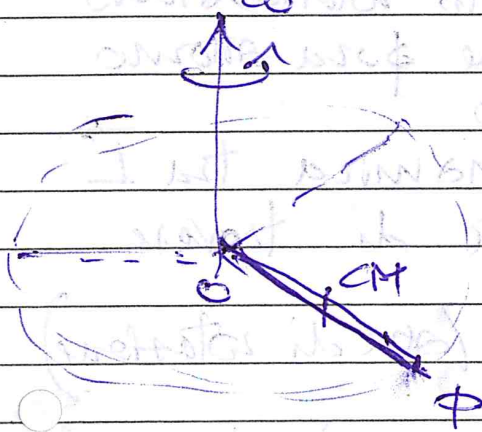


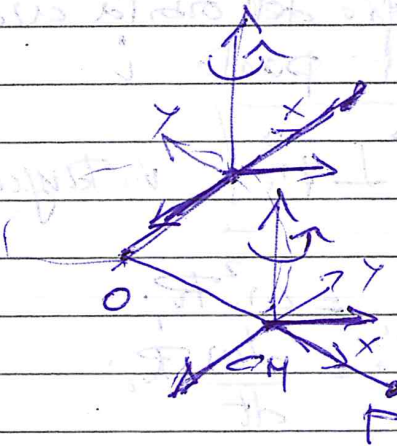
(7)

Esempio: Rotazione di una sbarra omogenea attorno a un vincolo fisso



Descrizione rispetto all'axe che contiene il vincolo:

$$\vec{v}_P = \vec{\omega} \times \vec{OP} \quad \text{moto circ. unif. di ogni pto della sbarra}$$



Descrizione rispetto al CM

$$\vec{v}_P = \vec{v}_{CM} + \vec{\omega} \times (\vec{CM} \vec{P})$$

+ traslazione del CM: $\vec{v}_{CM} = \vec{\omega} \times \vec{OCM}$
 moto circolare uniforme del CM
 + rotazione attorno al CM

In entrambi i casi il CM subisce un'accelerazione centripeta. Dunque $R^{(E)} = M \vec{a}_{CM} \neq 0$ [e corrisponde alla forza agente nel vincolo]

Il moto cioè può essere descritto come rotazione pur o come rototraslazione con rotazione attorno ad un ASSE ISTANTANEO DI ROTAZIONE CHE

TRASLA $\rightarrow$ Se fino a SR una sbarra ha esattamente la stessa situazione del cambio di S.Rif. gli studenti

- Sviluppiamo le eq. cardinali per q.s. esempio con polo in O e nel CM per mostrare che il contenuto di informazione dinamica non dipende dalla scelta del polo.

$$\begin{cases} \vec{R} = \frac{d\vec{P}_{CM}}{dt} \\ \vec{L} = \frac{d\vec{L}}{dt} \end{cases}$$

- Nel caso specifico: $\vec{R} = M \omega^2 r_{CM} \hat{u}_r$

Moto circolare uniforme del CM attorno a O

Possiamo descrivere la rotazione attorno a O (fisso) oppure attorno a CM in traslazione

$$\text{CM: } \vec{L}_{CM} = \frac{d\vec{L}_{CM}}{dt}$$

$$O: \vec{L}_O = \frac{d\vec{L}_O}{dt}$$

$$\text{Cambio di Polo per } \vec{L}: \vec{L}_O = \vec{L}_{CM} + \vec{r}_{CM} \times \vec{R}$$

$$\text{Teorema di König per } L: \vec{L}_O = \vec{L}'_{CM} + \vec{r}_{CM} \times \vec{P}$$

Sostituiamo nell'equazione per O ricordando che $\vec{r}_{CM} = \text{cost}$ (in q.s. moto) e che $\vec{L}_{CM} = \vec{L}'_{CM}$ (sempre)

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\vec{L}'_{CM} + \vec{r}_{CM} \times \vec{P}_{CM} \right)$$

$$= \frac{d}{dt} \vec{L}'_{CM} + \vec{r}_{CM} \times \frac{d\vec{P}_{CM}}{dt}$$

Poiché $\vec{L}_0 = \vec{L}'_{CM} + \vec{r}_{CM} \times \vec{P}$

qs. equazione è equivalente a (contiene)

$$\vec{L}'_{CM} = \frac{d\vec{L}'_{CM}}{dt}$$

rotazione attorno a CM

$$\vec{P} = \frac{d\vec{P}_{CM}}{dt}$$

moto traslatorio del CM

o, in altri termini, avendo scelto $\vec{P} = \frac{d\vec{P}'_{CM}}{dt}$

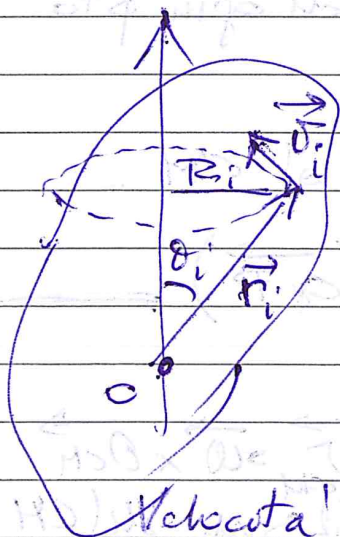
qs. equazione ha lo stesso contenuto di informazione sul moto di rotazione dell'cp. angolare riferito al CM -

→ Possiamo in generale sfruttare l'arbitrarietà della scelta del polo per scegliere l'axe di rotazione più conveniente a descrivere il problema

→ la descrizione non è univoca (nello specifico è pto fino a rotazione e punto in moto trasl. + rotazione) ma il contenuto dinamico è lo stesso
 ⇒ basta capirsi!

Rotazione rigida attorno a asse fisso (RRAF) in SRI

- La comp. rotazionale del moto rototranslatorio è riconducibile ad una rotazione pura attorno ad un asse (istantaneo) fisso
- Analisi della relazione dinamica tra $\vec{L}$ e $\vec{\omega}$ nella RRAF permetta di trovare soluzioni del moto
- Scegliamo $\vec{\omega}$ lungo z (asse di rotazione)



$R_i = r_i \sin \theta_i$ raggio dell'orbita circolare del punto i

$$\vec{v}_i = \omega R_i \quad \left| \begin{array}{l} \vec{v}_i \perp \vec{R}_i \\ v_i \text{ tangenziale} \end{array} \right.$$

- Acc. centripeta: $a_{c,i} = \omega^2 R_i$
- Acc. tangenziale: $a_{t,i} = \frac{d\omega}{dt} R_i$

Velocità angolare ω e acc. angolare $\alpha = \frac{d\omega}{dt}$ comuni a tutti i punti

- Momento angolare: $\vec{L}_0 = \sum_i \vec{l}_i$

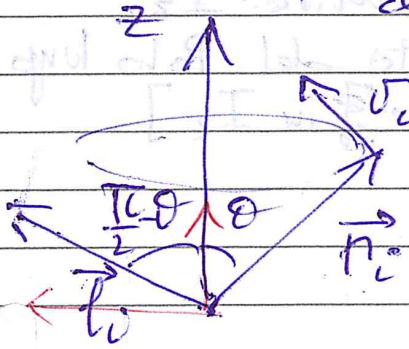
$$\vec{l}_i = \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$$

poiché $\vec{r}_i \perp \vec{v}_i$ $l_i = m_i r_i v_i = m_i r_i R_i \omega$

(8)

$\vec{l}_i$ è ortogonale al piano che contiene $\vec{r}_i$ e $\vec{v}_i$, inclinato di θ_i rispetto a z

$\vec{l}_i$ è diretto con angolo $\frac{\pi}{2} - \theta_i$ rispetto all'asse z



$\vec{l}_i$ ha comp. assiale $l_{i,z}$ e comp. trasversale $l_{i,\perp}$

$$l_{i,\perp} = [l_{i,x}^2 + l_{i,y}^2]^{1/2}$$

In generale entrambe non nulle e

$\vec{L} = \sum \vec{l}_i$ non è ~~diretto~~ parallelo a $\vec{\omega}$

Comp. Assiale

$$l_{i,z} = l_i \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta_i\right) = m_i r_i v_i \sin \theta_i$$

$$= m_i R_i v_i = m_i R_i^2 \omega$$

$$L_z = \sum_i l_{i,z} = \left(\sum_i m_i R_i^2 \right) \omega$$

$$= I_z \omega$$

Def: $I_z = \sum_i m_i R_i^2$ momento di inerzia

$\left[= \int dm R^2 \right]$ nel limite continuo

- I_z dipende solo dalla distribuzione delle masse relativa all'asse [R_i sono distanti dall'asse]

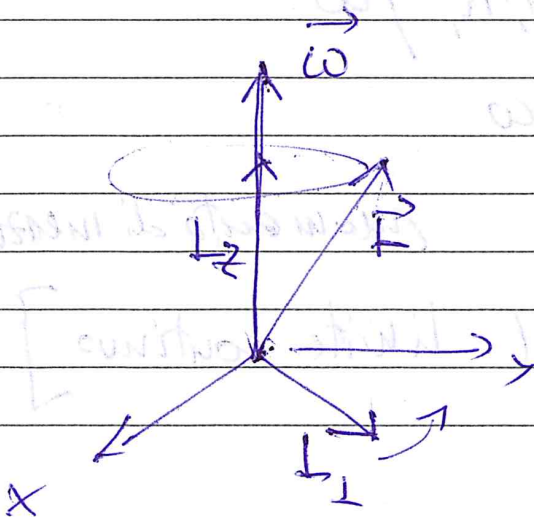
$\Rightarrow I_z$ - prop. a ω , tramite I_z
 - indep. dalla scelta del Polo lungo z
 [solo dist. dall'asse z in I_z]

• Trasversa :

$$d_{i,\perp} = d_i \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta_i\right) = m R_i \cos \theta_i \cdot r_i \\ = m z_i R_i \omega$$

$$\rightarrow d_{i,x} = m_i z_i x_i \omega \\ d_{i,y} = m_i z_i y_i \omega$$

- $L_\perp = \sum l_{i,\perp}$
- Dipende dal polo [tramite z_i]
 - Cambia direzione seguendo il moto di rotazione
 - Può cambiare modulo con ω



L precessa attorno a z
 e cambia modulo
 secondo
 $\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$

Casi notevoli

(9)

- 1) $L_{\perp} = 0 \rightarrow z$ è l'asse di simmetria del CR:
 [per ogni massa m_i a x_i e y_i esiste massa m_i a $-x_i$ e $-y_i$]

$$\rightarrow L \parallel \omega \quad \rightarrow L = I_z \omega$$

In q.s. conditione L può cambiare solo in modulo e verso tramite:

$$\vec{\tau} = \frac{dL}{dt} = \frac{d(I_z \vec{\omega})}{dt} = I_z \frac{d\vec{\omega}}{dt} = I_z \vec{\alpha}$$

$\rightarrow L$ rimane sempre diretto lungo z e l'asse di rotazione istantaneo non cambia direzione

— Sia $\vec{\alpha}$ che $\vec{\tau}$ sono $\parallel$ all'asse di rotazione

$$\hookrightarrow \boxed{\tau = I_z \alpha}$$

Da cui per integrazione: $\alpha = \tau / I_z$

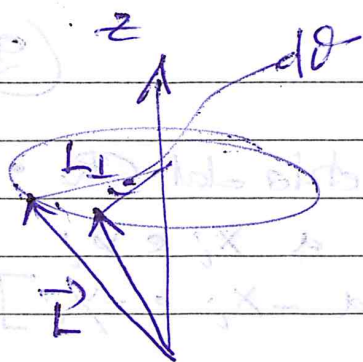
$$\omega(t) = \omega_0 + \int_0^t \alpha dt$$

$$\theta(t) = \theta_0 + \int_0^t \omega dt$$

- 2) $L_{\perp} \neq 0$, ma $\omega = \text{cost}$

$\rightarrow L$ precessa attorno all'asse con $\dot{\phi}$ angolare costante e modulo costante





In q.s. caso $\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L}$

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{L}_\perp \frac{d\theta}{dt} = \mathbf{L}_\perp \boldsymbol{\omega}$$

- Per la comp. assiale $\frac{dL_z}{dt} = \frac{d(I_z \omega)}{dt} = 0$
e dunque $\tau_z = 0$

- Per la comp. trasversa $\frac{d\mathbf{L}_\perp}{dt} = \mathbf{L}_\perp \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\tau}_\perp$

→ l'azione dei momenti delle forze τ_x, τ_y vincola il moto ad avvenire ~~lungo~~ attorno all'asse (e i punti su orbite circolari)

- Caso generale :

Assale: $L_z = I_z \omega \rightarrow \frac{dL_z}{dt} = I_z \frac{d\omega}{dt} = I_z \alpha$

• Eq. dinamica: $\tau_z = I_z \alpha$, la cui soluzione determina l'acc. $\alpha = d\omega/dt$

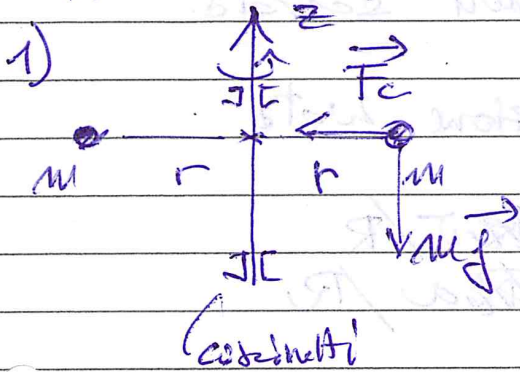
Nota: Le proiezioni $\tau_\perp = d\mathbf{L}_\perp$ non comporta variazioni di α , ma dt serve per determinare le reazioni vincolari τ_x, τ_y che vincolano il moto alla rotazione attorno a z

→ Situazione analoga al moto circolare:

- Acc. tangenziale, equiv. a relazione statica (cambia l'acc. lungo la traiettoria)
- F centripeta vincola il moto sul cerchio

Esempi sul non parall. di $\vec{\omega}$ e $\vec{L}$

Rotazione di 2 masse identiche, con $\omega = \text{cost}$



$$L_z = I_z \omega$$

$$= 2mr^2 \omega$$

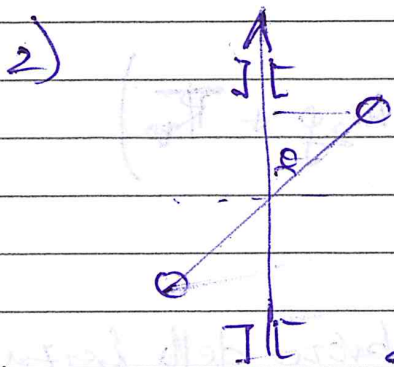
$$L_x = \sum m z_i r \omega = 0$$

$$(z_i = 0) \rightarrow \vec{L} = L_z \hat{k}$$

Per $\omega = \text{cost}$ $\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \rightarrow \vec{\tau} = 0$

Momenti $\vec{\tau}$ rispetto al polo: $\sum \vec{\tau}_i = 0$ bracci opposti
 (per ogni polo)
 $\vec{\tau}_i$ contrapposte $\sum \tau_i = 0$ (braccio nullo)

$\rightarrow$ Non serve forza sui cuscinetti centrali
 per mantenere il moto di rotazione



$$L_z = I_z \omega = 2mR^2 \omega$$

$$L_x = m z_1 R \omega + m z_2 R \omega$$

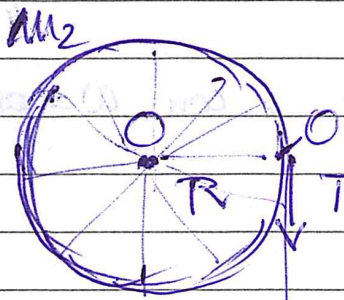
$$= mR \cos \theta \omega \neq 0$$

$$\frac{dL_x}{dt} = L_x \omega = \tau_x$$

momento
 esercitato
 dai cuscinetti

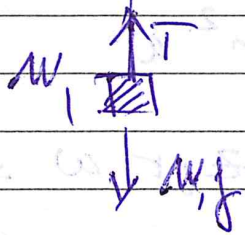
$\rightarrow$ Esempio concreto: bilanciamo a
 dinamici

Esercizio : Anello di massa m_2 e raggio R
(Ruota con raggio di m molle)



+ filo che si srotola, con massa
appesa, e non scivola

→ Rotazione ruota



$$\omega = \cancel{R} \dot{\theta} / R$$

$$\alpha = \cancel{R} \ddot{\theta} / R$$

Es. per il peso m_1 : $m_1 g - T = m_1 a$
 R. per la ruota con vincolo in O : $m_2 g + T + R_N = 0$
 da Eq. per le rotazioni attorno a O :
 [ruota : peso agisce in O, R_N agisce in O → braccio nullo] $R T = I_z \alpha$

Con $I_z = m_2 R^2$ (tutta la massa a R da O)

$$\begin{cases} R T = m_2 R^2 \alpha & T = m_2 a \\ m_1 g - T = m_1 a & a = \frac{m_1}{m_1 + m_2} g \end{cases}$$

$$R_N = m_2 g + \frac{m_2 m_1}{m_1 + m_2} g \quad (R_N = m_2 g + \cancel{R_N})$$

Nota : $a < g$ → parte del braco della forza
è speso per mettere in
rotazione la ruota

(Esempio Martelli da cilindro)

Momento di inerzia§

— definito rispetto all'asse di rotazione

$$I = \sum_i m_i R_i^2$$

$$= \int dm R^2$$

Def. la dinamica di rotazione $\tau_z = I_z a$ in modo analogo a m per $F = m a$

Pero' I dipende dalla distribuzione delle masse rispetto all'asse di rotazione

In sistemi composti da più elementi CR il mom di inerzia si calcola in modo additivo:

$$I_{tot} = I_1 + I_2 + \dots$$

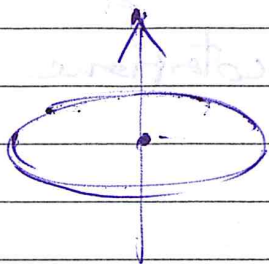


Proprietà che discende in modo ovvio dalla proprietà associativa della somma

$$I = \sum_i m_i R_i^2 = \sum_{i \in 1} m_i R_i^2 + \sum_{i \in 2} m_i R_i^2 + \dots$$

Per alcune forme geometriche notevoli, conviene conoscere i momenti di inerzia:

1) Anello di raggio R e massa m (ROOTA)

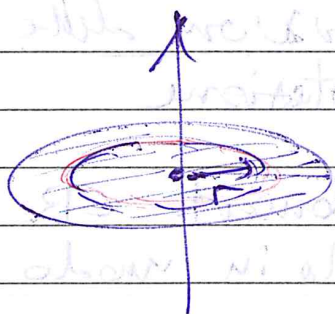


$$I = mR^2$$

tutta la massa è
a dist. R

$$I = \int dm R^2 = R^2 \int dm = mR^2$$

2) Disco pieno omogeneo di Raggio R e massa m



$$I = \frac{1}{2} m R^2$$

$$I = \int_0^R dI_{\text{anello}}(r)$$

Ogni anello (circolo circolare) di raggio r spessore dr
massa $dm = \frac{m}{\pi R^2} \cdot 2\pi r dr$

Il momento di inerzia di ciascun anello è

$$dI(r) = r^2 dm \quad \text{con } r \text{ tra } 0 \text{ e } R$$

$$\text{Sunque: } I = \int_0^R r^2 \frac{m}{\pi R^2} \cdot 2\pi r dr$$

$$= \frac{2m}{R^2} \int_0^R r^3 dr = \frac{2m}{R^2} \frac{R^4}{4} = \frac{1}{2} m R^2$$

3) Cilindro: $I = \frac{1}{2} m R^2$

(I_z non dip da dist. lungo l'asse, ma solo da dist. dall'asse)

4) Sfera cara
(pallone)

$$I = \frac{2}{3} m R^2$$

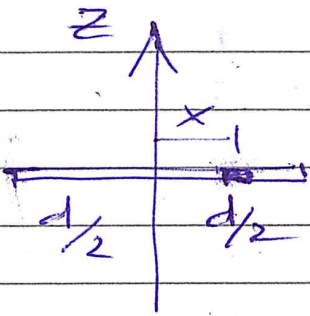
5) Sfera piena

$$I = \frac{2}{5} m R^2$$

→ esercizio

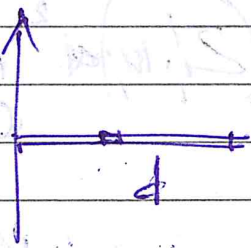
6) Sbarra
(aspetto al CM)

$$I = \frac{1}{12} m d^2$$



$$I = \int_{-d/2}^{d/2} \frac{m}{d} dx \cdot x^2 = \frac{1}{12} m d^2$$

7) Sbarra per un
estremo



$$I = \int_0^d \frac{m}{d} dx x^2 = \frac{1}{3} m d^2$$

→ In tutti i casi : massa $\times$ dimensione caratt
 $\times$ fattore numerico

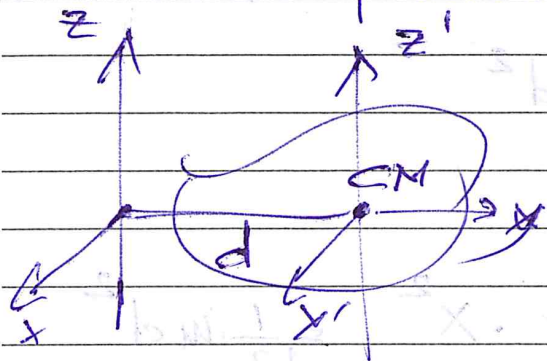
Si può scrivere in generale

$$I = m k^2$$

con k = Rapporto
pari al raggio dell'inello
di ~~massa~~ pari massa che avrebbe lo stesso
momento di inerzia

Teorema dell'asse parallelo (Huygens-Stainer)

Calcolo del mom. di inerzia per un
asse parallelo all'asse per il CM



$$I = I_{CM} + md^2$$

$$I_{CM} = \sum_i m_i (x_i'^2 + y_i'^2)$$

$$I = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2)$$

$$= \sum_i m_i [x_i'^2 + (y_i' + a)^2] =$$

$$= \sum_i m_i (x_i'^2 + y_i'^2) + \left(\sum_i m_i \right) a^2 + 2a \sum_i m_i y_i'$$

$$= I_{CM} + m d^2$$

termine nullo poiché
 $\sum_i m_i y_i' = m y_{CM}'$

e la posizione del CM
 nel SR del CM è 0

Esempio: risolvere l'esercizio di pag 10-bis (rotta
 con filo e peso) scegliendo il polo in O

Energia cinetica e lavoro nel moto di rotazione

- Si può ricondurre, talvolta a $W = \Delta E_K$ per la soluzione del problema dinamico

Nel caso di ~~un~~ RRAF:

$$\begin{aligned} E_K &= \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 \\ &= \sum_i \frac{1}{2} m_i (R_i \omega)^2 \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_i m_i R_i^2 \right) \omega^2 = \frac{1}{2} I \omega^2 \end{aligned}$$

L'energia cinetica può essere espressa tramite il momento di inerzia

- ω è indep. dalla scelta dell'asse fissa di rotazione nella descrizione del moto

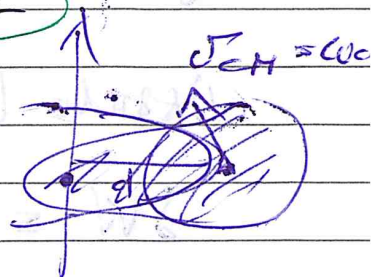
I invece dipende di AF di rotazione

Koenig

Si può esprimere I in riferimento al teorema di Huygens-Steiner: $I = I_{CM} + m d^2$

→ meglio fatto con teorema di Koenig

$$\begin{aligned} E_K &= \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} (I_{CM} + m d^2) \omega^2 = \\ &= \underbrace{\frac{1}{2} I_{CM} \omega^2}_{\text{Rotazione attorno al CM}} + \underbrace{\frac{1}{2} m v_{CM}^2}_{\text{Traslazione del CM}} \end{aligned}$$



Rotazione attorno al CM

Traslazione del CM

Stesso risultato da Koenig:
 $E_K = \frac{1}{2} m v_{CM}^2 + E_K$

L'energia cinetica può essere calcolata sia trattando il moto come pur rotatorio attorno a AF :

$$E_K = \frac{1}{2} I \omega^2$$

Sia come moto di traslazione del CM + rotazione attorno al CM :

$$E_K = \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2 + \frac{1}{2} M v_{CM}^2$$

L'en. cinetica è identica nei due casi. Bisogna stare attenti però, nel calcolo di fare le cose in modo consistente.

— Lavoro di rotazione (attorno asse z)

$$W = \Delta E_K = \frac{1}{2} I \omega_f^2 - \frac{1}{2} I \omega_i^2$$

In termini infinitesimi

$$\delta W = d\left(\frac{1}{2} I \omega^2\right) = I \omega d\omega = I \frac{d\theta}{dt} \alpha dt$$

Usando l'equazione dinamica del moto angolare

$$\delta W = I \alpha d\theta = I_2 d\theta$$