

GRAVITAZIONE

Caso notevole di un sistema di punti materiali soggetti a mutua interazione riconducibile ad una forza fondamentale

(ossia "irriducibile", non descrivibile in termini di altre interazioni)

- Soluzione completa del moto nel caso di sistema a due corpi

Eq. cardinali:

$$\begin{cases} \vec{F} = m\vec{a} \\ \vec{L} = \frac{d\vec{L}}{dt} \end{cases}$$

rispetto al CM

→ 1) Determinazione della Legge di Forza del Moto (Newton)

→ 2) Descrizione completa dei moti orbitali dalla forza

[due modi usare $\vec{F} = m\vec{a}$, ...]

- Sistemi complessi (multi-corpi) risolvibili in modo appross. - Focalizziamo interesse su sistemi a due corpi (sole - pianeta, pianeta - satellite, stelle binarie, ...)

- Prima appross.: Moto di un pto materiale (pianeta) in un riferimento fisso (sole)

Alcune figure storiche nello sviluppo della cosmologia
eliocentrica -

1. ANASSIMANDRO DI MILETO (600 a.c.)

- x Terra "flottante" al centro dell'universo
(su osservazione del moto "apparente" delle
stelle $\rightarrow$ 1^a rivoluzione scientifica
dell'2 stella)

$\rightarrow$ Astronomia cinese non concepisce terra flottante

2. Scuole Pitagorica (500-400 a.c.) fino al 1600 d

- x Elicentrismo puramente filologico

3. Aristotele (380-330 a.c.)

- x Terra "logo naturale" $\rightarrow$ Terra

- x moti circolari di sfere celesti
(perfezione della sfera di Platone)

- x molto $\rightarrow$ problema dei moti relativi
che verrà risolto solo da Galileo

4. TOLOMEO (100-175 d.c.) $\rightarrow$ Almagesto (Al Mafisti)

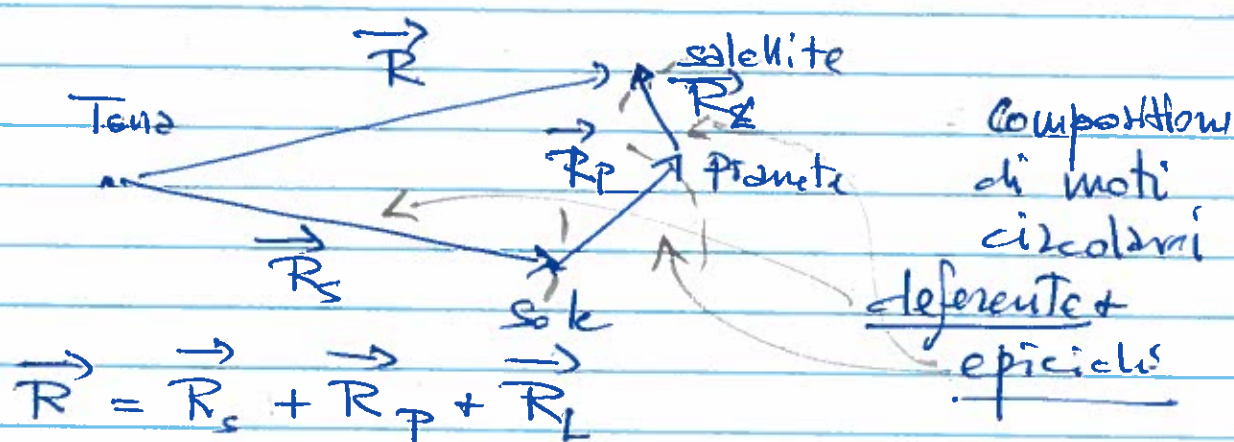
- x VARIAZIONI DI LUMINOSITÀ DEI PIANETI

$\rightarrow$ VARIAZIONI DI DISTANZA

$\rightarrow$ Epicicli (circolari) + deferente
 $\rightarrow$ Punto equante

Commento alla descrizione di Tolomeo
in chiave moderna -

- Teorema di Fourier (1700): tutte le funzioni periodiche sono rappresentabili come somma di un numero finito di sinusoidi elementari



In coordinate cartesiane riferite alla Terra

$$X(t) = X_s + X_p + X_L$$

$$y(t) = \dots$$

$$x(t) = R_s \cos(\omega_s t + \varphi_s) + R_p \cos(\omega_p t + \varphi_p) + R_L \cos(\omega_L t + \varphi_L)$$

$$y(t) = \dots$$

Alla luce del teorema di Fourier e di quello che abbiamo imparato sulla descrizione cinematica dei moti circolari il sistema tolemaico è esatto per costruzione. Però:

- * tutti i parametri sono liberi
- * non ha capacità predittiva di nuovi fenomeni (es. Mercurio e teoria Newton)

Fatto notevole:

- il periodo dei pianeti esterni lungo epiciclo e il periodo dell'epiciclo dei pianeti interni (riferiti al deferente con centro nel punto equante) è sempre lo stesso, per tutti i pianeti e pari al periodo di rivoluzione del sole attorno alla terra (1 anno)

→ è coincidente, dovuta al fatto che tutti i pianeti ruotano attorno al sole, era nota agli astronomi tolemaici, ma non ha suggerito ~~un sistema~~ la necessità del sistema elio-centrico

1543: COPERNICO - DE REVOLUTIONIBUS ORBIVM CAELESTIVM

2^a Rivoluzione scientifica

Contesto neoplatonico (rinascimentale)

→ recupero dei moti perfetti platonici attorno al sole

→ semplificazione descrittiva (non servono epicicli - ~~ecce~~to per la luna)

→ si eliminano complicazioni (punto equante)

+ rotazione terrestre (moto apparente stelle)

+ precessione dell'asse

+ sfere eccentriche (ahia! complicazioni)

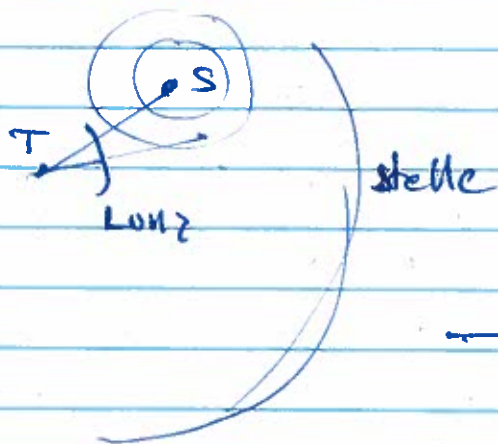
→ centro dell'universo è il punto equante dell'orbita terrestre

→ sistema "eliostatico" più che "eliocentrico"

Commento delle reazioni di Protestanti (immediata) e cattolici (1616, ma più violenta - risposte che accuse dei protestanti)

1600 TICO BRAHE: Astronomia osservazionale di precisione e ricatizzazione delle orbite dei pianeti secondo uno schema eliocentrico, ma con la terra come riferimento -

→ Sistema ticonico



- + Pianeti ruotano attorno a S
- + Luna e stelle ruotano attorno alla terra

parallasse
Assenza di ~~assenza~~
(di fatto non visibile
a occhio nudo)

⇒ Introduzione del concetto di ORBITA
discussione COPERNICO / TICOBRAHE su base osservazionale

1602-1618 KEPLERO

* Regolarità nei moti nel riferimento eliocentrico

⇒ Leggi di Keplero

1^a Legge: I pianeti descrivono orbite ellittiche di cui il sole è uno dei fuochi

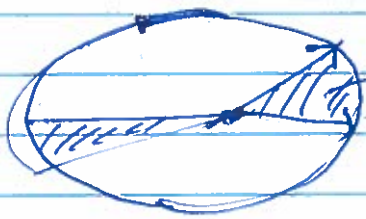
[$\Rightarrow$ il moto è piano!]

[orbite quasi circolari $b/a = 0.999$ Terra
0.96 Plutone]

2^a Legge:

2^a Legge) I pianeti spazzano aree uguali in tempi uguali (velocità areale è costante)

$\frac{dA}{dt} = \text{cost}$ per tutti i pianeti ma il valore della cost. dipende dal pianeta



$$\frac{dA}{dt} = \text{cost}$$

implica che ω e v_T non sono costanti

[nel sist. Tolemaico il punto eguante era il punto rispetto al quale $\omega = \text{cost}$]

3^a legge (1618 - dopo il lavoro di Galileo):

"Il quadrato del periodo di rivoluzione è proporzionale al cubo della distanza media sole - pianeta". Versione moderna:

$$T^2 = K_S a^3$$

a = semiasse maggiore
 K_S = identica per tutti i pianeti

1610 - GALILEO (Sidereus Nuncius)

+ Scoperta dei satelliti di Giove
(pianeti medicei)

⇒ Nel riferimento di Giove
valgono le leggi di Keplero -
in particolare $T^2 = K_T a^3$

Moltissimi + Fasi di Venere (→ moto attorno
al Sole, dunque)

+ Preparazione del parallasse
stellare (stelle puntiformi e molto
più lontane dell'ipotesi di Brahe)

⇒ leggi Keplero universali per sistemi
a due corpi (o un corpo orbitante
attorno a un altro corpo, nella
visione di allora)

→ Interpretazione dinamica dei moti
orbitali, stesso tipo di forza

“
..... e di chi vicle
sotto l'etereo padiglione rotante
più mondi, e il sole inadiarli immoto
onde all'Angelo, che tanta ala vi stete
sgombrò prima le vie del firmamento!”

x Interpretazione dinamica di Keplero (pre newtoniana)

x F sostiene la velocità (come per Aristotele)

x La terza legge suggerisce pianeti più veloci vicino al sole:

Approx circolare:

$$v = \frac{2\pi R}{T} \propto \frac{2\pi R}{R^{3/2}} \propto \frac{1}{R^{1/2}}$$



$\Rightarrow$ forza maggiore vicino al sole

x Interpretazione dinamica di Newton

$F \propto a_c \Rightarrow$ struttura della forza

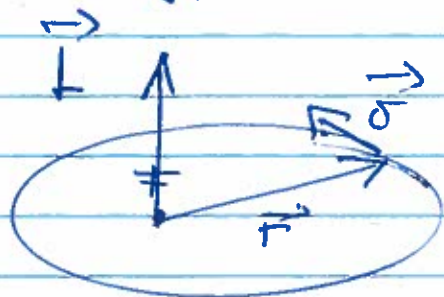
- Per ricavare la struttura della forza, Newton fa l'ipotesi di orbite circolari, per semplificare il problema.

- Non è una ipotesi necessaria.

- Mostriamo che la struttura della forza di gravitazione si può ricavare SENZA approssimazioni e SENZA PERDITA DI GENERALITÀ usando le tre leggi di Keplero

struttura vettoriale della Forza dalla 1^a e 2^a Legge di Keplero

1^a Legge: il moto è piano (ellittico)



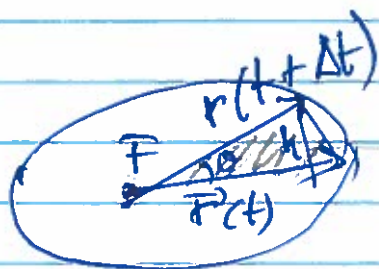
Polo nel Fuoco (ok)

$$\vec{L} = \vec{r} \times m \vec{v}$$

poiché $\vec{r}$ e $\vec{v}$ sono complanari e giacciono sempre nello stesso piano durante il moto, $\vec{L}$ ha direzione costante (ortogonale al piano del moto)

2^a Legge: velocità areale costante
 $\Rightarrow$ L costante in modulo

Dimostrazione:



Per Δt piccolo

$$\Delta A \approx \frac{1}{2} r(t) \cdot h$$

$$= \frac{1}{2} r(t) r(t+\Delta t) \sin \theta$$

Per Δt piccolo (θ piccolo) l'area del settore circolare coincide con l'area del triangolo

In forma vettoriale:

$$\Delta A = \frac{1}{2} \left| \vec{r}(t) \times \vec{r}(t + \Delta t) \right|$$

Perché $\vec{r}(t) \times \vec{r}(t) = 0$ ($\vec{r}$ è // a se stesso)

$$\Delta A = \frac{1}{2} \left| \vec{r}(t) \times [\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)] \right|$$

La velocità areale è la variazione infinitesimale dell'area dA , in un intervallo di tempo infinitesimo dt :

$$\frac{dA}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta A}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{2} \left| \vec{r}(t) \times \left[\frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} \right] \right|$$

definizione di $\vec{v}(t)$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} \left| \vec{r} \times \vec{v} \right| = \frac{1}{2m} \left| \vec{L} \right|$$

Dunque 1^a legge: $\vec{L}$ cost in direzione

2^a legge: $|\vec{L}|$ cost. in modulo

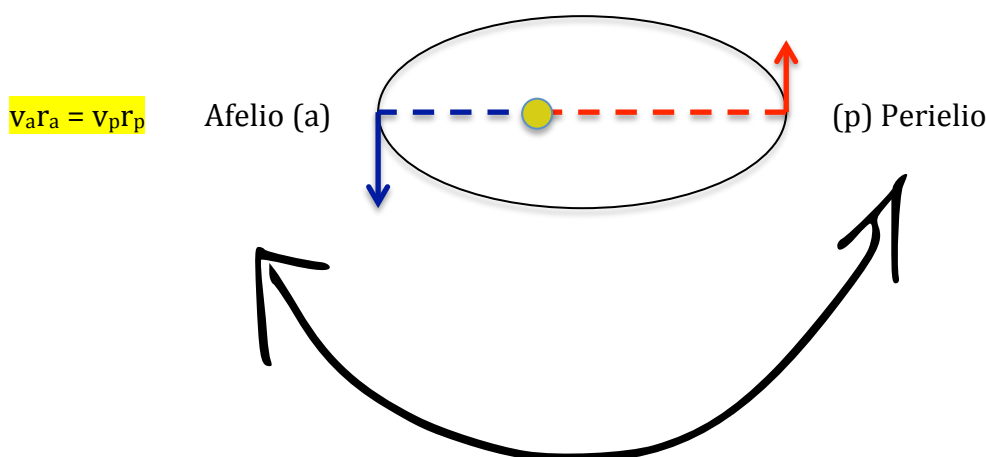
$\Rightarrow \vec{L}$ costante, riferito al fuoco
(e ke)

Relazione tra velocità orbitali e raggio vettore:

La conservazione del momento angolare permette di porre in relazione la velocità e il raggio vettore che individua la posizione del corpo orbitante (pianeta) a partire dal fuoco (sole) in due punti generici di una traiettoria:

$$L_1 = L_2 \implies mv_1 r_1 \sin \alpha_1 = mv_2 r_2 \sin \alpha_2 \implies v_1 r_1 \sin \alpha_1 = v_2 r_2 \sin \alpha_2$$

Al **perielio e all'afelio** la traiettoria è perpendicolare al raggio vettore, cioè la tangente alla traiettoria è perpendicolare all'asse maggiore dell'ellisse, che passa per i fuochi. Dunque all'afelio e al perielio **$\sin \alpha = 1$** e la relazione diventa più semplice:



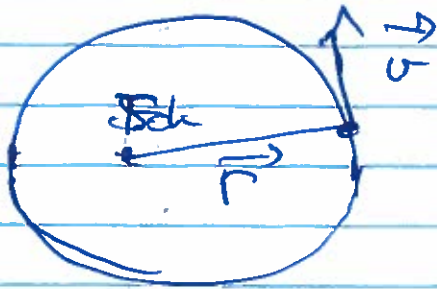
Errore di battitura, afelio e perielio sono invertiti nel disegno:

- AFELIO è il punto più lontano
da ἀπό (lontano) + ἥλιον (sole, acc.) contratto in ἀφῆλιον, perché la η è aspirata (non so rendere nella tastiera il simbolo dello spirito aspro)
- PERIELIO è il punto più vicino (περι)

Approfitto della mia svista per segnalare che nel greco antico e nel sanscrito le aspirate seguono, in casi più complessi, una legge fonetica nota come legge di Grassmann (o legge di dissimulazione dell'aspirata). L'esempio più famoso è nella declinazione di "capello" (θριξ, τριχος, ...).

Grassmann era un linguista e matematico tedesco, stimato dai suoi contemporanei soprattutto come linguista. Dei suoi lavori di matematica però, molto conosciuti, avrete forse già sentito parlare nel corso di Algebra Lineare.

Sfruttiamo il teorema del momento angolare con polo nel sole (fuoco)



$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{F}$$

con $\vec{F}$ forza agente sul pianeta

$$\vec{r} \times \vec{F} = \frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \quad (\vec{L} = \text{cost.})$$

Affinché $\vec{r} \times \vec{F} = 0$ in ogni punto dell'orbita (con $|\vec{F}| \neq 0$), deve essere:

$$\vec{F} \parallel \vec{r}$$

ossia: in ogni punto dell'orbita e per qualunque eccentricità la forza è sempre parallela a $\vec{r}$ ed è sempre rivolta verso il fuoco.

$\Rightarrow \vec{F}$ è una forza centrale con centro della forza nel fuoco dell'orbita (nel Sole)

$$\vec{F} = F(r) \hat{u}_r$$

$\hat{r}$ unitario del fuoco

La 1^a e 2^a legge di Keplero definiscono la struttura vettoriale della forza

Espressione di $F(r)$ dalla 3^a legge di Keplero per orbita circolare

- non si perde generalità, poiché:

a) Struttura di $\vec{F}$ trovata in modo indipendente dall'eccentricità: $\vec{F} = F(r)\hat{u}_r$ è vera anche per orbita circolare

b) La 3^a legge è ~~osservata~~ soddisfatta da tutte le orbite ellittiche osservate
→ Si assume "vera" (soddisfatta) da "tutte" le orbite ellittiche, e dunque anche per orbita circolare (ellisse di eccentricità nulla)

Nota: è diverso, e più forte, dal dire "approx circolare, perché tante le eccentricità sono piccole".

- Per orbita circolare: $v = \omega r$ e $\vec{v} \perp \vec{r}$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} |\vec{r} \times \vec{v}| = \frac{1}{2} \omega r^2$$

Per $r = \text{cost}$ (cerchio) $\Rightarrow \omega = \text{cost}$

La 2^a legge di Keplero richiede che il moto su un'orbita circolare abbia velocità angolare costante $\rightarrow$ moto circolare uniforme

Legge della forza: $F(R)$

→ moto circolare uniforme nel riferimento del sole (fuoco) assunto come riferimento inerziale (sole fisso)

$$F(R) = m_p \omega^2 R$$

m_p = massa del pianeta

$$= m_p \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 R$$

$$\omega = 2\pi / T$$

$$= \frac{(2\pi)^2}{T^2} \frac{m_p R}{R^3}$$

$$T^2 = k_s R^3$$

$$= \frac{4\pi^2}{k_s} \frac{m_p}{R^2} \quad (*)$$

Intensità della forza che il sole esercita sul pianeta; F_{sp} , scala con:

- m_p massa (inerziale) del pianeta
- $1/R^2$ inverso del quadrato della distanza

Per il principio di azione-reazione:

$$\vec{F}_{sp} = - \vec{F}_{ps}$$

Per scrivere una relazione (legge di forza) per F_{ps} analoga a (*) è necessario un processo di astrazione:

- * il pianeta non è fisso
- * il sole non descrive un'orbita di Keplero attorno al pianeta

NOTA: Il passaggio di astrazione necessario non è espresso in modo chiaro sul Mazzoldi et al., che prende un percorso speditivo non giustificato.

Il ragionamento corretto è questo:

- * I pianeti non sono solo corpi orbitanti (soggetti "passivi" dell'interazione con il sole), ma anche centri del moto orbitale dei propri satelliti, per i quali valgono ancora le tre leggi di Keplero
- * Seguendo lo stesso percorso, possiamo scrivere ad esempio per i satelliti di Giove (nel riferimento "inerziale" di Giove):

$$F_{G, \text{sat}} = \frac{4\pi^2}{K_G} \frac{m_{\text{sat}}}{R^2} \quad (**)$$

Dove K_G (dalla 3^a legge di K.) esprime l'intensità della forza dovuta a Giove, così come K_S ~~esprime~~ l'intensità ~~in (*)~~ esprime l'intensità dovuta al sole

(un corpo non è selettivo nella scelta su chi esercitare l'attrazione gravitazionale)

- Per astrazione si può assumere che per qualunque coppia di corpi valga una legge di forza con la struttura (*) o (**)

- Il moto orbitale e le sue caratteristiche non dipendono solo dalle forze, ma anche dalle condizioni iniziali

Per la coppia Sole - pianeta dunque valgono contemporaneamente -

$$F_{s,p} = \frac{4\pi^2}{K_s} \frac{m_p}{R^2}$$

$R = \text{distanza } S, P$

$$F_{p,s} = \frac{4\pi^2}{K_p} \frac{m_s}{R^2}$$

Dove la prima relazione discende direttamente dalle leggi di K. ; la seconda dal processo di astrazione descritto -

Per il principio di azione e reazione $|\vec{F}_{sp}| = |\vec{F}_{ps}|$

$$\Rightarrow K_p m_p = K_s m_s$$

Poichè questa relazione può essere scritta per tutti i pianeti, $K_p m_p$ è una costante universale

$$\gamma = K_p m_p = K_s m_s \Rightarrow \frac{1}{K_s} = \frac{m_s}{\gamma}$$

La costante è posta nella forma $G = \frac{1}{\gamma}$ e la legge di forza è:

$$\vec{F} = G \frac{m_s m_p}{R^2} \vec{u}_R$$

Legge di gravitazione universale di Newton

① non dipende dalle masse e dalla geometria (dell'orbita) ma caratterizza l'intensità dell'interazione gravitazionale -

In termini dimensionali

$$[G] = [F] L^{+2} M^{-2}$$

$$= M L T^{-2} L^{+2} M^{-2} = L^3 T^{-2} M^{-1}$$

$$G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$$

G misurato dall'esperimento di Cavendish - Prima di Cavendish, massa della terra non è nota indipendentemente da G $\rightarrow$ Verifiche con misure indipendenti da GM:

* Prima verifica sperimentale della legge di gravitazione

- Caduta libera sulla terra:

$$m g = \frac{G m_T m}{r_T^2} \Rightarrow g = \frac{G m_T}{r_T^2}$$

r_T^* - noto con precisione fin dall'antichità (ombra - Eratostene)

Tuttavia G e m_T non sono noti separatamente

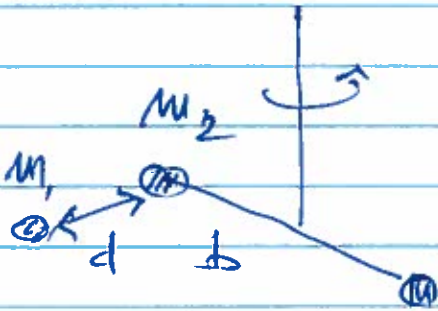
- Confronto con a_c della Luna

$$\cancel{m_L \omega_L^2 r_L^*} = \frac{G m_T m_L}{r_L^2} \leftarrow \text{dalla misura di } \omega_L \text{ (28 giorni)} \text{ e } r_L \text{ (parallelo iperco } \rightarrow \text{ CASSINI)}$$

Esperimento di Cavendish (1798):

"Pesatura" della Terra (M_T) tramite la misura diretta di G

- Bilancia di torsione per la misura di F_G tra due masse note



Filo elastico con momento torcente di richiamo
 $\tau = -k\vartheta$

- moto libero, oscillatorio:

$$\tau = I \alpha$$

$$-k\vartheta = I \frac{d^2\vartheta}{dt^2} \quad \longrightarrow \text{misura di } k$$

- Condizioni di equilibrio statico:

$$\vec{\tau}^E = \vec{\tau}$$

il momento esterno
bilancia il momento
di richiamo elastico

Nella configurazione in figura

$$\tau^E = F_G b \quad (\vec{d} \perp \vec{b})$$

$$\tau^E = G \frac{m_1 m_2}{d^2} b = k\vartheta \quad \leftarrow G \text{ dalla misura di tutti i parametri}$$

MASSA INERZIALE E GRAVITAZIONALE

$$F = G \frac{m_1 m_2}{d^2}$$

Forza gravitazionale legata ad una proprietà dei corpi proporzionale a m_I (la costante di prop. può essere asorbita in G)

$$\vec{F} = m \vec{a}$$

II legge dinamica
 $\Rightarrow$ massa inerziale

Nel ricavare la ~~relativa~~ legge di forza per la gravitazione si è assunto (implicitamente) che massa gravitazionale e inerziale coincidano in particolare:

$$F_{sp} = \frac{4\pi^2}{K_s} \frac{m_p^{inert.}}{r^2} = G \frac{m_s^{grav.} m_p^{inert.}}{r^2}$$
$$F_{ps} = \frac{m_s^{inert.} m_p^{grav.}}{r^2}$$

Per un corpo in caduta libera sulla terra:

$$m^I g = G \frac{m^G_s m^G_p}{r_T^2} \quad (I = inert., G = grav.)$$

$$g = \frac{G m_T^G}{r_T^2} \left(\frac{m_p^G}{m^I} \right)$$

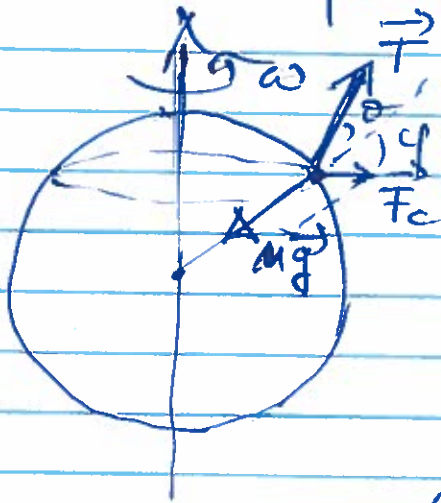
massa gravitazionale e inerziale due per lo meno proporzionali

Assorbendo la costante di prop. in G , si ~~potrebbe~~ può porre $m^G = m^I$

VERIFICHE SPERIMENTALI DI $m^I = m^G$

- Se il rapporto m^I/m^G dipendesse dai corpi e non fosse identico per tutti i materiali, dovrebbe essere possibile evidenziare la differenza tra m^I e m^G per via sperimentale.

Esempio: direzione del filo e piombo per diversi corpi



Equilibrio (nel rif. non inerziale)

$$\vec{T} + \vec{F}_c = \vec{P}$$

$\hookrightarrow$ forza centrifuga apparente

$$\vec{a}' = \vec{g} - \vec{a}_T - \cancel{\vec{a}_{centrif}}$$

$$(\vec{a}_{centrif} = 2\vec{\omega} \times \vec{v}' = 0) \text{ filo e Pb c'fillo}$$

$$\vec{P} = m^G \vec{g}$$

$\leftarrow$ massa gravitazionale

$$\vec{F}_c = m^I \omega^2 R \cos \varphi$$

$\leftarrow$ massa inerziale

Equilibrio lungo la direzione di $\vec{g}$ e nella direzione ortogonale:

$$T \cos \vartheta + m^I \omega^2 R \cos \varphi \cos \varphi = m^G g$$

$$T \sin \vartheta + m^I \omega^2 R \cos \varphi \sin \varphi = 0$$

$\rightarrow$

Da cui, isolando i termini con la tensione e facendo il rapporto:

$$\frac{mg \sin \theta}{\cos \theta} = \frac{m \omega^2 R \cos \theta \sin \theta}{m I \omega^2 R \cos^2 \theta - m g} \quad (*)$$

→ la direzione del filo è θ
per $\theta = 45^\circ$ (sensibilità max)
dipende dal rapporto $m I / m g$

L'esperimento viene condotto in modo differenziale controllando l'angolo tra un filo a Pb con massa fissa (RIFERIMENTO) e un filo a Pb con massa di materiali differenti

Fino ad oggi non è stata messa in evidenza nessuna differenza tra m_g e m_I (entro la precisione sperimentale)

Ulteriori verifiche della gravitazione (esperimento)

- 1) Fasi delle lune di Giove inconsistenti con Keplero → velocità delle lune finita (Esp. Romer) - confermata da esp. di Fizeau, etc.
- 2) Scoperta di Nettuno, delle anomalie orbitali di Urano
- 3) Precessione mercurio $\Rightarrow$ Rel. Generale