

* UN ESEMPIO DI URTO ESPLOSIVO : la propulsione dei razzi

- Emissione continua di propellente

→ URTO ESPLOSIVO IN OGNI ~~ISTANTE~~ dt

oggetto di massa $M(t)$ si divide in due corpi di massa:

$$M(t+dt) = M(t) - dm$$

Razzo al tempo $t+dt$
Propellente espulso
nell'intervallo dt



Nel riferimento inerziale sia v la velocità del razzo e v_p la velocità del propellente

L'emissione di propellente avviene con velocità relativa al razzo costante - Indichiamo con u la velocità relativa al razzo - Si ha

$$v_p = v - u \quad \text{velocità del propellente nel riferimento inerziale}$$

(Nella successione di ~~razzi~~ ~~urto~~ urto esplosivo a tutti gli istanti dt e' conservata la quantità di moto:

$$\vec{\Delta P} = \vec{P}(t+dt) - \vec{P}(t) = 0$$

Esplichiamo $P(t+dt)$ e $P(t)$ nella direzione del moto (collineare di dm e M):

$$\begin{aligned} \bullet \quad P(t+dt) &= M(t+dt)v(t+dt) + dm v_p(t+dt) \\ &= [M(t) - dm](v + dv) + dm(v + dv - u) \\ &= M(t)v(t) + M(t)dv - dm u \end{aligned}$$

ove ~~per~~ si è usato $dv = v(t+dt) - v(t)$

$$\bullet \quad P(t) = M(t)v(t)$$

Combinando queste due relazioni:

$$\Delta P = M dv - dm u = 0$$

D'altronde:

$$-dm = M(t+dt) - M(t) = dM \quad \begin{array}{l} \text{variazione} \\ \text{della massa} \\ \text{del razzo nel} \\ \text{tempo } dt \end{array}$$

Dunque troviamo una relazione differenziale tra la variazione della velocità del razzo e la variazione della sua massa:

$$dv = -u \frac{dM}{M} \quad (**)$$

Siano v_0 e M_0 la velocità e la massa iniziale del razzo e v_f e M_f la velocità e la massa al tempo t .

Integrando la relazione differenziale si ha

$$\int_{v_0}^v dv = -u \int_{M_0}^M \frac{dM}{M}$$

$$v - v_0 = -u [\log M - \log M_0]$$

$$v = v_0 + u \log \left(\frac{M_0}{M} \right)$$

$$M_0 = M_p + M_R \quad \equiv \text{somma della massa di propellente e razzo}$$

$$M = M_R \quad \equiv \text{massa alla fine della propulsione}$$

$$v_f = v_0 + u \log \left(1 + \frac{M_p}{M_R} \right)$$

* v_f dipende poco da M_p
dipende molto da $u \leftarrow$ propellenti
con elevata velocità di espulsione

* v_f dip. da $v_0 \rightarrow$ vantaggi della propulsione a più stadi

* Nell'analisi precedente abbiamo assunto (in modo implicito) che $F^{(e)} = 0$
 — popolazione in assenza di gravità nello spazio interstellare

* In presenza di $F^{(e)}$ possiamo ripartire da (**), derivando rispetto al tempo

$$M \frac{d\vec{v}}{dt} = -u \frac{dM}{dt} \quad \left[+ F^{(e)} \text{ se presente} \right]$$

↳
↳

massa • accelerazione spinta dovuta alla propulsione

Fa il lancio di un razzo sulla Terra:

$$M \vec{a} = - \vec{u} \frac{dM}{dt} + M \vec{g}$$

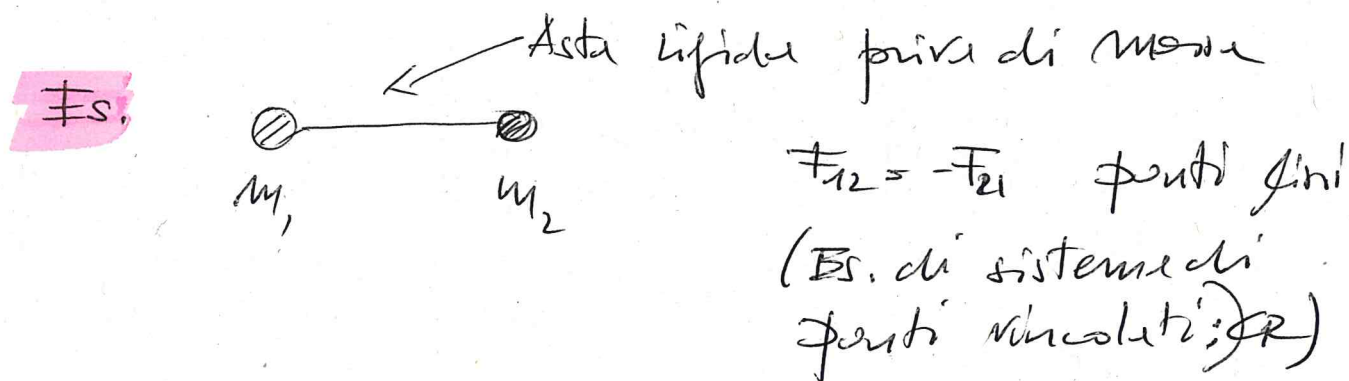
La spinta deve superare la forza peso —
 inoltre la spinta è proporzionale alla
 massa emessa nell'unità di tempo —

— confronto tra propulsione a gas
 e propulsione a liquidi

⇒ BOTTIGLIA RAZZO ESCLUSO PRATICO

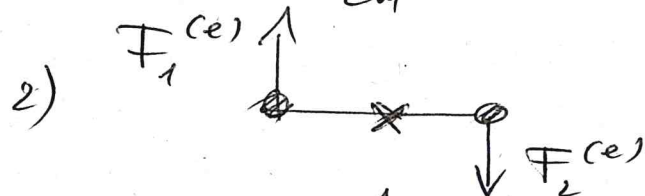
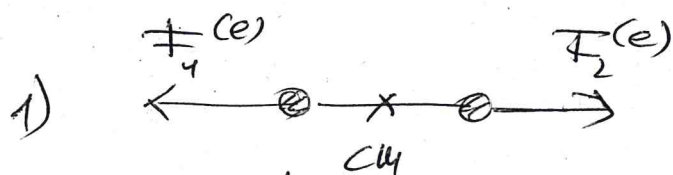
Il momento delle forze e il momento della pta' di moto: dinamica rotazionale

(1)

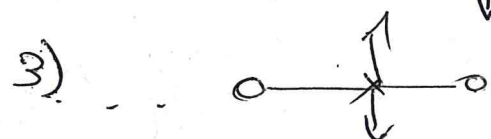


Equilibrio traslazionale:

$$\sum \vec{F}^{(e)} = 0 \quad \rightarrow \quad \vec{J}_{cm} = \text{cost}$$



$$\vec{J}_{cm} = \text{cost}$$



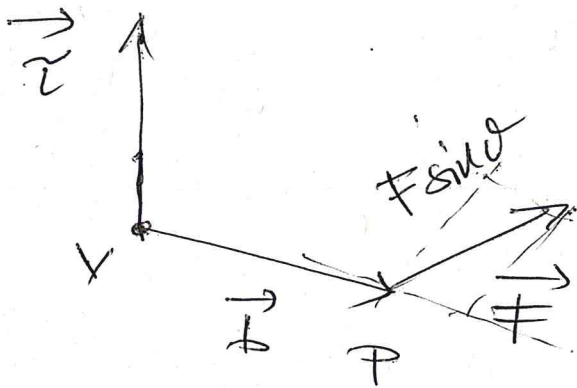
tuttavia è esp. comune che il sistema di punti nella condition 2) ruoti attorno a un asse. Quindi la conditione

$$\sum \vec{F}^{(e)} = 0$$

è conditione necessaria per l'equilibrio di un sistema di punti, ma non sufficiente. Il sistema può ruotare attorno ad un asse. Per la descrizione dei moti di rotazione (moti angolari) è utile introdurre alcune nuove

Possiamo caratterizzare l'azione delle forze agenti (2 sul sistema 1) e 2) tramite una grandezza vettoriale che tenga conto del punto di applicazione della forza e della sua direzioni rispetto ad un punto fisso

MOMENTO DELLA FORZA:



Punto (fisso): V P.O.

Punto di applicazione: P

Braccio della forza: b

$$\underline{\underline{\vec{z} = \vec{b} \times \vec{F}}}$$

Per il modulo della ~~forza~~ momento della forza si ottiene: $z = b F \sin \theta$, ove $F \sin \theta$ è la componente della forza ortogonale ~~alla~~ al braccio della forza.

Analizzando le situazioni descritte in figura 1) e 2) tramite questa grandezza vettoriale, si ottiene (scegliendo V nel centro dell'asse)

$$1) F_1 b_1 \sin \theta = 0 \quad \text{e} \quad F_2 b_2 \sin \theta = 0$$

$$2) z_1 = F_1 b_1, \quad z_2 = F_2 b_2$$

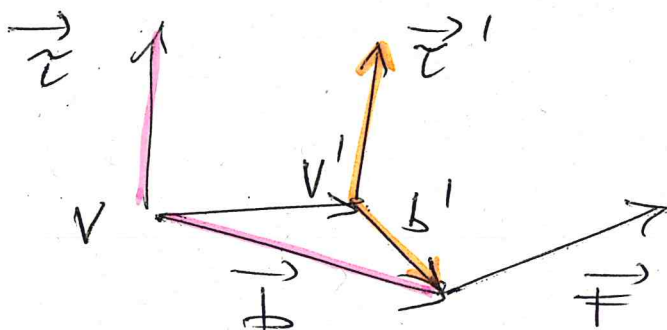
con z_1 e z_2 concordi in verso

Nel primo caso $z_{\text{tot}} = 0$, nel secondo caso $z \neq 0 \rightarrow$ a descrivere bene le osservazioni

Il momento della forza (e in termini generali) ⁽³⁾

il momento di una qualsiasi grandezza vettoriale

$\vec{M}_a = \vec{b} \times \vec{a}$) dipende dalla scelta del POLO rispetto a cui è calcolato il momento:



$$\begin{aligned}\vec{M} &= \vec{b} \times \vec{F} = \\ &= (\vec{b}' + \vec{V}' \times \vec{V}) \times \vec{F} = \\ &= \vec{M}' + \vec{V}' \times \vec{F}\end{aligned}$$

Perché $\vec{M}_1 + \vec{M}_2 = \vec{M}'_1 + \vec{M}'_2 + \vec{V}' \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_2)$
 Risultante nulla
 Risultato generale per coppie di forze

Tuttavia, cambiando la scelta del polo negli esempi mostrati ritrova sempre che $\vec{M}_1 \neq \vec{M}_2$ nella configurazione 1) e 3) (Due forze

~~colineari uguali e opposte hanno la proiezione sempre nulla qualunque sia l'asse scelto e opposte in un qualunque asse sempre uguale e opposte~~

$\vec{M}_1 + \vec{M}_2 \neq 0$ nel caso 2). Dunque per

grandezze ancorché non invariate rispetto alla scelta del polo, sembra adatta a descrivere la dinamica del problema.

$\Rightarrow$ la presenza di $\vec{M} \neq 0$ determina una variazione del moto angolare (acceleration angolare)

Proprietà sistemi con forze applicate in diversi punti

16

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i \quad \text{Risultante}$$

$$\vec{M}_O = \sum_i \vec{OP}_i \times \vec{F}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$

Cambio polo:

$$\vec{M}_{O'} = \sum_i (\vec{r}_i + \vec{OO'}) \times \vec{F}_i = \vec{M}_O + \vec{OO'} \times \vec{F}$$

Il momento dipende dal polo salvo
per $\vec{F} = 0$ (Risultante nulla)

————— $\rightarrow$ in questo caso $\vec{M}_O \perp \vec{F}$
ma in generale non è vero =

Un caso notevole è rappresentato dalle coppie di forze. Le coppie di forze (due forze uguali e opposte in verso e con direzioni parallele) hanno risultante nulla. Per coppie il momento risultante è sempre indipendente dal polo, e il momento è sempre ortogonale al piano contenente le forze.

Gli esempi elementari introdotti sono casi di coppie di forze.

Nel caso generale, R e M sono entrambi non nulli e non ortogonali. Si può sempre ridurre l'azione di tutte le forze a un sistema equivalente costituito da una forza R , passante per il polo, e da una coppia di momento M . La coppia ha risultante nulla e non contribuisce a R . R , passante per il polo, non contribuisce a M , mentre il momento della coppia è indipendente dal polo.

Questo è in analogia con la II legge di Newton:

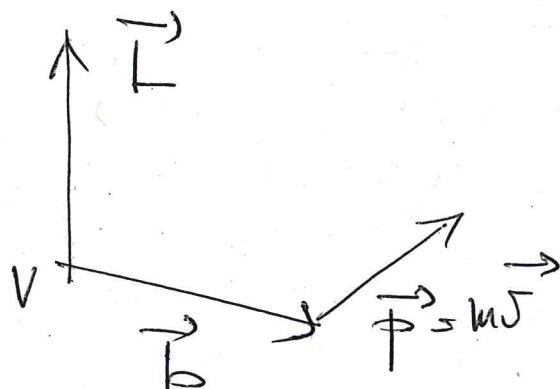
$$\vec{F} \neq 0 \iff \text{variazione di } \vec{v}$$

$$\vec{\tau} \neq 0 \iff \text{variazione di } \vec{\omega}$$

(abbiamo introdotto la velocità angolare vettoriale nella discussione dei moti relativi)

L'analogia può essere formalizzata introducendo il momento delle quantità di moto in dinamica del punto materiale:

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$$



Come per il momento della forza, ~~ma~~ $\vec{L}$ dipende dal polo:

$$\vec{L}_V = \vec{L}_{V'} + \vec{VV'} \times m\vec{v}$$

In generale ~~per~~ $\vec{L} = \vec{L}(t)$, poiché $\vec{p} = \vec{p}(t)$ (cioè la velocità del punto materiale cambia nel tempo.)

Per rendere esplicita le relazioni tra momento della Qta' di moto e velocità angolare, esprimiamo la velocità lungo la traiettoria del pto materiale come somma vettoriale delle componenti radiale e tangenziale della velocità:

$$\vec{v} = \frac{dr}{dt} \hat{u}_r + r \frac{d\theta}{dt} \hat{u}_\theta$$

Con questa rappresentazione si ottiene:

$$\vec{L} = \vec{r} \times m \left(\frac{dr}{dt} \hat{u}_r + r \frac{d\theta}{dt} \hat{u}_\theta \right)$$

il primo prodotto vettoriale è nullo, poiché $\vec{r}$ e $\hat{u}_r$ sono paralleli -

$$L = m r^2 \frac{d\theta}{dt}$$

Se il moto è circolare e il Polo è scelto nel centro del cerchio descritto dal moto si ottiene $L = m r^2 \omega$

• Per un punto materiale, tutte le forze sono applicate al punto e lo definiscono

TEOREMA DEL MOMENTO ANGOLARE PER IL PUNTO MATERIALE:

6

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}$$

→ Analogo della II legge della dinamica

Dim: ~~Applichiamo~~ Calcoliamo le variazioni nel tempo del momento delle quantità di moto

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times m\vec{v}) =$$

dove $\vec{r}$ è il raggio vettore che congiunge un pto O a P (supponiamo per semplicità

che il sistema sia INERTIALE, cioè le accelerazioni corrispondono a forze reali)

$$\begin{aligned} &= \frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{v} + \vec{r} \times m \frac{d\vec{v}}{dt} = \\ \text{perché } \vec{v} &= \vec{v} \times m\vec{v} + \vec{r} \times m\vec{a} = \\ &= 0 + \vec{r} \times \vec{F} = \vec{\tau} \quad \text{c.v.d.} \end{aligned}$$

perché $\vec{v} \times \vec{v} = 0$ perché inerciale

LA DERIVATA TEMPORALE DI $\vec{L}$ È UGUALE AL MOMENTO DELLA FORZA, SE ENTRAMBI I MOMENTI SONO CALCOLATI RISPETTO ALLO STESSO POLO ~~FORSE~~ IN UN SISTEMA DI RIFERIMENTO INERZIALE

(7)

Come conseguenza: se $\vec{\tau} = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = 0$ e
 cioè: Il momento della quantità di moto
 è conservato $(\vec{L} = \text{cost})$ se il momento
 della forza è nullo - $\Rightarrow$ noti che $\vec{\tau} = 0$

non equivale a $\vec{F} = 0$: τ si annulla
 anche per $F \neq 0$ se la forza e il braccio
sono paralleli.

LA CONDIZIONE $\vec{\tau} = 0$
 È IN GENERALE INDIP. DA $\vec{F} = 0$
 NEI SISTEMI DI PUNTI

Proseguendo l'analisi $\rightarrow$ teorema dell'impulso:
 " del mom. dell'impulso

$$\int_0^{\infty} \vec{\tau} dt = \Delta \vec{L}$$

Nel caso di forze impulsive (breve durata, ma elevata intensità); il braccio della forza è costante (perché il punto non si muove durante l'applicazione delle forze):

$$\Delta \vec{L} = \int_0^{\infty} \vec{\tau} dt = \int_0^{\infty} \vec{r} \times \vec{F} dt = \vec{r} \times \int_0^{\infty} \vec{F} dt$$

$\vec{r}$ è indep. da
 t , per forze
 impulsive.

$$\Delta \vec{L} = \vec{r} \times \vec{J}$$

[Unità di misura del
 Mom. forza Nm]

Not 2: $\vec{L} = \text{cost}$
 $\vec{r} \times m \vec{v} = \text{cost}$

Sono relazioni vettoriali. Dunque $\vec{L} = \text{cost}$ significa che la direzione del momento della qta' di moto e' costante, e che il piano in cui giacciono $\vec{r}$ e $\vec{v}$ e' costante. In altri termini $\vec{L} = \text{cost} \Rightarrow \vec{L} = \text{costante}$ implica che il moto e' piano.

Nessuna delle relazioni ricavate per il pto materiale aggiunge informazione non gia' presente nelle leggi della dinamica. Abbiamo infatti dedotto le relazioni a partire dalle II leggi di Newton.

Il momento angolare e il mom. delle forze sono pero' grandezze utili nella descrizione dei sistemi di punti, come avevamo visto negli esempi da cui siamo partiti.

Per le forze centrali il momento della forza rispetto al centro di forza e' sempre nullo. Dunque il moto in presenza di forze centrali avviene sempre in un piano. Dim:

$$F = f(r) \vec{u}_r \rightarrow M = \vec{r} \times F = f(r) \vec{r} \times \vec{u}_r = 0$$

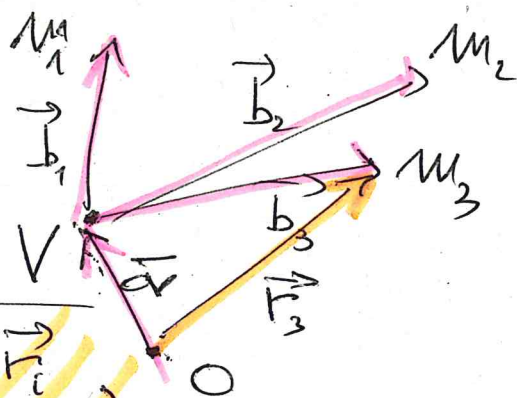
poiche' $\vec{r}$ e $\vec{u}_r$ sono paralleli

SISTEMA DI N PUNTI MATERIALI

(9)

Momento angolare totale del sistema:

$$\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i = \sum_i \vec{b}_i \times m \vec{v}_i$$



Polo V in generale non fisso e diverso dall'origine O del sistema di riferimento materiale

$$\vec{OV} + \vec{b}_i = \vec{r}_i$$

$$\vec{b}_i = \vec{r}_i - \vec{OV}$$

Valutiamo la variazione di $\vec{L}$ nel tempo (derivata temporale) per trovare l'analogo del teorema del momento angolare centro di massa per un sistema di punti

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \frac{d\vec{b}_i}{dt} \times m \vec{v}_i + \sum_i \vec{b}_i \times m \frac{d\vec{v}_i}{dt}$$

Analizziamo i due termini e poi componiamo!

$$1) \frac{d}{dt} \sum_i \vec{b}_i \times m \vec{v}_i = \sum_i \frac{d}{dt} (\vec{r}_i - \vec{OV}) \times m \vec{v}_i =$$

$$\sum_i (\vec{v}_i - \vec{OV}) \times m \vec{v}_i = \left(\vec{v}_i // m \vec{v}_i \Rightarrow \text{molto} \right)$$

$$= \cancel{\vec{L}} - \vec{v}_V \times \sum_i m_i \vec{v}_i$$

$$= - \vec{v}_V \times M_{\text{Tot}} \vec{v}_{\text{cm}}$$

$$b) \sum_i \vec{r}_i \times m \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \sum_i \vec{r}_i \times m \vec{a}_i$$

(10)

$$= \sum_i \vec{r}_i \times (\vec{F}_i^E + \vec{F}_i^I)$$

ove le forze sono tutte forze reali poiché il sistema di riferimento è inerziale.

(rispetto a cui è calcolata $\vec{J}$)

Definiamo: $\vec{L}^E = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^E$

momento totale delle forze esterne
rispetto al polo (nota non sono
tutte applicate nello stesso punto)

$$d) \vec{L}^I = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^I = 0$$

momento totale delle forze interne

Analizziamo d): Per ogni coppia di punti i, j

$$\vec{L}_{ij}^I = \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} + \vec{r}_j \times \vec{F}_{ji}$$

$$\vec{L}_{ij}^I = \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} + \vec{r}_j \times \vec{F}_{ji}$$

$$= (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{ij} = 0$$

è la congiungente di i e j e
quindi parallela a $\vec{F}_{ij}$

