

CR3: Esempi (di moto) notevoli del CR (1)

- moti con vincolo in un punto fisso
 - moti con vincolo in asse fisso
 - moti con asse fisso in traslazione
 - ~~moti~~ rot. con corpo rigido
 - statica del CR
-] → oggi
] prossima letta
] → oggi

Richiami di dinamica: Eq. sufficienti per la descrizione del moto:

$$\begin{cases} \vec{R}^E = M \vec{a}_{CM} = d\vec{P}_{CM}/dt \\ \vec{L}^E = \frac{dL}{dt} \quad (\text{con scelta opportuna del polo}) \end{cases}$$

Qs. due eq. sono in generale indep., ma in alcune situazioni - definite dalla presenza di vincoli non lo sono.
In generale il moto può essere scomposto in una traslazione (del CM) e una rotazione attorno ad un asse (istantaneo) fisso -

1) TRASLAZIONE PURA

Tutti i punti si muovono come il CM (a meno di un vettore posizione) -

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{1}{2} M v_{CM}^2 \\ \vec{L}_O &= \vec{r}_{CM} \times M \vec{v}_{CM} \end{aligned}$$

→ $L_{CM} = 0$: l'eq. del mom. angolare è banale nel CM e non è indep. da $\vec{R}^E = M \vec{a}_{CM}$ se il polo è in O

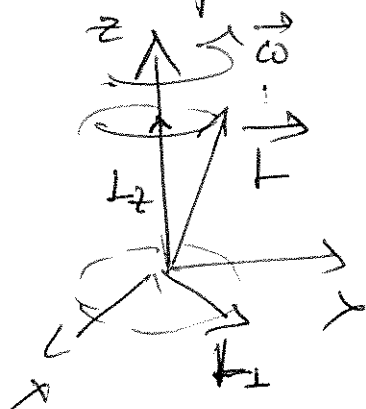
2) RRAF (istantaneo) - Asse Fisso

(2)

Conviene separare la comp. assiale della comp. trasvers.

$$\tau_z = \frac{dL_z}{dt}$$

$$\tau_{\perp} = \frac{dL_{\perp}}{dt}$$



- moto generico di precessione

2a) Se $\vec{L} \parallel \vec{\omega}$

Asse di rotazione coincide con l'asse di simmetria del CR

$$\vec{L} = L \hat{u}_z \quad L_{\perp} = 0 \quad \Rightarrow \quad \tau_{\perp} = 0$$

Si è visto che $\boxed{\dot{E}_p \text{ del moto è } \tau_z = I_z \alpha}$ con $\alpha = \frac{d\omega}{dt}$ e $I_z = \sum_i m_i R_i^2$ ($R_i = \text{distanza dall'asse}$)

2b) Se $\vec{L}$ non è $\parallel \vec{\omega}$ (come in figura)

$\tau_z = I_z \alpha$ definisce l'acc. angolare assiale

$$\tau_{\perp} = \frac{dL_{\perp}}{dt}$$

definisce le condizioni sui momenti affinché il moto avvenga attorno a quell'asse (restanti vincoli)

(3)

Nel moto di un pto materiale, si ha una situazione analoga quando il punto è vincolato a muoversi su una definita traiettoria al esempio da una guida. Si può scomporre $\vec{F} = m\vec{a}$ nelle comp. longitudinale e normale alla traiettoria:

$$\vec{v} = v \hat{u}_{\parallel} \Rightarrow \vec{a} = a_{\parallel} \hat{u}_{\parallel} + v \frac{d\hat{u}_{\perp}}{dt}$$

$$\begin{aligned} \text{Quindi } \vec{F}_{\parallel} &= m a_{\parallel} && \leftarrow \text{acc. longitudinale} \\ F_{\perp} &= m v^2 / r && \leftarrow \text{acc. centripeta (normale)} \\ &&& \text{dovuta al vincolo della guida} \end{aligned}$$

• Un esempio notevole per 2b) si ha per $\omega = \text{cost}$

$$\Rightarrow \alpha = 0 \quad \text{e} \quad \ddot{\varphi} = 0 \quad \text{e dunque } |\vec{L}| = \text{cost}$$

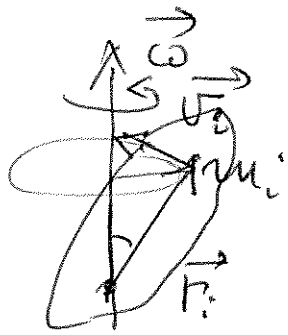
L'eq. del moto: $\vec{L} = \frac{d\vec{L}}{dt}$ è $\vec{L}_{\perp} = \frac{d\vec{L}_{\perp}}{dt}$
rappresenta un moto di precessione a $\omega = \text{cost}$,
che è rappresentabile tramite l'eq.

$$\vec{L} = \vec{\omega} \times \vec{L} \Rightarrow \dot{\vec{L}}_{\perp} = \vec{L}_{\perp} \omega$$

3) Nel caso di ptto fisso - conviene

- polo nel Pto fisso
 - Eq. di trasl. ($\vec{P} = M \vec{a}$) non è comodo per risolvere il moto, ma dà inform. sui vincoli
 - Eq. angolare dip. dalle condizioni iniziali
- $\vec{P}$

ENERGIA CINETICA NEL MOTO R.R.A.F. E LAVORO (4)



$$R_i = r_i' \sin \theta$$

ω = comune a tutti i punti

R_i = distanza dall'asse di rotazione

$$\begin{aligned} E_k &= \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\omega R_i)^2 = \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_i m_i R_i^2 \right) \omega^2 = \frac{1}{2} I \omega^2 \end{aligned}$$

La velocità di rotazione di un CR è indep. dal punto (asse) scelto per rappresentare il moto, ma la velocità del punto dip. dalla scelta;

$$\vec{v}_p = \vec{v}_o + \vec{\omega} \times \vec{OR}$$

Anche I dipende dalla scelta dell'asse - Troviamo la relazione tra E_k riferita all'asse di rotazione e quella riferita al CM, tramite il teorema dell'asse parallelo -

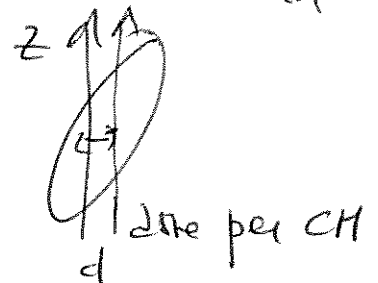
$$E_k = \frac{1}{2} I_z \omega^2 = \frac{1}{2} (I_{cm} + M d^2) \omega^2$$

$$= \frac{1}{2} I_{cm} \omega^2 + \frac{1}{2} M (\omega d)^2 =$$

$$= \frac{1}{2} I_{cm} \omega^2 + \frac{1}{2} M v_{cm}^2$$

Rot. attorno al CM

traslazione del CM



(5)

Si può ottenere lo stesso risultato del T. di Koenig per un moto di pura rotazione:

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{1}{2} M v_{cm}^2 + E_k' \\ &= \frac{1}{2} M v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I_{cm} \omega^2 \quad \text{con } v_{cm} = \omega d \end{aligned}$$

→ Attenzione alla scelta del polo e all'uso consistente dei termini - se I_{cm} serve il termine di traslazione, se I_z non serve -

— Lavoro di rotazione attorno ad un asse fisso

$$W = \Delta E_k = \frac{1}{2} I_z \omega_f^2 - \frac{1}{2} I_z \omega_i^2$$

$$dW = d\left(\frac{1}{2} I_z \omega^2\right) = I_z \omega d\omega$$

$$= \left(I_z \frac{d\omega}{dt}\right) \omega dt = \tau_z d\theta$$

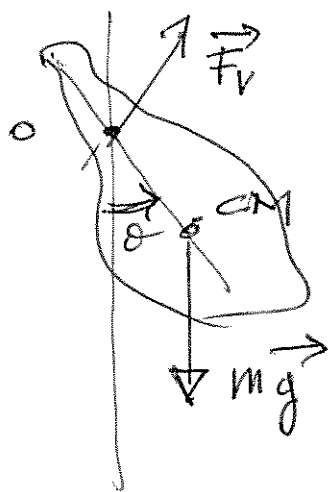
Il lavoro ~~è esprimibile~~ in un moto di rotazione e' esprimibile tramite il mom. della forza per lo spostamento angolare

Esempio: Il PENDOLO Fisico o PENDOLO COMPOSTO

6

RRAF

Moto del tipo 2b) con $\omega \neq \text{cost}$



- Corpo rigido vincolato a ruotare attorno a asse fisso orizzontale (in O) che non passa del CM - [O c'è la "traccia" dell'asse di rot.]
- L'asse non è asse di simmetria per il CR.

La reazione vincolare in O, garantisce che l'asse per O (e i punti del CR su quell'asse) sia fisso -

Il moto è puramente rotazionale attorno a O (RRAF) e per studiare il moto è sufficiente considerare

$$\boxed{\tau_z = -I_z \alpha} \quad \text{con polo nell'asse di rotazione}$$

$$\vec{\tau}_O = \vec{OO} \times \vec{F}_v = 0 \quad [\text{braccio nullo}]$$

$\Rightarrow$ Per l'eq. rotazionale attorno a O non occorre conoscere la reazione vincolare

$$\vec{\tau}_O^{\text{pes}} = \vec{r}_{\text{CM}} \times m\vec{g} = -mg r_{\text{CM}} \sin \theta \hat{u}_z$$

$\Rightarrow$ segno negativo perché gli angoli sono positivi per rotazioni antiorarie (convention) e per la regola della mano dx

Eq. del moto rotazionale -

(7)

$$-mg r_{cm} \sin \vartheta = \frac{I_z}{r} \frac{d^2 \vartheta}{dt^2}$$

$$\alpha = \frac{d^2 \vartheta}{dt^2} \text{ acc. angolare}$$

Nel limite di piccoli angoli ($\vartheta \leq 13^\circ$)

$$I_z \frac{d^2 \vartheta}{dt^2} + mg r_{cm} \vartheta = 0$$

Eq. del moto armonico

$$\frac{d^2 \vartheta}{dt^2} + \frac{mg r_{cm}}{I_z} \vartheta = 0$$

Soluzione oscillante: $\vartheta(t) = \vartheta_0 \cos(\Omega t + \varphi)$

$$\Omega^2 = \frac{mg r_{cm}}{I_z}$$

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = 2\pi \sqrt{\frac{I_z}{mg r_{cm}}} = 2\pi \sqrt{\frac{L_R}{g}}$$

Commentare la seconda Eq. (Teorema di CH)

con $L_R = \frac{I_z}{m r_{cm}} \equiv$ LUNGA RIDOTTA DEL PENDOLO

Corrisponde alla lunghezza del pendolo semplice

equivalente (cioè con lo stesso periodo di oscillazione)

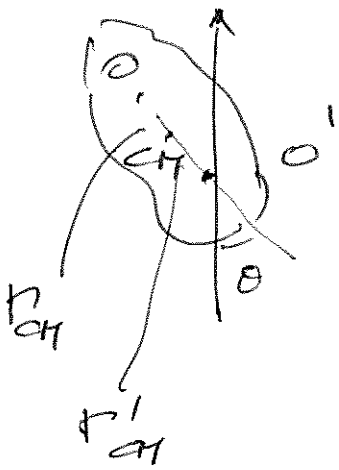
La misura di $\frac{I_z}{m r_{cm}}$ è molto complicata e comporta notevoli errori strumentali

PENDOLO DI KATER (REVERSIBILE) -

(8)

Nel pendolo di KATER si sfrutta una proprietà di simmetria del pendolo fisico per misurare g in modo molto accurato. Dalla misura del periodo T e di l_R del pendolo di Kater si realizzano misure accurate di g .

• Si fa oscillare il pendolo attorno a O e O' trovando i punti t.c. $T = T'$



$$\left. \begin{aligned} T &= 2\pi \sqrt{\frac{l_R}{g}} \\ T' &= 2\pi \sqrt{\frac{l_R'}{g}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow l_R = l_R'$$

D'altronde, dalla definizione del moto

$$l_R = \frac{I_Z}{m l_{CH}} \quad l_R' = \frac{I_Z'}{m l_{CH}'}$$

e dal teorema di Huygens - Steiner: $I_Z = I_{CH} + m l_{CH}^2$
e dunque:

$$l_R = \frac{I_{CH}}{m l_{CH}} + l_{CH} = \frac{I_{CH}}{m l_{CH}'} + l_{CH}' = l_R'$$

q.s. condizione è soddisfatta per $\frac{I_{CH}}{m l_{CH}} = l_{CH}'$

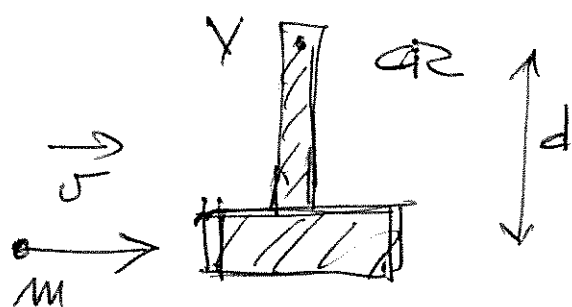
ovvero $\frac{I_{CH}}{m l_{CH}'} = l_{CH}$, che implicano:

$l_R = l_R' = l_{CH} + l_{CH}' = OO' \rightarrow$ Non occorre conoscere I
è sufficiente misurare la distanza OO'

Il PENDOLO BALISTICO Fisico

(9)

- Nell' studio dell' urto completamente anelastico con un pendolo balistico avevamo assunto un pendolo semplice e' trascurato la forza vincolare nel momento dell' urto -
- Nell' urto con corpi rigidi la reazione vincolare non e' trascurabile (non solo per urti anelastici, per tutti gli urti)



Il vincolo durante l'urto esercita una forza impulsiva che mantiene il punto fisso

⇒ Non si può supporre $\vec{R}^E = 0$ durante l'urto
e non si può assumere $\Delta \vec{P}_{cm} = 0$

Pero': Polo in $V' \Rightarrow \vec{\tau}_V = 0$

$\Rightarrow$ il momento delle forze esterne e' nullo durante l'urto, per un polo in V
 $\Rightarrow$ i momenti delle forze interne sono sempre nulli

$\Rightarrow$ Negli urti con un CR (vincolato) e' conservato il momento angolare rispetto a un polo nel vincolo

Note: Nell'urto con un CR libero il (10)
momento angolare è conservato rispetto ad
un polo qualsiasi - Ad esempio il CM -

Dunque si può analizzare l'urto chiedendo
 $\Delta \vec{L}_x = 0$ + Nel caso specifico

$$L_i = m \vec{v}_i d$$

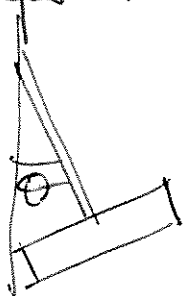
$$L_f = L_{\text{massa}} + L_{\text{pendolo}} \\ = m \vec{v}_f d + I_z \omega_f$$

Per un urto completam. anelastico, la massa
del proiettile si muove assieme al pendolo:

$$v_f = \omega_f d \quad \Rightarrow \quad L_f = m d^2 \omega_f + I_z \omega_f$$

Da $L_i = L_f$ si risolve per ω_f e si
può calcolare E_K^A

- Dopo l'urto Em. Meccanica si conserva



- Si può trovare la relazione
tra θ e E_K^A ponendo
 $E_p(\theta) = E_K^A$ -

Si dovrà fare attenzione a calcolare E_p guardando
le variazioni di quota del CM dopo l'urto -

In generale - URTO CON CR VINCOLATO

10/11

$$\Delta \vec{P}_{CH} = \vec{J}_V$$

← impulso della
forza nel vincolo

$$\Delta \vec{L}_V = 0$$

momento angolare con
polo nel vincolo si conserva

+ condizioni su $\vec{F}_K$ dalla descrizione
dell'urto (elastico, inelastico, ...)

— moto: è rotazione attorno a una linea nel vincolo

URTO CON CR "LIBERO"

$$\Delta \vec{P}_{CM} = 0$$

$$(\vec{R}^E = 0)$$

$$\Delta \vec{L} = 0$$

polo opportuno con $\vec{L} = 0$

— Per CR libero, o soggetto solo a F perp,
il CM è un polo rispetto al quale $\vec{L}_{CM} = 0$
e risulta una scelta ovvia per la
descrizione del moto - $\Delta \vec{L}_{CM} = 0$

— moto è rototraslazione

GIROSCOPIO : CR con punto fisso

(11)

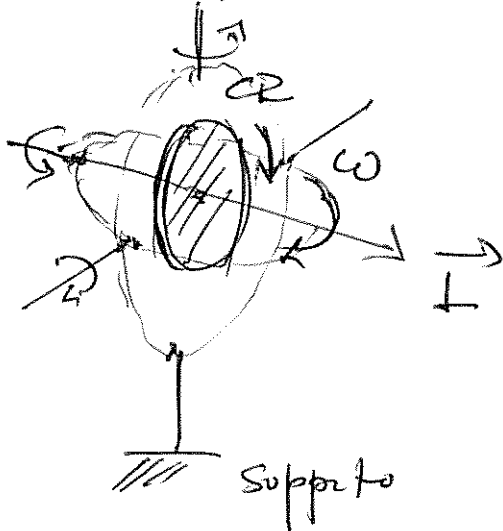
- Si può descrivere il moto come rotazione attorno al pto fisso $\rightarrow$ Rotazione attorno a un asse per il punto fisso + traslazione del CM (se occorre)

= l'eq. rilevante per il moto è $\vec{L} = \frac{d\vec{L}}{dt}$

- L'eq. del T. del CM (1^a eq. cardinale) può essere usata per determinare le reazioni vincolari (come nel caso dell'ane fisso)

Casi di specie

- 1) Pto fisso nel CM tramite sistema di giunti snodate - SENSORE DI DIREZIONE o GIROSCOPIO - Snodi liberi nei tre angoli -



(A) $\vec{R}^E = 0$ ($a_{CM} = 0$)
perché punto fisso

(B) $\vec{L}_{CM} = 0$ snodi liberi

$\Rightarrow \vec{L} = \vec{I}_z \vec{\omega}$ costrette

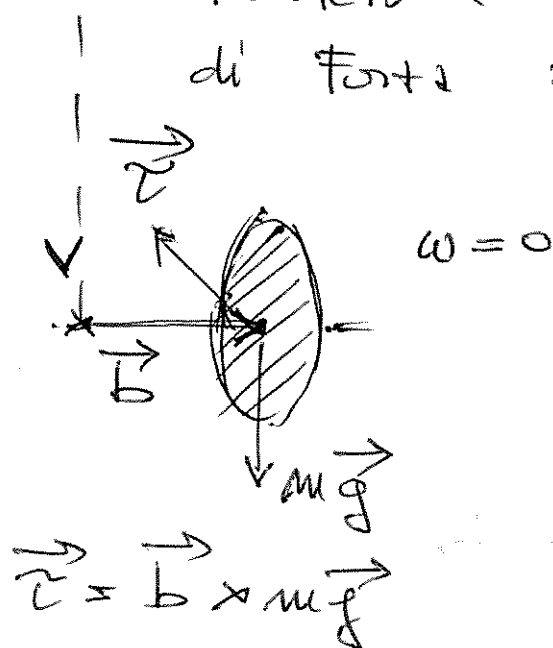
Orientazione

2) Moto di precessione

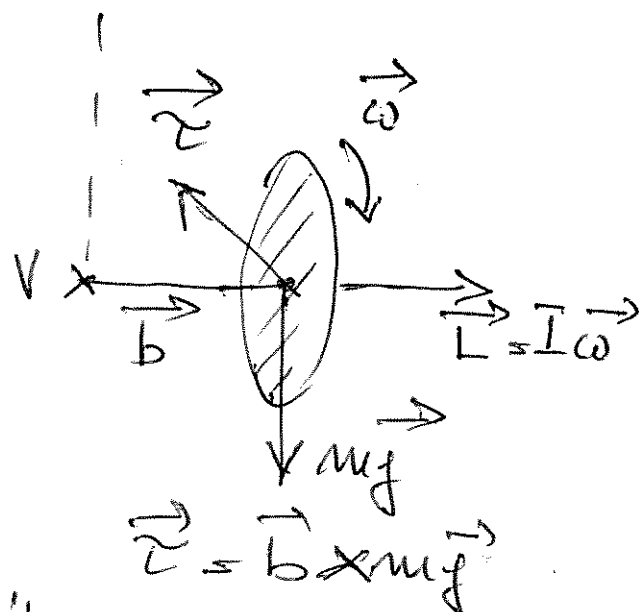
(12)

- Corpo a simmetria di rotazione in rotazione attorno al proprio asse di simmetria
- $\vec{L} \neq 0$ con polo nel punto fisso -

Esempio (dimostrazione pratica): Ruota o disco in rotazione attorno al proprio asse vincolato a un estremo e in presenza di forza peso -



Corpo cade, rotando attorno al vincolo



il corpo precessa attorno all'asse verticale

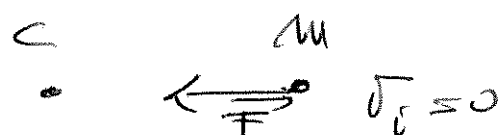
Nota: le eq. del moto sono le stesse nei due casi - Cambiano le condizioni iniziali

$$\begin{cases} \vec{F}_r - m\vec{g} = m\vec{a}_{cm} \\ \vec{L}_r = \frac{d\vec{L}}{dt} \end{cases}$$

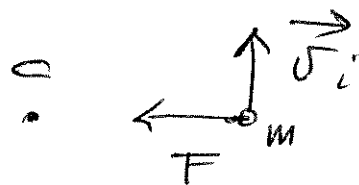
← intrinseco per il moto

* La dipendenza del moto dalle condizioni iniziali non deve sorprendere (anche se il comportamento non è intuitivo) (13)

- Analogia: Forza centrale su punto materiale di massa m (C = centro della forza)



"Caduta" di m verso C



$F = m v_c^2 / r$
moto circolare unif.

L'equazione dinamica è sempre: $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ (*)

Nel moto circolare, $\vec{F}$ si mantiene sempre $\perp$ a $\vec{p}$. Cambiano entrambi in direzione, ma non in modulo.

$$\Rightarrow d\vec{p} \text{ è } \parallel \text{ a } \vec{F} \nparallel \vec{p}$$

Nel caso in esame, l'equazione vettoriale

$$\vec{\tau}_v = \frac{d\vec{L}_v}{dt} \text{ è identica a (*)}$$

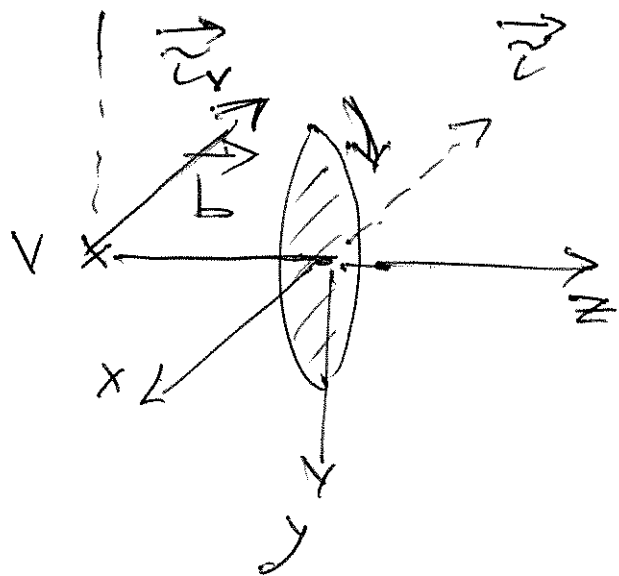
$$\text{con } \vec{\tau}_v \Leftrightarrow \vec{F}$$

$$\frac{d\vec{L}_v}{dt} \Leftrightarrow \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$\Rightarrow$

Ci si aspetta una soluzione analoga -
 $\vec{\tau}_v$ e $\vec{L}$ cambiano solo direzione mantenendo L

Analizziamo in modo esplicito le direzioni (14)
dei vettori:



$$\vec{L} = I_z \omega \hat{u}_z$$

$$\vec{L} = b \hat{u}_z \times m g \hat{u}_y \\ = -m g b \hat{u}_x$$

(ricorda $\hat{u}_y \times \hat{u}_z = -\hat{u}_z \times \hat{u}_y = \hat{u}_x$)

1) Per $\omega = 0$ $L = 0$, il momento
torcente diretto come $-\hat{u}_x$ determina la
rotazione dell'asse della ruota nel piano
verticale attorno a V ~~secondo~~
intuitivo

2) Per $\omega \neq 0$ $L \neq 0$ $\vec{L} = I \omega \hat{u}_z$

Eq. del moto: $\vec{L} = \frac{d\vec{L}}{dt}$

$$\vec{L} = I_z \dot{\omega} \hat{u}_z + I_\perp \dot{\omega} \hat{u}_\perp = 0 + m g b \hat{u}_x$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(I \omega \hat{u}_z) = \left(I \frac{d\omega}{dt} \right) \hat{u}_z + I \omega \frac{d\hat{u}_z}{dt}$$

* Polchi' $\tau_z = 0$ $\quad \bar{I}_z \frac{d\omega}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \omega = \text{cost}$ (15)

- Eq. assiale determina acc. angolare, come sappiamo

* Eq. nella componente trasversa:

$$-mgb = L_z \frac{d\phi}{dt}$$

$$-mgb = I\omega \left(\frac{d\phi}{dt} \right)$$

→ Precessione attorno al vincolo con velocità angolare

$$\Omega = \frac{d\phi}{dt} = \frac{mgb}{I\omega} \quad \left(\begin{array}{l} \text{inversamente} \\ \text{prop. a } \omega \end{array} \right)$$

Il verso di $\vec{\Omega}$ dipende dal verso di $\vec{\omega}$

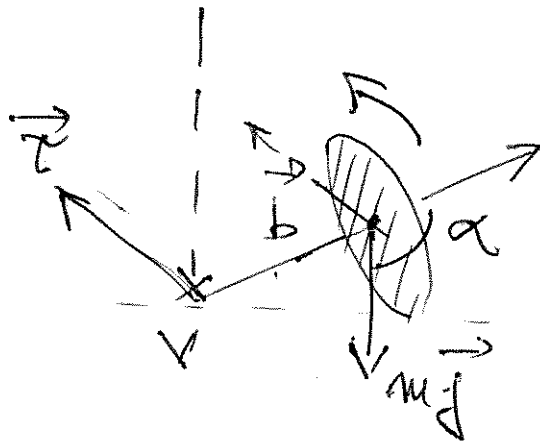
ω oraria $\rightarrow \Omega$ oraria

ω antioraria $\rightarrow \Omega$ antioraria

Soluzioni vere in prima appross. - Quando il CR inizia a precessione sviluppa $L_y \neq 0$ e $\vec{I} \neq L\hat{u}_z$
 $L_y = m\Omega b^2$ - se $\Omega \ll \omega$ e $\tau_z = 0$ $L_y \approx \text{cost}$
 e il mob nella sostanza non cambia

Caso più generale: Ruota inclinata di un angolo α e trattola —

(16)



$$\vec{L} = I \vec{\omega}$$

$$\tau = mgb \sin \alpha$$

$$\vec{\tau} \perp \vec{L} \quad \text{come nel caso prec.}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt} (L \hat{u}_z) = \frac{dL}{dt} \hat{u}_z + L \frac{d\phi}{dt} \hat{u}_\perp$$

$$\vec{\tau} = \underbrace{0}_{\frac{dL}{dt}=0} + \underbrace{mgb \sin \alpha}_{\substack{\perp \text{ costante in modulo} \\ \text{poiché } \tau_z = 0}} \hat{u}_\perp$$

Moto di precessione con

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{mgb}{I\omega} (\sin \alpha)$$

— o — o —

Avevamo anche visto che in un moto di precessione di un vettore di modulo costante —

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \vec{\Omega} \times \vec{A}$$

Nel caso specifico: $\vec{\tau} = \vec{\Omega} \times \vec{L} \Rightarrow |\vec{\Omega}| = |\vec{\tau}|/|\vec{L}|$