cancel{r}} = \dfrac{GM}{r^{\cancel{2}}}$

$$E_K = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \frac{GM}{r} = -\frac{1}{2} E_p$$

L'energia cinetica su un'orbita circolare è $E_K = -\frac{1}{2} E_p$ e sono entrambe costanti del moto [$r = \text{cost}$, $v = \text{cost}$]
Nota: vero solo per orbita circolare, in generale $E_m = \text{cost}$, ma non E_p e E_K

Em per orbita circolare:

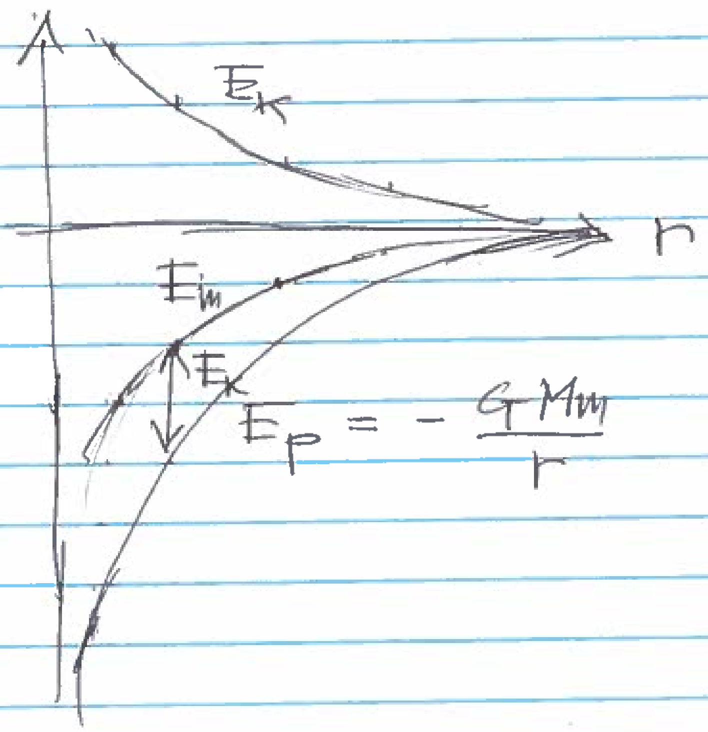
$$E_m = E_k + E_p = -\frac{1}{2}E_p + E_p$$
$$= \frac{1}{2}E_p = \frac{4}{2}$$

$$E_m = \frac{1}{2}E_p = -\frac{1}{2}\frac{GmM}{r} < 0$$ (orbita chiusa)

In somma:

$$E_k = -\frac{1}{2}E_p = \frac{1}{2}\frac{GmM}{r}$$

$$E_m = \frac{1}{2}E_p = -\frac{1}{2}\frac{GmM}{r}$$



orbita circolare

Nota: l'equazione (*) che definisce la condizione per orbita circolare è possibile per qualsiasi r, con determinata E_k, E_p e E_m. Una volta fissato r è determinato anche T. L'eq. (*) è la 3^ legge di Keplero (per il caso speciale di orb. circolare);

$$\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r = \frac{GM}{r^2} \iff T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} R^3$$

→ ORBITA TERRESTRE GEOSTAZIONARIA

$T = 1\ g = 84600\ s$

$R = 42000\ km$ (con E_k, E_p e E_m definiti)

→ CAMBIO DI ORBITA DI UN SATELLITE DA r_1 a r_2

Per modificare il raggio di un orbita serve immissione di lavoro (motori del satellite). Al variare di r cambiano E_k e E_p, la cui somma è E_m.

$$L_{ext} = \Delta E_k + \Delta E_p$$

[si ricordi che $\Delta E_k = L_{TOT} = L_{ext} - \Delta E_p$]

Dunque:

$$\cancel{A} \; L_{ext} = \Delta(E_k + E_p) = \Delta E_m$$

Per orbita circolare

$$E_k = -\frac{1}{2} E_p \qquad E_m = \frac{1}{2} E_p = -\frac{1}{2}\frac{GmM}{r}$$

quindi

$$L_{ext} = \Delta E_m = -\frac{1}{2} GmM \left(\frac{1}{r_f} - \frac{1}{r_i}\right)$$

$$= \frac{1}{2} GmM \left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_f}\right)$$

$L_{ext} > 0$ se $r_i < r_f$ allontanamento ~~rientro~~ da ~~verso~~ terra

$L_{ext} < 0$ se $r_f < r_i$ rientro verso terra

Per orbite non circolari E_m dipende dal semiasse maggiore, L controlla l'eccentricità
→ soluzione del moto orbitale Lez. 4.