

Conservazione del momento angolare

(12)

① Poniamo il caso $\vec{v} \times m\vec{v}_{cm} = 0$, allora il momento angolare è conservato e

$$\vec{M} = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = 0$$

La condizione si può verificare $\vec{M} = 0$ e può verificarsi in due casi:

① Non agiscono forze esterne sul sistema (note) e cioè $R(E) = \sum F_i(E) = 0$

In questo caso la condizione è verificata per qualsiasi polo γ ed inoltre vale anche che $\vec{P} = \text{cost}$

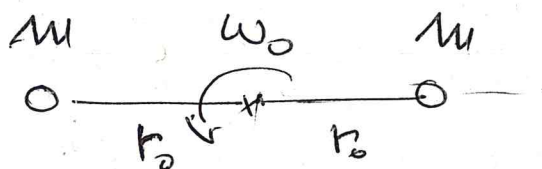
2) $R(E) \neq 0$, ma esiste almeno un polo rispetto al quale $\vec{M} = 0$ - in questo caso $\vec{L} = \text{costante}$, ~~ma $\vec{P} \neq \text{costante}$~~ ma $\Delta \vec{P} \neq 0$ in generale $\rightarrow$ scelta del polo importante nell'analisi del problema

Nota: ① È verificata sperimentalmente: $\Delta L = 0$ in un sistema isolato $\rightarrow$ è conferma del principio di Azione e Reazione in forma forte cioè è verificata che $\vec{P} = 0$

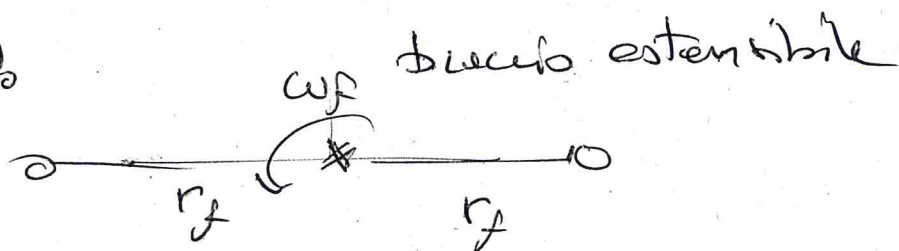
Es. 1 Cons. del momento angolare

L'azione di forze interne può modificare la distribuzione delle masse, ma non il momento angolare $\rightarrow$ si modifica la velocità di rotazione dei punti

Schematico



$$L_0 = 2Mr_0^2 \omega_0$$

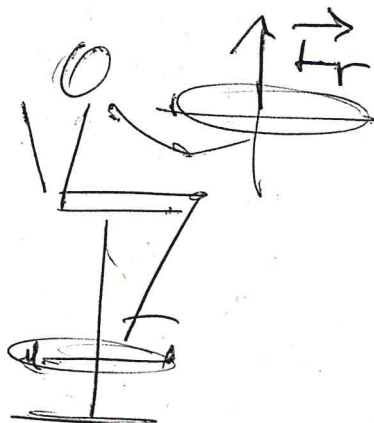


$$L_f = 2Mr_f^2 \omega_f$$

$$\Rightarrow L_f = L_0 \Rightarrow \omega_f = \left(\frac{r_0}{r_f}\right)^2 \omega_0$$

x tuffatore
x pattinatore

Esempio (concetto)



ruote in rotazione
viene ribaltata

$$\vec{L}_r \Rightarrow -\vec{L}_r$$

$$\vec{L}_0 \Rightarrow \vec{L}_0 = 2L_r$$

la sedia deve ruotare

11

13/11

La scelta del polo è arbitraria
- Quale scegliere?

Due punti notevoli:

- x Origine del sist di rif. (inertiale)
- x Centro di massa del sistema -

Verifichiamo due proprietà notevoli

1) ~~Il~~ $\vec{L}'_{cm} = \vec{L}_{cm}$

Il mom angolare ~~rispetto al~~ con polo nel CM è identico nel sist. del CM e nel sist. inerziale

2) $\vec{L}_o = \vec{L}_{cm} + \vec{r}_{cm} \times \vec{P}_{cm}$

Il mom. ~~angolare~~ con polo sull'origine del sist inerziale è dato dalla somma del mom angolare nel CM rispetto al CM e il mom. angolare della qta' di moto tot ~~ang~~

DESCRIZIONE RELATIVA AL C.d.M.

(14)

Punto notevole per cui $\vec{\sigma}_V \times M \vec{\sigma}_{cm} = 0$ e

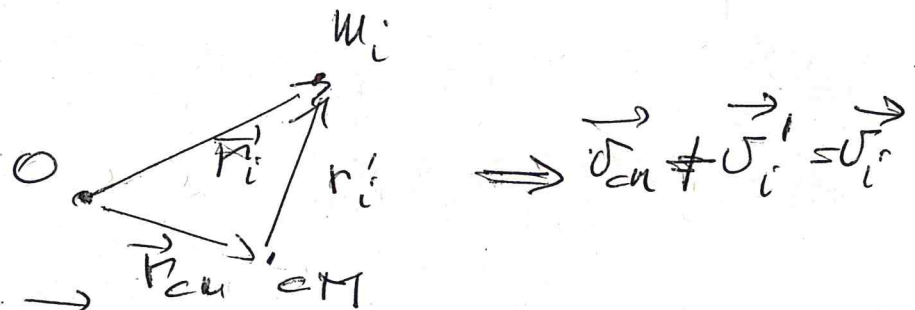
dunque:

$$\frac{d\vec{L}'}{dt} = \vec{\tau}'$$

(con apice ' indicare il riferimento del C.d.M.)

C.d.M non è in generale INERZIALE: $\vec{a}_{cm} \neq 0$
e dunque $\vec{\tau}'$ ha contributi da $\vec{F}_{app}^i = -m_i \vec{a}_{cm}$

Tuttavia; calcolo $\vec{L}$ nel sist. inerziale scegliendo CM come polo



$$\begin{aligned} \vec{L}_{cm} &= \sum_i \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i \\ &= \sum_i \vec{r}_i' \times m_i \vec{v}_{cm} + \sum_i \vec{r}_i' \times m_i \vec{v}_i' \\ &= \left(\sum_i m_i \vec{r}_i' \right) \times \vec{v}_{cm} + \vec{L}_{cm}' \end{aligned}$$

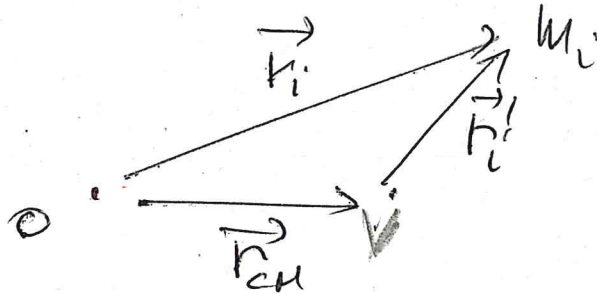
$\vec{L}_{cm} = \vec{L}_{cm}'$ (pta' di moto totale relativa al C.d.M.)
il mom. angolare con Polo nel CM è identico nel sist del CM e in un sist. inerziale

$$\vec{\tau}'_{cm} = \frac{d\vec{L}_{cm}}{dt} = \frac{d\vec{L}_{cm}'}{dt} = \vec{\tau}_{cm}'$$

È ANALO GAMBONIE PER I MOMENTI DELLE FORZE

Teorema di Koenig per il mom. angolare

Stabilisce le relazioni tra mom. angolare nel sistema inerziale e nel sist. del cm, calcolato rispetto al Polo = ~~origine~~ origine del ~~sistema inerziale~~ vire.



$$\vec{r}'_i + \vec{r}_{cm} = \vec{r}_i$$

$$\vec{v}'_i + \vec{v}_{cm} = \vec{v}_i$$

Inoltre la posizione del cm è nulla nel sistema del cm, e la qta' di moto totale nel cm è nulla:

$$\sum m_i \vec{r}'_i = 0 \quad \sum m_i \vec{v}'_i = 0$$

Scegliamo polo = ~~cm~~ O, ma in v. inerziale ($\vec{v}_i$)

$$\vec{L}_{cm} = \sum \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$$

$$= \sum m_i (\vec{r}'_i + \vec{r}_{cm}) \times (\vec{v}'_i + \vec{v}_{cm}) =$$

$$\vec{L}_{cm} = \sum m_i \vec{r}'_i \times \vec{v}'_i + \sum m_i \vec{r}'_i \times \vec{v}_{cm} + \sum m_i \vec{r}_{cm} \times \vec{v}'_i + \sum m_i \vec{r}_{cm} \times \vec{v}_{cm}$$

$$\vec{L}_{cm} = \underbrace{\sum m_i \vec{r}'_i \times \vec{v}'_i}_{\text{relativo al cm}} + \underbrace{\sum m_i \vec{r}_{cm} \times \vec{v}_{cm}}_{\text{del cm}}$$

CR 1

• Proprietà globali di sistemi di pti descritte da

$$1) \quad \vec{R}^E = M \vec{a}_{CM} = \frac{d\vec{P}_{CM}}{dt} \quad \text{T. del C.M.}$$

$$2) \quad \vec{L}^E = \frac{d\vec{L}}{dt} \quad \text{T. del Mom. angolare}$$

[con scelta opportuna del polo t.c. $\vec{r}_V \times M \vec{v}_{CM} = 0$]

• Azione delle forze interne non interviene nelle relazioni globali (principio di azione-reazione in forma debole e forte)

• Azioni delle forze esterne ($\vec{R}^E$ e $\vec{L}^E$) descrivono i moti di insieme del sistema di punti

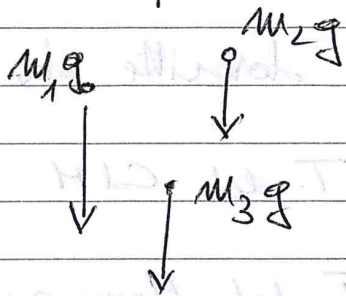
- moto del C.M.

- moto relativo a un polo

→ non descrive i moti di ogni singolo punto, per il quale è necessario conoscere $\vec{R}_i = m \vec{a}_i$ con $\vec{R}_i = \vec{F}_i^I + \vec{F}_i^E$

Prima di procedere all'analisi dei moti tramite 1) e 2) vediamo l'esempio di una forza motrice (Forza peso) e una proprietà

Forza peso su un sistema di punti



$$\begin{aligned}\vec{R}^F &= \sum_i m_i \vec{g} \\ &= \left(\sum_i m_i \right) \vec{g} = M \vec{g} \quad (*)\end{aligned}$$

- Risultante = "peso" della massa totale del sistema
- Teorema del Cdm $\Rightarrow$ moto del Cdm caduta libera con traiettoria parabolica (con caratteristiche definite dalle condizioni iniziali)

- La forza è conservativa:

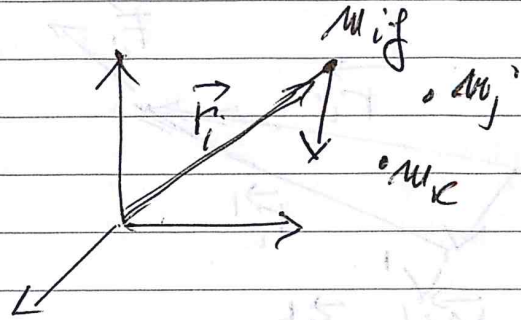
$$\begin{aligned}E_p &= \sum_i E_p(i) = \sum_i m_i g h_i \\ &= \left(\sum_i m_i h_i \right) g = \left(\frac{\sum_i m_i h_i}{M} \right) \cdot M g \\ &= M g h_{cm} \quad (*)\end{aligned}$$

- Energia della forza peso dipende dalla quota del Cdm (h_{cm}), come se tutta la massa fosse in quel punto

(2)

Momento della forza peso (rispetto ad un polo)

$$\begin{aligned}\vec{\tau}^E &= \sum_i \vec{r}_i \times m_i \vec{g} \\ &= \left(\frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{M} \right) \times M \vec{g} \\ &= \vec{r}_{CM} \times M \vec{g}\end{aligned}$$



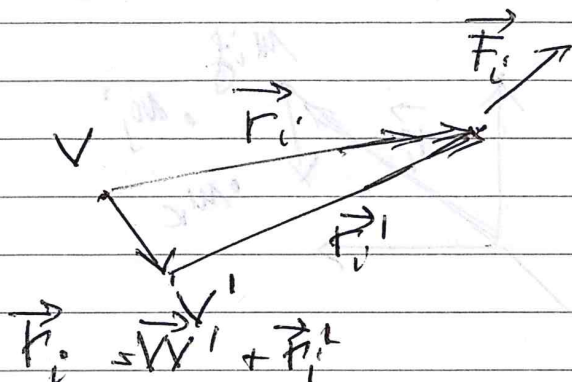
→ momento della forza peso dipende dal braccio delle posizioni del CdM rispetto al polo ($\vec{r}_{CM}$) e dalla forza peso risultante $M \vec{g}$

→ Se polo nel CdM, $\tau = 0$

→ In generale $\vec{\tau}^E$ dipende dalla scelta del polo.

La dipendenza dal polo di $\vec{\tau}^E$ e di $\vec{L}$ è ineliminabile. L'equazione dinamica descritta dal Teorema del momento angolare dipende dal polo - Vedremo attraverso esempi che il risultato dell'analisi (il fenomeno fisico sottostante) non dipende dalla scelta del polo

Dipendenza di $\vec{L}$ dal polo (discussione generale)



Siano V e V' due poli e $\vec{F}_i$ una forza agente al punto i

$$\begin{aligned}\vec{L}_V &= \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \\ &= \sum_i (\vec{VV}' + \vec{r}'_i) \times \vec{F}_i =\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= \vec{VV}' \times \sum_i \vec{F}_i + \sum_i \vec{r}'_i \times \vec{F}_i = \\ &= \vec{VV}' \times \vec{R}^E + \vec{L}_{V'}\end{aligned}$$

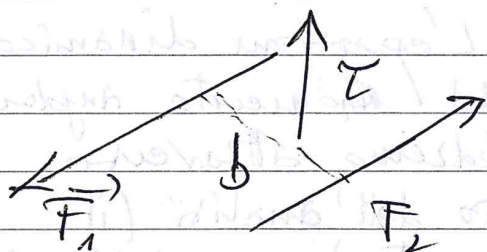
termini associati al cambio di polo

• Se $\vec{R}^E = 0$, il momento delle forze $\vec{L}^E$ è indep. dal polo, ma in generale non è così.

• Caso notevole: coppia di Forze

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$$

con braccio b (distanza tra le rette d'azione)



$$\begin{aligned}\Rightarrow \vec{R}^E &= 0 & (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0) \\ \vec{L}^E &= bF & (F = |\vec{F}_1| = |\vec{F}_2|) \\ &\text{ortogonale al piano} \\ &\text{che contiene la coppia}\end{aligned}$$

→ Un sistema di forze con risultante $\vec{R}^E$ e momento $\vec{L}^E$ rispetto a un polo può sempre essere ridotto a

- $\vec{R}^E$ con retta d'azione per il polo,
- più una coppia con momento $\vec{L}^E$

Equazioni del moto e Gradi di Libertà

(3)

- Descrizione tramite grandezze globali di un sistema di punti definisce 2 equazioni vettoriali
 $\Rightarrow$ 6 equazioni scalari (in genere indipendenti)
- Descrizione completa del moto di un sistema di N punti richiede N leggi orarie

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(t) \quad i = 1, \dots, N \rightarrow 3N \text{ leggi scalari (3 coord.)}$$

- Leggi orarie sono soluzioni di

$$\vec{F}_i = m \vec{a}_i \quad i = 1, \dots, N$$

Servono N equazioni vettoriali ($3N$ scalari) per definire in modo completo il moto

$\Rightarrow$ Il sistema ha $3N$ gradi di libertà (GdL)

Le equazioni globali (Teoremi del CM e del momento angolare) sono sufficienti a una descrizione completa del moto in 2 casi notevoli:

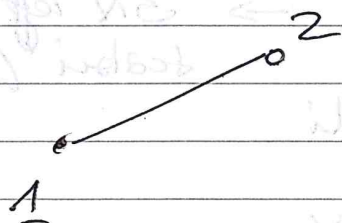
1. Sistema di 2 punti (problema dei 2 corpi)

$$\text{G.d.L.} = 3 \times 2 = 6 \quad \text{come il n.º di equazioni}$$

2. CORPO RIGIDO

CORPO RIGIDO : sistema di punti con posizioni relative fisse (distanze immutabili) per effetto di forze interne. Anche senza conoscere la natura delle forze interne si può sottrarre l'effetto per introdurre un "vincolo" al moto relativo dei punti che riduce il n° di G. d. L. del sistema

Es. CR costituito da 2 punti



d_{12} = distanza fissa
definisce una
condition vincolare
sulle coordinate:

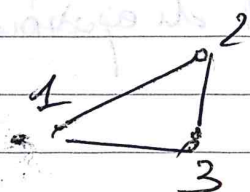
$$d_{12}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 \quad (*)$$

Le coordinate dei due punti non sono tutte indipendenti, ma sono accoppiate da una equazione (*), che si aggiunge alle eq. del moto.

$$G. d. L. = N^{\circ} \text{ coordinate} - N^{\circ} \text{ vincoli}$$

$$= 3 \times 2 - 1 = 5$$

Es. CR costituito da 3 punti :



- 3 reazioni vincolari; $d_{ij}^2 = (x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2$
(i, j) = (1, 2), (2, 3), (3, 1)

$$- G. d. L. = 3 \times 3 - 3 = 6$$

(4)

Es. N pt con $N > 3$

- Per ogni pte addizionale 3 coordinate
(almeno)
e tre eq. vincolari:

$$d_{1m}^2 = (x_m - x_1)^2 + (y_m - y_1)^2 + (z_m - z_1)^2$$

$$d_{2m}^2 = \dots$$

$$d_{3m}^2 = \dots$$

Dunque per $N \geq 3$, $G.d.l. = 6$

→ Un corpo rigido ha 6 gradi di libertà, e il suo moto è completamente def. dalle eq. dinamiche indicate.

~~Es.~~

Inoltre, poiché $\vec{F}_i$ le posizioni relative dei punti sono fisse, il lavoro delle forze interne è nullo

$$W_i^{(I)} = \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i$$

$$W_j = \vec{F}_j \cdot d\vec{r}_j$$

$$W_i + W_j = \vec{F}_i \cdot d(\vec{r}_i - \vec{r}_j)$$

= 0 per ogni coppia

Quindi $W \equiv W^{(E)} \quad (W^{(I)} = 0)$

$$R = R^{(E)} \quad (A2. \text{ azioni formidabili})$$

$$Z = Z^{(E)} \quad (4 \text{ forze})$$

→ possiamo lavorare

Possiamo farci cadere l'indice (ϵ) e scrivere

$$\vec{R} = \frac{d\vec{P}}{dt} \quad \text{T. CDM}$$

$$\vec{r} = \frac{d\vec{L}}{dt} \quad \text{T. Many. (pelo)}$$

in alternativa possiamo usare la forma integrale (in alcune situazioni)

$$W = \Delta E_K \quad \leftarrow \text{che calcoleremo}$$

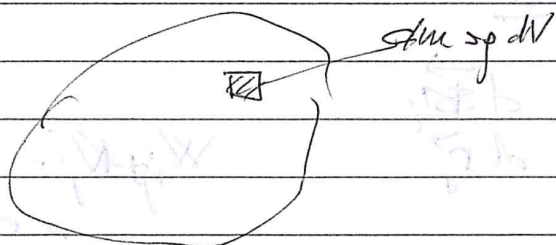
— Supponi i CR sono corpi continui, con un numero "infinito" di punti con coordinate di massa infinitesime (discontinuità presente a livello microscopico - atomi)

Rapp. $\&$

$$M = \sum m_i$$

$\rightarrow$

$$M = \int dm$$



elemento di massa
dm in coord. (x, y, z)
continue

Derivati: $\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{dm}{dV}$

$$M = \int \rho dV$$

$$\vec{r}_{cm} = \frac{\int \vec{r} dm}{M} = \frac{\int \vec{r} \rho dV}{M}$$

Se corpo omogeneo: $\vec{r}_{cm} = \frac{\rho}{M} \int \vec{r} dV = \frac{1}{V} \int \vec{r} dV$ centro
geometrico

(5)

MOTO DEL CR

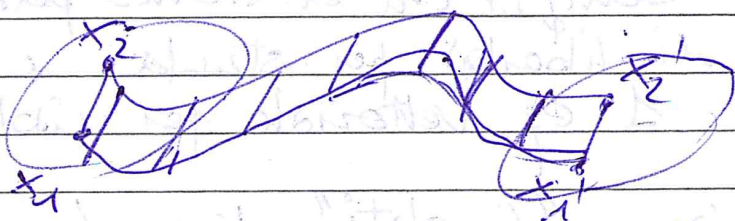
- Moto generale combinazione di due moti
motorevoli

1) Translatione - Associata a $\vec{R} = \frac{d\vec{P}}{dt}$ (1)

2) Rotazione attorno a un polo
Associata a $\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$ (2)

Analogia con cerchio di SR da SR a SR in rotazione.

1) Translatione: La congiungente di ogni coppia di pti trasla parallela a se stessa



• Tutti i pti stessa $\vec{v}_i = \vec{v}_{CM}$

• Eq. del moto per CM $\rightarrow \vec{R} = \frac{d\vec{P}}{dt}$

Soluzione $\rightarrow$ lepo ogni $\vec{v}_{CM}, \vec{v}_{CM}(t)$ e
 $\vec{\omega}_{CM} = \vec{\omega}_{CM}(t)$ definiscono
il moto di tutti gli altri punti

• Non c'è moto relativo al CM: $\vec{L}_{CM} = 0$

$\vec{L} = \vec{L}(t) \neq 0$ ma completamente definito
da $\vec{r}_{CM}(t)$ e $\vec{v}_{CM}(t)$

Infatti (T. di Keenly per il momento angolare):

$$\vec{L} = \vec{r}_{CM} \times m \vec{v}_{CM} + \vec{L}_{CM} =$$

$$= \vec{r}_{CM} \times m \vec{v}_{CM}$$

Dunque l'equazione $\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$ non aggiunge
informazioni indipendenti da $\vec{R} = \frac{d\vec{P}}{dt}$ in

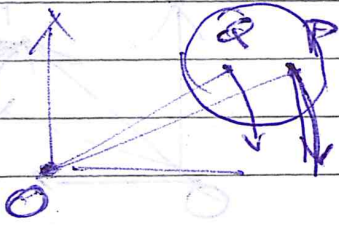
ps. caso -

Nota: Steno! Sembra che ci siano però
3 gradi di libertà per strada e
che sia sufficiente 1 eq. vettoriale per risolvere
il moto -

In realtà li abbiamo "vincolati" dicendo
che il moto è di traslazione PURA
e cioè ~~$\vec{L}_{CM}$~~ abbiamo già $\vec{r}_{CM}$
sfruttato l'equazione (2) per imporre $\vec{L}_{CM} = 0$
[o meglio, risolto (2) con $\vec{L}_{CM} = 0$]

(6)

2) Rotazione rigida attorno asse fisso



Tutti i punti seguono
orbite circolari attorno
a un asse fisso

Velocità angolare comune: $\vec{\omega} = \vec{\omega}(t)$

→ Asse fisso 1 gdl

2 gdl liberi (angolo e
velocità angolare)

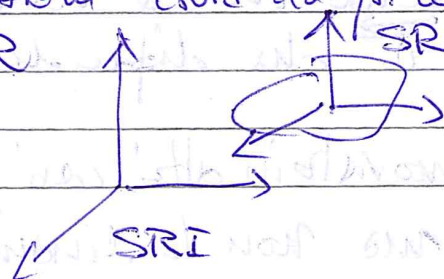
Velocità di ogni singolo punto

$$\vec{v}_P = \vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{OP} \quad (\text{vedi rotazioni di SR})$$

Eq. dinamica per il moto: $\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$ riferite
al polo

- Qs. moto, assieme al moto di traslazione, è
movibile poiché si dimostra che il moto generale
è la combinazione di un moto ~~istantaneo~~ di
traslazione e di rotazione attorno ad un asse
istantaneo di rotazione (che può cambiare nel tempo)

Dimostrazione evita da pr. corso, ma dialoga con
trif. SR



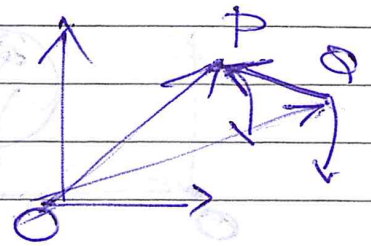
solidale
con CR → moto e
trasl.

nel caso più generale

• Descrizione del moto di rotazione NON CANONICA

$$\vec{v}_P = \vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{OP}$$

$$\vec{v}_Q = \vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{OQ}$$



$$\vec{v}_P - \vec{v}_Q = \vec{\omega} \times (\vec{OP} - \vec{OQ})$$

$$\Rightarrow \vec{v}_P = \vec{v}_Q + \vec{\omega} \times \vec{QP}$$

In q.s. relazioni $\vec{v}_O$ individua un moto di traslazione e $\vec{\omega} \times \vec{OP}$ o $\vec{\omega} \times \vec{OQ}$ una rotazione attorno ad un ASSE ISTANTANEO DI ROTAZIONE passante per O

In q.s. relazione $\vec{v}_Q$ individua il moto di traslazione del punto Q e $\vec{\omega} \times \vec{QP}$ un moto di rotazione attorno all'ASSE ISTANTANEO DI ROTAZIONE passante per Q

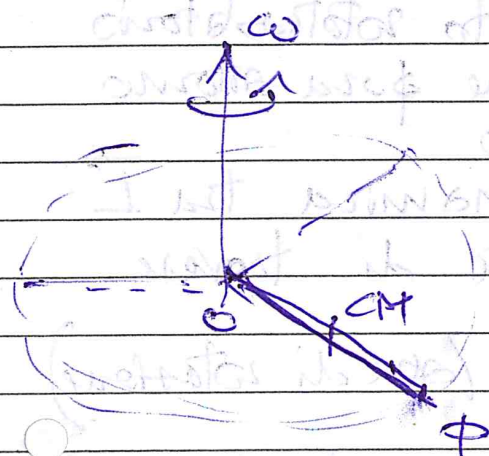
Nota: $\vec{\omega}$ e' indipendente dall'asse!

Quindi la rototraslazione che descrive il moto di un punto (un qualunque punto) e' definita
+ da una velocita' angolare $\vec{\omega}$ indep. dall'asse
+ da una velocita' $\vec{v}$ che dipende dall'asse

Ovviamente, come abbiamo visto in altri casi, la descrizione del moto e' relativa, ma non la dinamica sottostante

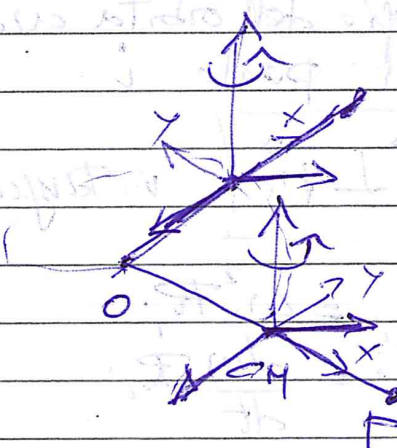
(7)

Esempio: Rotazione di una sbarra omogenea attorno a un vincolo fisso



Descrizione rispetto all'axe che contiene il vincolo:

$$\vec{v}_P = \vec{\omega} \times \vec{OP} \quad \text{moto circ. unif. di ogni pto della sbarra}$$



Descrizione rispetto al CM

$$\vec{v}_P = \vec{v}_{CM} + \vec{\omega} \times (\vec{CM}P)$$

+ traslazione del CM: $\vec{v}_{CM} = \vec{\omega} \times \vec{OCM}$
 moto circolare uniforme del CM
 + rotazione attorno al CM

In entrambi i casi il CM subisce un'accelerazione centripeta. Dunque $R(E) = M\vec{a}_{CM} \neq 0$ [e corrisponde alla forza agente nel vincolo]

Il moto cioè può essere descritto come rotazione pur o come rototraslazione con rotazione attorno ad un ASSE ISTANTANEO DI ROTAZIONE CHE TRASLA

→ Se fino a SR solo sbarra ho esattamente la stessa situazione del cambio di S.Rif. gli studenti