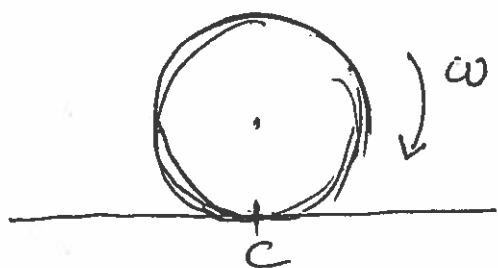


(7)

MOTO DI PURO ROTOLAMENTO

Caso interessante in cui l'asse di rotazione non è un asse materiale, con cerniere e supporti come negli esempi precedenti, ma un asse geometrico che si sposta parallelamente e e staro assieme al CR.

Cilindro (Ruota) rotola senza strisciare sotto l'azione di una forza esterna (esempio cuneo o lastra su piano inclinato) o di un momento.



- Rotazione attorno all'asse delle ruote (CH pu CR a simmetria cilindrica)

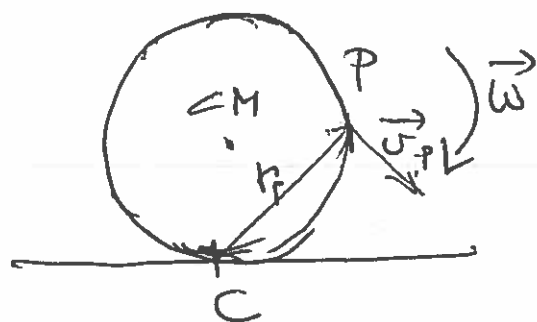
Nel puro rotolamento il pto di contatto C è fermo nell'istante t , per un intervallo infinitesimo dt. In un istante successivo il punto di contatto cambia, ma è ancora un punto fisso rispetto al piano:
 $\vec{v}_C = 0$ e $\vec{v}_{C'} = 0$ nei rispettivi istanti di contatto con il piano di riferimento.

→ L'asse geometrico trasla, ma il punto (linea) di contatto definisce un asse istantaneo di rotazione fino nel riferimento inerziale

(8)

Il moto di rotazione attorno a C ha velocità angolare $\vec{\omega}$ (indip. dall'asse per cui $\vec{\omega} \parallel$).

La velocità di ogni punto della ruota, riferita a C è: $\vec{v}_P = \vec{\omega} \times \vec{r}_P$



Poiché $\vec{\omega}$ è uscente nel foglio (verso come z per rotat. destrorsa) $\vec{v}_P$ è ortogonale a $\vec{r}_P$ e con verso dx nel disegno

Per il CM: $\vec{v}_{CM} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{CM}$ // al piano di rotolamento

$$\Rightarrow \boxed{v_{CM} = \omega r}$$

velocità di avanzamento del CM rispetto al rif. inerziale con r = raggio della ruota

Poiché r è ~~para~~ costante (definito dalle geom. del CR)

vale anche $\boxed{a_{CM} = \alpha r}$ per l'accelerazione lineare e angolare

$\Rightarrow$ Nel moto di puro rotolamento, il moto di rotazione attorno al CM e il moto di avanzamento del CM non sono indipendenti

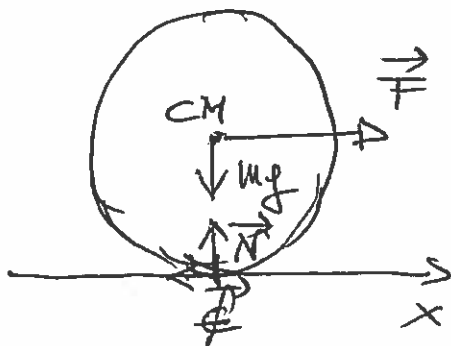
NOTA: ~~Attenzione~~ Il rotolamento avviene in virtù di una forza di attrito (statico!) applicata nel punto di contatto. In assenza di attrito il corpo rigido scivolerebbe sul piano con moto traslato ($\vec{v}_P = \vec{v}_{CM}$) per ogni punto.

Risolviamo il problema dinamico per due casi differenti: i) Forza esterna parallela al piano di rotolamento (viceso tirato, oppure ruote su piano inclinato), ii) Momento torcente assiale (es: ruote azionate da motore)

i) Forza esterna

Diagrammi delle forze

Eq. del moto:



$$1) \vec{F} + \vec{R} + m\vec{g} = m\vec{a}_{CM}$$

$\vec{R} \equiv$ reazioni vincolari: forza normale e forza di attrito

$$2) M_z = I_z \alpha$$

Scomposizione negli assi:

Asse x: $F - f = m a_{CM}$

Asse y: $N - mg = 0$

← non c'è accelerazioni nel piano verticale

Per il momento assiale possiamo scegliere il polo in due modi convenienti: nel CM o in C. La cinematica non dipende dalla scelta del polo, mentre M e L ne dipendono.

Polo in CM: $r f = I \alpha \equiv I \frac{a_{CM}}{r}$ (z1)

Polo in C: $r F = I_C \alpha = I_C \frac{a_{CM}}{r}$ (z2)

→ punto fisso (istant.), per cui $\tilde{r} = \frac{dL}{dt}$
 → punto materiale per cui $\tilde{r} = \frac{dL}{dt}$

Sappiamo, da prop. generali delle eq. cardinali, ⁽¹⁰⁾
 che la soluzione del problema dinamico è
 indipendente dalla scelta del polo - Infatti (Z1)
 e (Z2) sono la stessa eq. a meno di un termine
 determinato dalla 1^a eq. cardinale (teo. del C.M.) :
 Per verificarlo, sottraiamo (Z1) da (Z2) :

$$rF - rf = I_c \alpha - I \alpha$$

$$r(F - f) = (I_c - I) \alpha$$

$$r(F - f) = (I + mR^2 - I) \alpha$$

$$F - f = m \alpha r$$

$$F - f = m a_{cm} \quad \leftarrow \text{Nel moto di puro rotolamento lo eq.}$$

(Z1) e (Z2) differiscono solo per un termine che
 soddisfa l'eq. per il moto del C.M. - c.v.d.

Risolviamo il moto usando (Z2) - ~~2~~

$$\begin{cases} F - f = m a_{cm} \\ rF = (I_0 + m r^2) a_{cm} / r \end{cases}$$

Due equazioni e due incognite a_{cm} e f

(le incognite sono 2, perché le eq. sono accoppiate
 dalla condizione $a_{cm} = \alpha r$)

Dall'equazione angolare:

(11)

$$a_{cm} = \left(\frac{mr^2}{I + mr^2} \right) \frac{F}{m} \Rightarrow a_{cm} < \frac{F}{m}$$

L'ac. è sempre minore dell'ac. di un punto materiale - La forza oltre a spostare il c.d.m. mette in rotazione il sistema -

- Ruota :	$I = mr^2$	$a_{cm} = \frac{F}{2m}$
- Disco	$I = \frac{1}{2}mr^2$	$a_{cm} = \frac{2}{3} \frac{F}{m}$
- Sfera cava	$I = \frac{2}{3}mr^2$	$a_{cm} = \frac{3}{5} \frac{F}{m}$
- Sfera piena	$I = \frac{3}{5}mr^2$	$a_{cm} = \frac{5}{8} \frac{F}{m}$

— Per la forza di attrito:

$$f = F - ma_{cm} = \frac{I}{I + mr^2} F$$

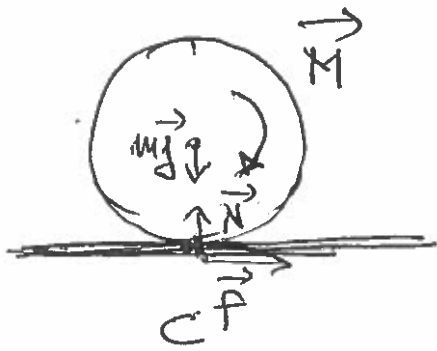
Le condizioni di puro rotolamento richiedono
 $f \leq \mu_s N$ - Ossia:

$$\begin{aligned} F &= \left(\frac{I + mr^2}{I} \right) f \leq \left(\frac{I + mr^2}{I} \right) \mu_s N \\ &\leq \left(\frac{I + mr^2}{I} \right) \mu_s mg \end{aligned}$$

Esiste una F_{max} al di sopra della quale il corpo scivola

ii) M torcente applicato all'asse delle ruote

(102)



In assenza di attrito la ruota scivolerebbe sul piano e non ci sarebbero forze esterne tali da determinare il moto di

eventualmente delle ruote -

La $\vec{f}$ di attrito deve dunque essere rivolta nello stesso verso del moto. Questo esempio chiarisce che l'espressione comune "l'attrito è sempre opposto al verso del moto" non è precisa. Una formulazione più precisa è: "l'attrito è opposto al verso di scorrimento tra le superfici di contatto". (espressione valida anche nel caso precedente) -

Eq. del moto

Asse x
Asse y
Moto di rotazione

$$\begin{cases} f = m a_{CM} \\ N - mg = 0 \\ M - rf = I \frac{a_{CM}}{r} \quad \text{Polo in CM} \end{cases}$$

oppure $M = I_C \frac{a_{CM}}{R} = (I + mr^2) \frac{a_{CM}}{r} \quad \text{Polo in C}$

$$\begin{cases} a_{CM} = \frac{Mr}{I + mr^2} \\ f = \frac{Mmr}{I + mr^2} \leq \mu_s mg \end{cases}$$

Caso generale, se $\vec{F}$ da $\vec{H} \Rightarrow$ il (13)
verso di $\vec{F}$ non è determinato a priori, ma va
ricercato dalle soluzioni del problema.

La forza può essere acceleratrice o frenante, ...

Rimanendo ai casi esemplificativi presentati, analizziamo il problema in termini di energie.

En. cinetica

* Teorema di König: en. cinetica nel riferimento
inertiale è la somma dell'en. cinetica di traslazione
del CM e dell'energia del moto relativo al CM.

$$E_k = \frac{1}{2} m v_{CM}^2 + \frac{1}{2} I \omega^2$$

* Possiamo esprimere E_k in riferimento al pto C. In
quel caso il moto è di pura rotazione, poiché
C è fisso rispetto al sistema inerziale:

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{1}{2} I_C \omega^2 = \frac{1}{2} (I + m r_{CM}^2) \omega^2 \quad (\text{H. Steiner}) \\ &= \frac{1}{2} I \omega^2 + \frac{1}{2} m (r \omega)^2 \quad (\omega = \dot{\varphi}) \end{aligned}$$

Qs. espressione coincide con quella del teorema
di König. L'en. cinetica è la medesima
per un asse parallelo all'asse di rotazione.

Si ricordi che, anche se E_k e ω dipendono dal
riferimento, il teorema dell'en. cinetica è sempre valido

Termini di lavoro e energia cinetica:

$$\Delta E_k = \Delta \left(\frac{1}{2} m v_{CM}^2 \right) + \Delta \left(\frac{1}{2} I \omega^2 \right)$$

$$= m v_{CM} \Delta v_{CM} + I \omega \Delta \omega$$

$$= m a_{CM} v_{CM} \Delta t + I \alpha \omega \Delta t$$

$$= F_{tot} \Delta s_{CM} + M_{tot} \Delta \phi$$

$$= W_F + W_M$$

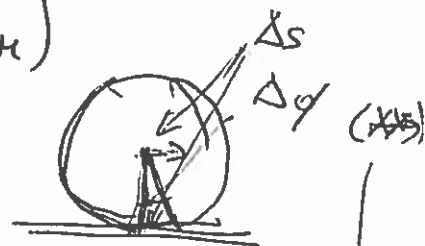
lavoro della
risultante di F_{ext}
(spost. del CM)

lavoro del
momento torcente
(rotazione angolare $\Delta \phi$)

Caso i) $F \parallel$ al piano di rotolamento

$$\Delta E_k = (F - f) \Delta s_{CM} + r f \Delta \phi$$

$$= F \Delta s_{CM} + f (r \Delta \phi - \Delta s_{CM})$$



* Puro rotolamento $r \Delta \phi = \Delta s_{CM}$

→ ΔE_k coincide con il lavoro di F , non
c'è dissipazione dovuta agli attriti (f non
lavora, C è punto fisso)

~~* $\Delta E_k = F \Delta s_{CM} + f (r \Delta \phi - \Delta s_{CM})$~~

(**) sappiamo che

$$v_{CM} = \omega r \quad \text{cioè}$$

$$\frac{\Delta s_{CM}}{\Delta t} = \frac{\Delta \phi}{\Delta t} r, \quad \text{perché}$$

***) Se $r\Delta\phi < \Delta S_{CH} \Rightarrow \Delta E_K < F\Delta S_{CH}$

c'è scivolamento e dissipazione di energia:
non tutto il lavoro di F si traduce in energia cinetica

****) $r\Delta\phi > \Delta S_{CH}$ non c'è rotolamento

più rapido dello spostamento (ruote che slittano senza eventamento). Questo caso si può realizzare solo con immissione di lavoro non incluso nell'analisi precedente (altrimenti si troverebbe $\Delta E_K > \text{lavoro immesso}$), tramite ~~una~~ momento torcente applicato all'albero motore

ii) Momento torcente assiale:

$$\begin{aligned}\Delta E_K &= f\Delta S_{CH} + (\tau - rf)\Delta\phi \\ &= \underbrace{\tau\Delta\phi}_{\text{lavoro del momento torcente motore}} + f(\Delta S_{CH} - r\Delta\phi)\end{aligned}$$

*) Puro rotolamento $\Delta S_{CH} = r\Delta\phi \Rightarrow \Delta E_K = \tau\Delta\phi$

**) $r\Delta\phi > \Delta S_{CH} \rightarrow \Delta E_K < \tau\Delta\phi$

energia dissipata, rotolamento delle ruote

CASI DI SPECIE

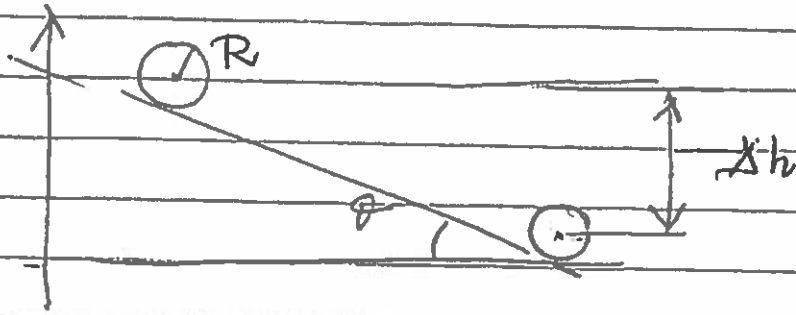
(1)

CP 4

DIMOSTRAZIONE EMPIRICA + ANALISI DELL'ENERGIA

Esempio: Puro rotolamento su piano
inclinato scabro

- Trovare J_f , per $J_i = 0$ e $\omega_i = 0$



Nel moto di puro rotolamento non c'è
dissipazione di energia ($\Delta S_{CH} = R \Delta \phi$)

E_m è conservato; $\Delta E_k = -\Delta E_p$

Risolvendo (*): $J_f = \left[\frac{2g\Delta h}{1 + k^2/R^2} \right]^2$

con k = raggio giratore del CP
definito da $I_z = \frac{1}{2} m k^2$

$\frac{k^2}{R^2} = 1$ anello; $\frac{1}{2}$ cilindro; $\frac{2}{3}$ sfera omogenea; $\frac{2}{5}$ sfera ecc.

(*) in modo esplicito $E_k = \frac{1}{2} m v_{CM}^2 + \frac{1}{2} I \omega^2$
 $= \frac{1}{2} m v_{CM}^2 + \frac{1}{2} m R^2 \left(\frac{k^2}{R^2} \right) \omega^2$
... ecc.

Si noti che
$$v_f = \left[\frac{2g\Delta h}{1 + \frac{k^2}{R^2}} \right]^{\frac{1}{2}} < [2g\Delta h]^{\frac{1}{2}}$$

- La velocità finale del CM è sempre minore di quella che si avrebbe su un piano perfettamente liscio
- Non c'è dissipazione di energia ma il lavoro dell'attrito forza peso è in parte trasferito al moto di traslazione e in parte al moto di rotazione
- La velocità finale del CM è tanto minore quanto maggiore è il momento di inerzia

Nota: ATTRITO VOLVENTE

- In realtà c'è dissipazione anche nel moto di puro rotolamento, perché il punto di contatto non è un punto ideale. Si può schematizzare l'attrito volvente immaginando che il punto di contatto non sia sulla verticale delle forze peso. In q.s. cas. la reazione normale sviluppa un momento volvente rispetto al punto di contatto $c = \tau_r = \delta R$ con δ distanza del punto di contatto dal δ è un parametro empirico

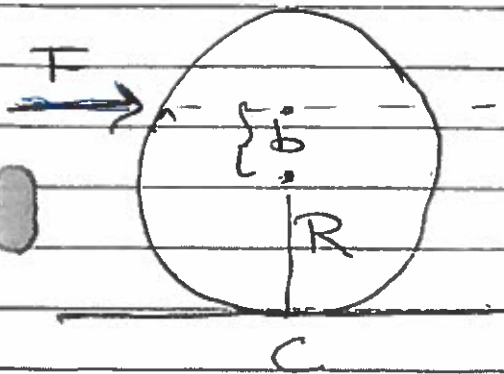
* DIMOSTRAZIONE EMPIRICA (2) + ANALISI DEL MOTO

● Esempio 2 : Strisciamento $\rightarrow$ Rotolamento

- * Lancio di un oggetto su piano scabro con $v_i \neq 0$ e $\omega_i = 0$
[a più in generale con $v_i \neq R\omega_i$, cioè moto iniziale non è di puro rotolamento]

* In questo caso la soluzione tramite la conservazione dell'energia meccanica non è possibile

- * L'esempio in discussione è un caso caratteristico che si verifica, ad esempio, quando un corpo appoggiato sopra una superficie scabra viene messo in moto da una forza impulsiva (es. palla da biliardo)



Forza impulsiva $\vec{F} \gg f, P$

$$\vec{J} = \int_0^T \vec{F} dt = \Delta \vec{P}$$

Momento impulsivo:

b = parametro di impatto

$$\vec{L} = \int_0^T \vec{r} \times \vec{F} dt$$

C , c.d.m. e punto su cui agisce $\vec{F}$

complanari (in un piano verticale)

$$= \vec{r} \times \int_0^T \vec{F} dt = \vec{r} \times \vec{J} = \Delta \vec{L}$$

perché $r = \text{cost}$ durante urto impulsivo

Prima dell'urto, sfera e riparo:

$$v_i = 0, \omega_i = 0 \Rightarrow p_i = 0; L_i = 0$$

Dopo l'urto: teorema dell'impulso e del momento dell'impulso:

$$(1) J = m v_f \quad v = v_{CM}$$

$$(2) \pm b J = I_{CM} \omega_f \quad \text{polo nel CM}$$

$+b > 0$ per urto sopra il CM, $\omega_f > 0$
 $-b < 0$ per urto sotto il CM, $\omega_f < 0$

Per urto centrale $b = 0$, $\omega_f = 0$ e il moto è di puro strisciamento

Altrimenti il corpo ruota, ma con velocità di rotazione t.c. in generale

$$R \omega_f \neq v_f \rightarrow \text{non è rotolamento puro}$$

In fatti, combinando (1) e (2)

$$b m v_f = I_{CM} \omega_f$$

La condizione di puro rotolamento ($v_f = \omega_f R$) si realizza solo se:

$$b = I_{CM} / m R$$

Nota: il risultato non dipende dalla scelta del polo (come sappiamo) -

Ad esempio, se scegliessimo il polo nel punto di contatto C, scriveremmo:

$$(1) J = m R^2 \omega_f$$

$$(2) (R \pm b) J = I_C \omega_f \quad \text{polo in C}$$

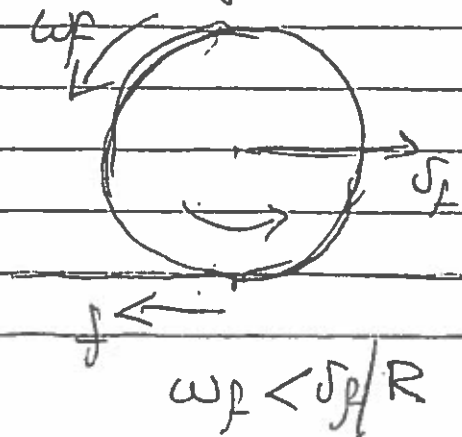
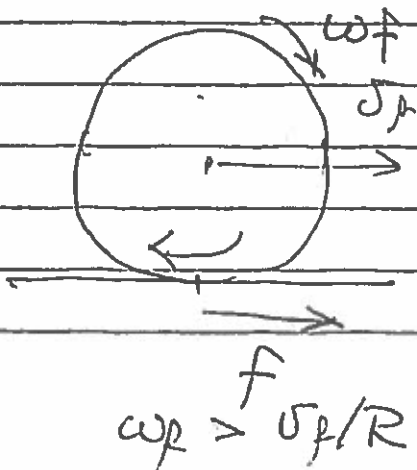
$$= (I_{CM} + m R^2) \omega_f \quad \text{teor. asse parallelo}$$

Utilizzando la (1), la (2) è evidentemente equivalente a $\pm b J = I_{CM} \omega_f$

$$\pm b m R^2 \omega_f = I_{CM} \omega_f \quad (\text{se } \omega_f = v_f / R)$$

Dunque, in generale con l'equazione di un punto con parametro di impatto $b = I_{CM} / m R$ il moto comporta strisciamento e dissipazione di energia per attrito.

A seconda che $\omega_f \geq v_f / R$ la forza di attrito agisce riducendo o aumentando il ~~moto~~ la velocità angolare



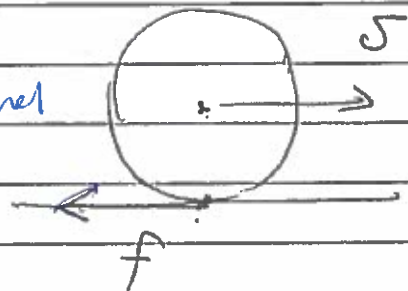
Il moto è descritto dalle equazioni cardinali per il corpo rigido, sotto l'azione della sola forza f (lungo l'asse x), poiché la forza impulsiva $F\delta$ agisce solo durante l'urto.

Consideriamo ad esempio il caso in cui $b = 0$, $\omega_0 = 0$ e $m\vec{v}_0 = \vec{J}$.

Eq. del moto (dopo l'urto):

$$\begin{cases} m a_{CM} = f \\ I \alpha = R f \end{cases}$$

→ Polo nel CM



C.I. $\omega_0 = 0$
 $m\vec{v}_0 = \vec{J}$

Non possiamo usare la condizione $\alpha = a_{CM}/R$ perché il moto non è di puro rotolamento.

La seconda equazione dice che il corpo ha accelerazione angolare costante e la velocità angolare cresce come

$$\omega(t) = \omega_0 + \frac{I}{Rf} t$$

Contemporaneamente il corpo decelera (1^a equazione)

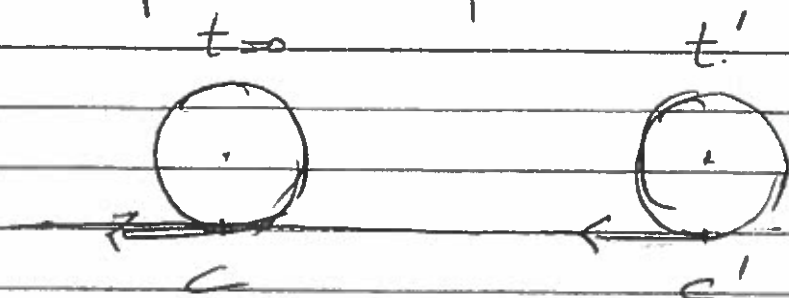
Quando $\omega(t)R = v(t)$ il moto diventa di puro rotolamento.

Quando $\omega(t)R = v(t)$ il moto diventa di puro rotolamento

[come possiamo vedere con un semplice esperimento $\rightarrow$ dimostrazione]

È possibile calcolare la velocità del corpo nelle condizioni di puro rotolamento
 senza conoscere la forza di attrito, ma
 ricorrendo alla CONSERVATIONE DEL
 MOMENTO ANGOLARE

* Poiché f è l'unica forza in gioco il momento torcente rispetto a un punto del piano è nullo:



$$\vec{L}_C = \vec{r}_C \times \vec{f} = 0 \quad \vec{L}_{C'} = \vec{r}_{C'} \times \vec{f} = 0 \quad (\vec{r}_{C'} \parallel \vec{f})$$

Dunque $\Delta L_C = 0$

All'inizio del moto: $\omega = 0$ $L_C(0) = m v_0 R (= R J)$
 Al tempo t : $\omega \neq 0$ $L_C(t) = m v R + I \omega$

con la condition $\omega R = v$

$$L_C = I_C \omega = I \omega + m R^2 \omega = I \omega + m v R$$

Donque :

$$m v_0 R = (m R^2 + I) \omega$$

$$v_0 = \left(1 + \frac{I}{m R^2} \right) v$$

Possono anche scrivere

$$v = v_0 \left[\frac{1}{1 + I/R^2} \right] < v_0$$

la velocità del CM diminuisce per due effetti -

- * Parte dell'energia cinetica è dissipata (f attrito)
- * Parte dell'energia cinetica di traslazione è trasformata in energia di rotazione

Quando $v = \omega R$ il moto prosegue con $v = \omega R$
→ l'attrito statico non compie lavoro

Calcoliamo in modo esplicito l'energia dissipata (il lavoro della forza di attrito)

$$L_{\text{attrito}} = \Delta E_K$$

$$= \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 - \frac{1}{2} m v_0^2$$

$$= \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} \frac{m k^2}{R^2} v^2 - \frac{1}{2} m v_0^2$$

$$= \frac{1}{2} m \left(1 + \frac{k^2}{R^2} \right) v^2 - \frac{1}{2} m v_0^2$$

Sappiamo che $v = \frac{v_0}{1 + k^2/R^2}$, dunque:

$$L_{\text{attrito}} = \frac{1}{2} m \left(\frac{1 + k^2/R^2}{1 + k^2/R^2} \right) v_0^2 - \frac{1}{2} m v_0^2$$

$$= \frac{1}{2} m v_0^2 \left(\frac{1}{1 + k^2/R^2} - 1 \right)$$

$$= - \frac{k^2/R^2}{1 + k^2/R^2} E_K(0) < 0$$

L'energia dissipata è maggiore, tanto maggiore è il raggio giratore

Per un anello $k = R \rightarrow$ metà dell'energia è dissipata prima di raggiungere la condizione di puro rotolamento

STATICA DEL CR

Le equazioni cardinali nel limite statico definiscono dei equazioni scalari

$$\vec{R} = 0, \quad \vec{L} = 0$$

Per la seconda equazione si può sempre sfruttare l'arbitrarietà della scelta del polo per semplificare il problema.

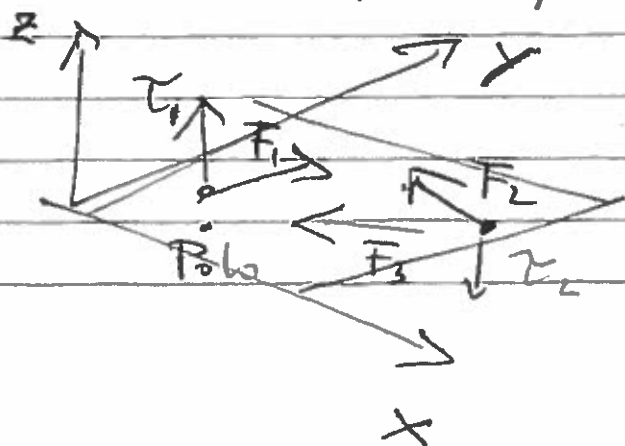
FORZE COMPLANARI - In una vasta classe di problemi si presentano forze complanari (che agiscono tutte nello stesso piano)

- In questa situazione le equazioni statiche da analizzare sono solo tre

- Scelto il piano XY come piano che contiene le forze e scelto un polo complanare (un polo che giaccia in XY), le relazioni:

$R_z = 0$; $L_x = 0$; $L_y = 0$
 conseguono in modo ovvio e le condizioni da valutare per l'equilibrio
 loro

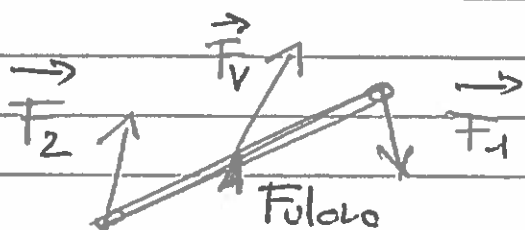
$$\begin{cases} R_x = 0 \\ R_y = 0 \\ L_z = 0 \end{cases}$$



LEVE:

Una semplificazione cattedore si ha nell'analisi della condizione di equilibrio delle LEVE

- LEVE: ^{CR} CARATTERIZZATO DA UN PUNTO FISSO DETTO FULCRO



$$\begin{aligned} \text{Eq.} \quad F_{1x} + F_{2x} + F_{vx} &= 0 \\ F_{1y} + F_{2y} + F_{vy} &= 0 \end{aligned}$$

Eq. delle leve $\rightarrow F_2 b_2 \sin \theta_2 + F_1 b_1 \sin \theta_1 = 0$

POLO NEL FULCRO: L'equazione per il momento torcente non contiene la forza delle reazioni vincolari

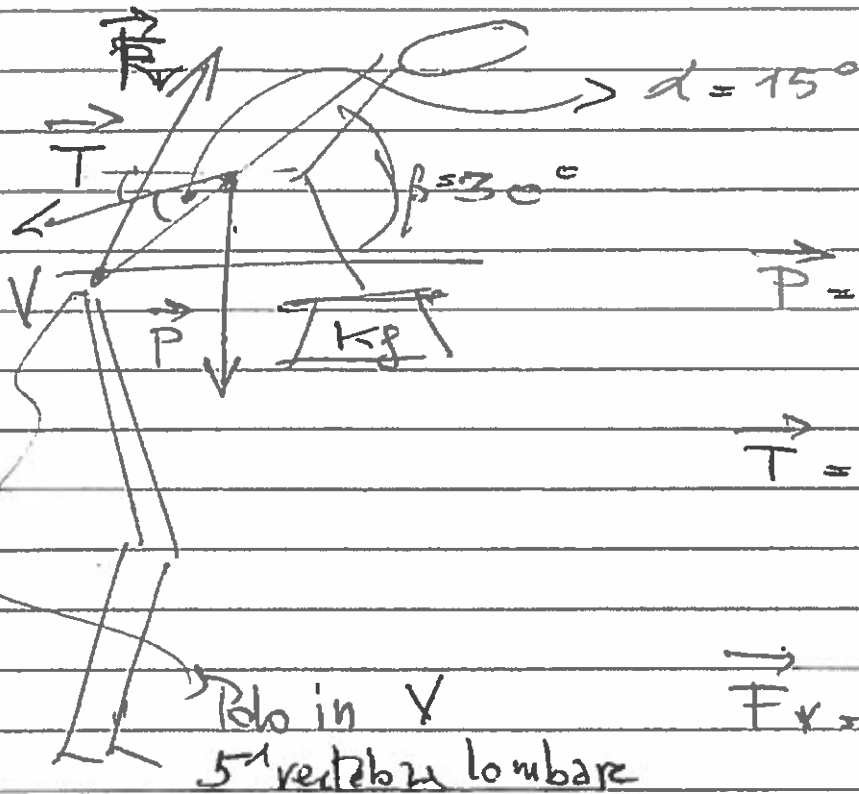
$\rightarrow$ Non occorre conoscere F_v per definire l'equilibrio di una leva.

$\rightarrow$ Ovviamente occorre conoscere F_v (dalle condizioni su R_x e R_y) per verificare se il fulcro può reggere il carico

- A seconda della disposizione di fulcro e delle forze (motrice e resistente) si ha una certa classificazione classica delle leve
- Non è interessante - l'analisi precedente contiene tutti gli elementi e la generalità necessaria

Esercizio : FORZE AGENTI SULLA SCHIENA

- si calcoli la reazione vincolare esercitata dalla 5^a vertebra lombare quando si solleva un corpo radichettando la schiena (vedi figura)



$\vec{P}$ = Peso del tronco + peso da sollevare

$\vec{T}$ = Tensione del muscolo scheletrico schiena (angolo d'azione $\alpha = 15^\circ$)

$\vec{F}_v$ = reazione vincolare (incognita)

Equilibrio:

$$\begin{cases} F_{vx} = T \cos(\beta - \alpha) & \text{asse } x \\ F_{vy} = T \sin(\beta - \alpha) + P & \text{asse } y \\ P \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = T \sin \alpha & \sum \tau = 0 \end{cases}$$

Si ricava T dalla terza e si sostituisce in 1) e 2) —

$$F_v = [F_{vx}^2 + F_{vy}^2]^{1/2} \approx 2P$$

→ White plastic dei dischi