

## Forze interne conservative

(2)

Il caso delle forze interne conservative è notevole per almeno due motivi

- ①\*  $\mathbb{F}_p^{(i)}$  dipende solo dalla configurazione del sistema (posizioni relative dei punti)
- ②\* Nei sistemi "elementari" di costituenti fondamentali le forze interne sono conservative (F. dissipative sono manifestazioni macroscopiche di forze fondamentali, associate alla presenza di molte particelle interagenti)

Per questi sistemi si può scrivere

$$W^{(e)} + W^{(i)} = \Delta E_K$$

$$W^{(e)} = -W^{(i)} + \Delta E_K' + \frac{1}{2} M v_{CM}^2$$

$$= \underbrace{\Delta \mathbb{F}_p^{(i)} + \Delta E_K'}_{\text{Energia interna del sistema}} + \frac{1}{2} M v_{CM}^2$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{Energia propria del sistema}}$$

Questa relazione mostra che il lavoro complessivo delle f. Esterne non incide solo sulla variazione dell'energia del CM, ma anche sulla energia interna.

Prima di vedere un esempio, Espressioni generali di  $\mathbb{F}_p^{(i)}$



## ESPRESSIONE GENERALE DI $\mathbb{E}_P^{(i)}$

Per forze interne conservative

$$\begin{aligned} W^{(i)} &= \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \vec{F}_{ij} \cdot d(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \quad (*) \\ &= - \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} dE_{ij} \end{aligned}$$

Dove  $-dE_{ij} = \vec{F}_{ij} \cdot d(\vec{r}_i - \vec{r}_j)$  definisce l'energia potenziale per l'interazione  $\vec{F}_{ij}$  per la coppia  $i, j$

Scegliendo un riferimento per  $\vec{r}_i$  si può scrivere per ogni coppia la funzione  $\mathbb{E}_P$  e per l'energia potenziale interna totale:

$$\mathbb{E}_P^{(i)} = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \mathbb{E}_P(\vec{r}_i, \vec{r}_j)$$

\* Significato del fattore  $\frac{1}{2}$ : Quando abbiamo scritto la relazione (\*), per esplicitare i termini di azione e reazione, abbiamo raddoppiato i termini e introdotto il fattore  $1/2$

\* Nel caso specifico significa che per ogni coppia di punti  $\mathbb{E}_P(\vec{r}_i, \vec{r}_j) = \mathbb{E}_P(\vec{r}_j, \vec{r}_i)$  e

$$\mathbb{E}_P(\vec{r}_i, \vec{r}_j) = \frac{1}{2} [\mathbb{E}_P(\vec{r}_i, \vec{r}_j) + \mathbb{E}_P(\vec{r}_j, \vec{r}_i)]$$



(4)

In altri termini il fattore  $1/2$  è un artificio  
 per sommare su tutti gli  $i$  e tutti i  $j$  senza  
 contare due volte l'interazione.

Tra due corpi mutuamente interagenti  
 conto 2 volte metà interazione.

[Nota: c'è interazione solo se ci sono  
 coppie di punti. Un punto non ha  
 interazione interna con se stesso (in  
 meccanica classica)]

L'interazione pertiene alla coppia non  
 al singolo punto.

Dunque ~~potrei scrivere~~ posso scrivere

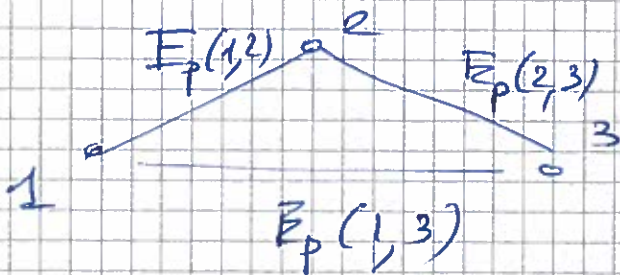
$$E_p = \sum_{i=1}^N \sum_{j>i}^N E_p(\vec{r}_i, \vec{r}_j)$$

$N(N-1)/2$  termini

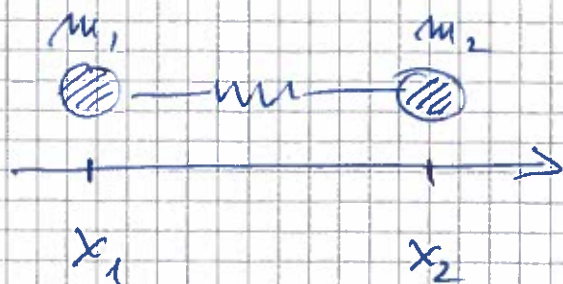
oppure

$$E_p = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i}^N E_p(\vec{r}_i, \vec{r}_j)$$

$N(N-1)$  termini  
 (ogni  $i$  a due  
 a due)





Esempio

$$F_{12} = -k(x_1 - x_2)$$

$$F_{21} = -k(x_2 - x_1)$$

L'allungamento della molla è "comune" e la forza si manifesta e entrambi gli estremi identica (molla ideale di massa nulla)

$$E_p = \frac{1}{2} k (x_2 - x_1)^2$$

oppure

$$E_p = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} k (x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{2} k (x_1 - x_2)^2 \right]$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} E_p(x_i, x_j)$$

Dunque: Fare attenzione quando si scrive  $E_p^{(i)}$  ai termini che si introducono!

o si somma sulle coppie  
oppure sui punti

$N$  - termini  
 $2N$  - termini  $\times \frac{1}{2}$

$\mathcal{H}(e)$  può incidere su  $E_p^{(i)} \rightarrow$  cambio config.  
 $E_k' \rightarrow$  cambio motorel.  
 $E_{CM} \rightarrow$  moto del CM

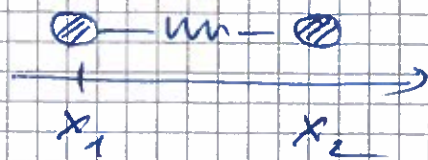
Vediamo il primo ~~e il secondo~~ caso  
(gli altri sono più banali)



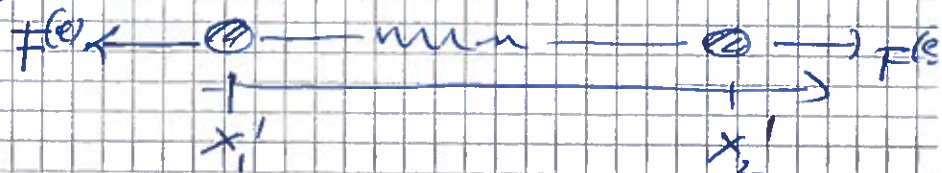
## Esempio Azione su un manubrio da ginnastica

(6)

1) Sonf. iniziali (riposo)



2) Conf. finali  $v_{f1} = v_{f2} = 0$



$$W^{(e)} = \Delta E_p^{(i)} = \frac{1}{2} k (\Delta x')^2 - \frac{1}{2} k (\Delta x)^2$$

Nella configurazione f), poiché le masse sono ferme, in equilibrio, le forze esterne sono bilanciate in ciascuna massa dalle forze interne (uguali e opposte) - dunque  $R^{(e)} = 0$

$W^{(i)}$  può modificare  $F_k'$  e  $E_p^{(i)}$  ma non il moto del CM, poiché è dovuto solo all'azione delle forze interne

$\Rightarrow$  Se le forze ~~interne~~ esterne sono rilasciate le forze interne di richiamo riportano le masse verso la condizione di riposo

$$v_{CM} = \text{cost} \quad x_{CM} = \text{fisso}$$

- Configurazione cambia  $\Delta E_p^{(i)} \neq 0$

- masse accelerano  $\Delta E_k' \neq 0$

Il moto è di oscillazione, ma un po' complicato

## URTI

Le relazioni introdotte sono utili nella descrizione degli urti tra due corpi

$$\vec{p}' = 0$$

→ qta' di moto conservata  
da SR del CM

$$\Delta E_K = \Delta E_K'$$

→  $v_{CM} = \text{cost}$  (re nell'urto)

$$x^{(i)}$$

→ spostamento di  
posizioni relative

Definiscono uno schema generale per  
l'analisi di Forze interne impulsive

Se  $x^{(i)}$  è dovuto a Forza impulsiva

$$x^{(i)} = \Delta E_K'$$

→ non c'è variazione  
di configurazioni  
durante l'azione  
della forza impulsiva

(Forze conservative non cambiano  $E_K$ )

Esempi URTI:

Lancio sassi / sparo cannoni  
Bocce / Biliardo (Elastico)  
Auto - (Anelastico)

Struttura della forza  $\longleftrightarrow$  Variazione di  $E_K$

Le collisioni possono essere usate per ricostruire la struttura dell'interazione

\*  $F = ma \rightarrow$  "C'è un'accelerazione, c'è una forza, trovala!"

\* Urto  $\rightarrow$  "C'è una collisione, c'è un'interazione, trovala!"



## URTI TRA DUE PONTI MATERIALI

\* URTO - Interazione tra due ponti ~~che vengono a contatto~~ ( $F$ . interne) in un intervallo di tempo  $\tau$  molto piccolo rispetto al tempo di osservazione del sistema

-  $\tau$  piccolo  $\Rightarrow$  ponti "fissi" nell'intervallo di tempo di interazione  $\tau$

- Forza impulsiva  $\Rightarrow$  Forza  $F(t) \neq 0$  solo per  $t \sim \tau$

Forza molto intensa:

$$\int_0^{\tau} F(t) dt = \text{finito per } \tau \text{ infinitesimo}$$

- E' forza interna di mutua interazione

Durante l'urto  $J(e) = 0$

• Si può assumere  $J(e) = 0$  (durante l'urto) anche se  $F(e) \neq 0$  ~~durante~~ poiché  $\tau$  è piccolo e l'ipotesi di Forza impulsiva significa  $F(t) \gg F(e)$

$$J(i) \gg J(e) \quad (F \text{ ext. trascurabile durante l'urto})$$

Conseguenze:

$$\vec{J}^{(ce)} = 0 \quad \text{durante l'urto}$$

$$\Rightarrow \Delta \vec{P} = 0 \quad \vec{F}_{in} = \vec{P}_{fin} = (m_1 + m_2) \vec{v}_{cm}$$

Dunque  $\vec{v}_{cm} = \text{cost}$  durante l'urto:

- il sist di riferimento del CM è riferimento inerziale durante l'urto
- Inoltre è il riferimento più comodo per descrivere le variazioni di moto interne al sistema

Perché  $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$  per la forza impulsiva

$$\vec{J}_{12} = -\vec{J}_{21} = \int_0^{\vec{t}} \vec{F}_{12} dt \neq 0$$

$$\Rightarrow \Delta \vec{p}_1 = \vec{J}_{12}$$

$$\Delta \vec{p}_2 = -\vec{J}_{12}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta \vec{p}_1 = -\Delta \vec{p}_2}$$

Variazioni di  
qta' di moto  
uguali e opposte

[ D'Alembert  $\Delta \vec{P} = 0$  significa

$$\Delta \vec{P} = \Delta (\vec{p}_1 + \vec{p}_2) = \Delta \vec{p}_1 + \Delta \vec{p}_2 = 0$$



## Energia nell'urto

T. EN. CINETICA :  $W = \Delta E_K$

per  $F^{(e)}$  trascurabili come nel caso di urti,  $W$  è dovuto solo a forze interne

$$\Delta E_K = W^{(i)}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{ij} \vec{F}_{ij} \cdot d(\vec{r}_i - \vec{r}_j)$$

invariante per tutti i riferimenti inerziali

Per ogni riferimento inerziale  $\Delta E_K = \Delta E_K' + \Delta E_{CM}$  particolare nel rif del cdm

$$E_K = \frac{1}{2} M \sigma_{CM}^2 + E_K'$$

$$\Delta E_K = \Delta \left( \frac{1}{2} M \sigma_{CM}^2 \right) + \Delta E_K'$$

$$= 0 \text{ poiché } \sigma_{CM} = \text{cost}$$

Variation dell'energia cinetica dovuta ai moti interni coincide con la variazione di en. cinetica in tutti i rif. inerziali (risultato ovvio per le ipotesi fatte e per il risultato generale che  $\Delta E_K = \Delta E_K'$  se agiscono solo  $F$  interne)



## Variatione di $E_k$ cinetica durante un urto

In generale :

- $\Delta E_k \neq 0$  ( $\dot{x}^i \neq 0$ )
- $F_{int}$  cons. e non conservative

$\Rightarrow \Delta E_k$  dipende solo dalle forze non conservative

Dimostrazione : Scomponiamo il teorema dell'energia cinetica durante l'urto nel contributo delle forze interne IMPULSIVE di natura cons. e non conservative :

$$\begin{aligned} \Delta E_k &= W_{nc}^{(I)} + \underbrace{W_{cons}^{(I)}}_{\substack{\text{Esprimibile} \\ \text{tramite } E_p}} \\ &= W_{nc}^{(I)} - \Delta E_p^{(I)} \end{aligned}$$

•  $E_p$  è una funzione delle coordinate dei punti (per ogni pto  $E_{p,i} = E_{p,i}(\vec{r}_i)$ )

• Durante un urto ( $\tau$  piccolo), punti fissi e spostam. trascurabili  $\Rightarrow \Delta E_p^{(I)} = 0$  | ossia il lavoro delle forze conservative impulsive è nullo -

$$\Rightarrow \Delta E_k' = W_{nc}^{(I)}$$

informazioni sulla struttura dell'interazione dall'analisi dell'urto

[Se ci sono solo forze conservative  $\Delta E_k' = 0$ ]



## CLASSIFICAZIONE DEGLI URTI

Si utilizza la variazione dell'energia cinetica in un urto per classificare gli urti:

$$1) \Delta E_K' = 0$$

URTO ELASTICO  
(non ci sono forze  
non conservative)

$$2) \Delta E_K' < 0$$

URTO INELASTICO  
dissipazione di  $E_K'$

$$3) \Delta E_K' = -E_K'(\text{in}) \quad \text{URTO COMPLETAMENTE INELASTICO}$$

→ dissipazione completa di  $E_K'$

$$4) \Delta E_K' > 0$$

URTO ESPLOSIVO  
 $E_K'$  aumentata dei  
loroi interni  
(esempio propulsione  
dei razzi o lancio  
del sasso)

$E_K'$  è l'energia relativa al CM. Sappiamo che durante l'urto  $\Delta E_K' = \Delta E_K$ , ma in generale  $E_K' \neq E_K$  (se  $v_{CM} \neq 0$ )



## DESCRIZIONE DEGLI URTI

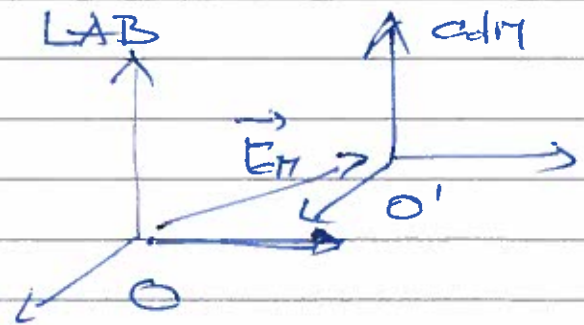
• Sistema del Laboratorio : SRI in cui  
 cui si compiono le osservazioni cinematiche  
 sui due corpi :  $m_1, m_2, \vec{v}_1$  e  $\vec{v}_2$

• Sistema del Cdm : SR (non necessariamente  
 inerziale) in cui si ha una descrizione  
 semplice dell'urto dinamico  $\left\{ \begin{array}{l} \vec{P}' = 0 \\ \Delta E'_K = W_{mc} \end{array} \right.$

### Procedimento :

1) Descrizione nel LAB :

$$\vec{v}_{cm} = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2}$$



Ricavo  $\vec{v}_{cm}$  rispetto al SRI del LAB

2) Passaggio al Cdm (SR in moto con  $\vec{v} = \vec{v}_{cm}$   
 ma senza rotazione di assi)

$$\vec{v}_i' = \vec{v}_i - \vec{v}_{cm} \quad i = 1, 2$$

3) Analisi dell'urto :  $\vec{P}' = 0 \Rightarrow \left[ \begin{array}{l} m_1 \vec{v}_1' = -m_2 \vec{v}_2' \\ \text{Prima ed equazione dell'urto} \end{array} \right]$

### 3) Analisi dell'urto nel CM:

Condizioni:  $\vec{P} = 0$  e  $\Delta \vec{P}' = 0$  (solo F. int.)

$$\Rightarrow m_1 \vec{v}_1' = -m_2 \vec{v}_2' \quad \text{Prima e dopo l'urto}$$

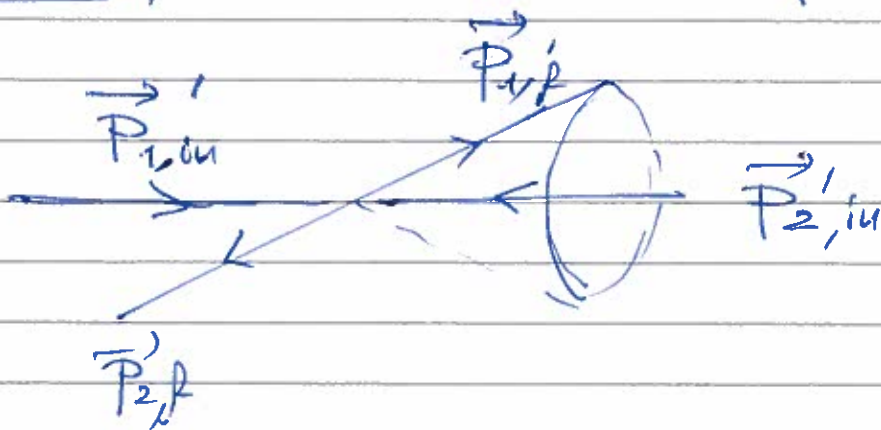
$$(*) \begin{cases} \vec{P}_{1,i}' = -\vec{P}_{2,i}' \\ \vec{P}_{1,f}' = -\vec{P}_{2,f}' \end{cases}$$

Stessi direzioni e moduli  
verbi opposti sia prima  
sia dopo l'urto

### 4) Ritorno al SRI del LAB

$$\vec{v}_{i,f} = \vec{v}_{i,f}' + \vec{v}_{cm} \quad i = 1, 2$$

Attention: In generale però  $\vec{P}_{1,f}' \neq \vec{P}_{1,i}'$



La condizione  $\Delta \vec{P}' = 0$  (3 equazioni scalari)  
non è sufficiente a determinare completamente  
l'urto - Vincola modulo e direzioni relative  
di  $\vec{P}_{1,f}'$  e  $\vec{P}_{2,f}'$ , ma non modulo e direzioni  
assolute della coppia



Lo stato finale di un urto ha 6 incognite

(10)

→ La condizione  $\Delta \vec{P} = 0 \Rightarrow \vec{P}_{1,f}' = -\vec{P}_{2,f}$   
definisce tre equazioni

→ Restano tre incognite indeterminate, ad esempio  $|p_f|, \theta, \varphi$  (oppure  $(p_x, p_y, p_z)_f$ )

Ulteriori condizioni cinematiche:

(1)  $\Delta E_k = \Delta E_k' = W_{nc} \Rightarrow$  Condizione su  $|p_f|$

(2) Reazioni vincolari  $\Rightarrow$  fissano le  
direzioni (angoli)

La relazione (1) connette in modo diretto  
la struttura dell'interazione ( $W_{nc}$ ) alla  
variazione di osservabili cinematiche -

\* Se la struttura dell'interazione è nota  
 $\Rightarrow$  previsione dello stato finale a  
partire dalla misura dello stato iniziale  
(o viceversa)

\*\* Oppure, misura della cinematica dell'urto  
(misura sperimentale di  $\vec{P}_{1,in}, \vec{P}_{2,in}, \vec{P}_{1,f}$  e  $\vec{P}_{2,f}$ )  
 $\Rightarrow$  indagine della struttura dell'interazione

Conditione su  $\Delta E_K'$

(variazione di  $E_K'$  nell'urto)

$$E_K' = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2$$

$$= \frac{1}{2} \frac{p_1'^2}{m_1} + \frac{1}{2} \frac{p_2'^2}{m_2} \quad (\vec{p}_1' = -\vec{p}_2')$$

$$= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) p_1'^2$$

$$= \frac{1}{2} \frac{p_1'^2}{\mu}$$

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

massa ridotta

$$\Delta E_K' = \frac{1}{2} \frac{p_{1,f}^2}{\mu} - \frac{1}{2} \frac{p_{1,i}^2}{\mu}$$

$$\boxed{p_{1,f}^2 = p_{1,i}^2 + 2\mu \Delta E_K'}$$

• La condizione su  $\Delta E_K'$  pone una condizione sul modulo di  $p_{1,f}$

• Nel caso di urto ELASTICO  $\Delta E_K' = 0$

$$|p_{1,i}| = |p_{1,f}|$$

Cambia solo la direzione (2 angoli)



## COLLISIONI ELASTICHE

$$\Delta E_k' = 0$$

$$E_{k,in} = E_{k,fin}$$

molte  $\left\{ \begin{array}{l} \vec{p}_{in} = \vec{p}_{fin} \\ \vec{p}_{1,p} = -\vec{p}_{2,p} \end{array} \right. \quad 4 \text{ equazioni}$

- Caso 3d : 2 incognite (direzioni  $\vec{p}, \vec{p}'$ ) non definite
- serve minima o altre condizioni vincolari

- Caso 2d - Restrizione vincolare che vincola l'urto in un piano ( $\vec{E}_s$ , biglie su tavolo da biliardo)

1 incognita sul piano -  $\vec{p}$  è duplo di diff.



- Caso 1d : 2 condizioni vincolari (URTO FRONTALE)

→ urto completamente determinato



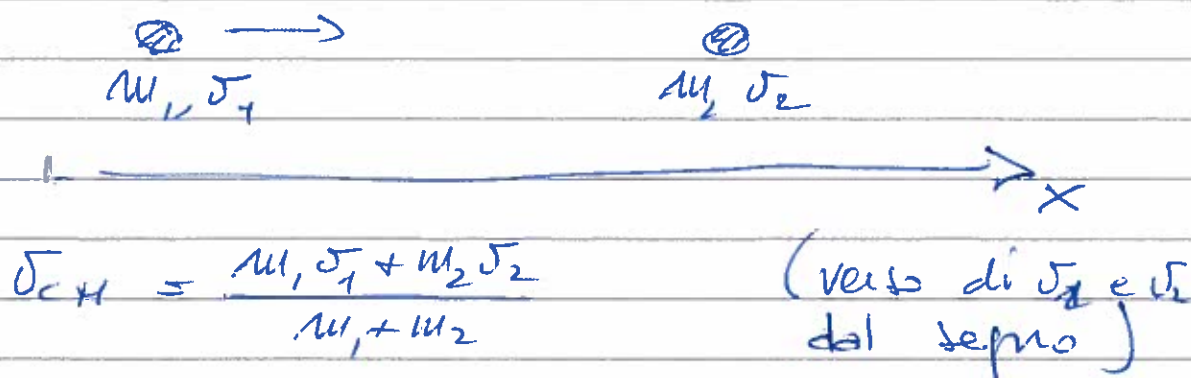
Nel cdM

$$\left\{ \begin{array}{l} p_{1,fin}' = -p_{2,fin}' \\ |p_{1,fin}'| = |p_{1,fin}'| \end{array} \right. \Rightarrow p_{1,fin}' = -p_{1,fin}'$$

(Perché  $\lambda_{in} = \lambda_{fin}$ )

# Esempio 1D: Urto Frontale elastico

## 1) SRT del Laboratorio



$$v_{CM} = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} \quad (\text{verso di } v_1 \text{ e } v_2 \text{ del segno})$$

## 2) SR del CM: $v_{j,i}' = v_{j,i} - v_{CM} \quad j=1,2$

## 3) Dinamica dell'urto elastico

$$\vec{p}' = 0 \text{ e } \Delta \vec{p}' = 0 : \begin{cases} p_{1,i}' = -p_{2,i}' \\ p_{1,f}' = -p_{2,f}' \end{cases}$$

$$\Delta E_K' = 0 : \begin{cases} p_{1,i}' = -p_{1,f}' \\ p_{2,i}' = -p_{2,f}' \end{cases}$$

$$\Rightarrow v_{j,f}' = -v_{j,i}'$$

## 4) SRT del LAB: $v_{j,f} = v_{j,f}' + v_{CM}$

$$v_{j,f} = v_{CM} - v_{j,i}' = 2v_{CM} - v_{j,i}$$

$$\begin{cases} v_{1,f} = 2 \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} - v_1 = \frac{(m_1 - m_2) v_1 + 2 m_2 v_2}{m_1 + m_2} \\ v_{2,f} = \frac{(m_2 - m_1) v_2 + 2 m_1 v_1}{m_1 + m_2} \end{cases}$$



## PROBLEMA - URTO IN 2D TRA BIGLIE UGUALI

Trovare la relazione tra angolo tra le direzioni delle biglie dopo l'urto, in un SRI in cui l'urto avviene tra una biglia in moto con velocità iniziale  $v_{in}$  e una biglia ferma:



Poiché in un urto impulsivo  $R^{(e)} = 0$ , la quantità di moto totale del sistema è conservata.

Nel caso specifico, si ha per lo stato iniziale:  $\vec{P}_{CM} = m\vec{v} = \vec{p}$  e per lo stato finale:

$\vec{P}_{CM} = m\vec{v}_A + m\vec{v}_B = \vec{p}_A + \vec{p}_B$ . Da cui:  $\vec{p} = \vec{p}_A + \vec{p}_B$  e, per i moduli:

$$p^2 = (\vec{p}_A + \vec{p}_B)^2 = p_A^2 + p_B^2 + 2\vec{p}_A \cdot \vec{p}_B = p_A^2 + p_B^2 + 2p_A p_B \cos \alpha$$

Questa relazione può essere scritta in termini di variazione dell'energia cinetica nell'urto (ossia di differenza di energia tra lo stato iniziale, prima dell'urto e lo stato finale, dopo l'urto). Per ciascun corpo:  $E_K = p^2/(2m)$  e dunque:

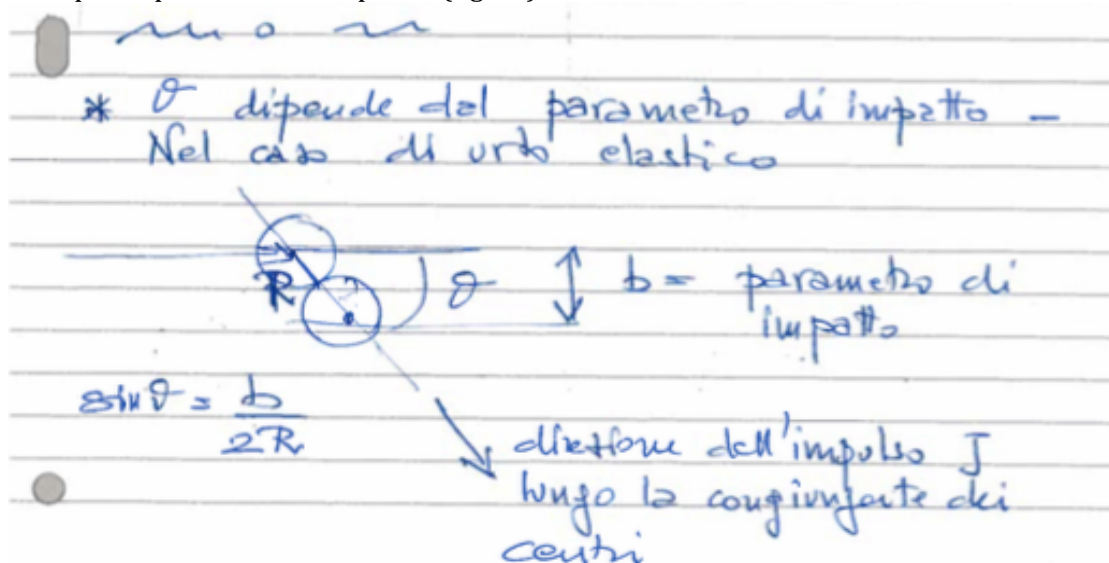
$$\Delta E_K = \Delta E_K' = -\frac{p_A p_B}{m} \cos \alpha$$

che fornisce la relazione cercata.

In particolare:

- urto elastico:  $\Delta E_K' = 0 \implies \alpha = 90^\circ$
- urto inelastico:  $\Delta E_K' < 0 \implies \alpha < 90^\circ$
- urto esplosivo:  $\Delta E_K' > 0 \implies \alpha > 90^\circ$

La variazione di energia cinetica definisce l'angolo tra le due biglie. Noto l'angolo di una biglia rispetto alla direzione iniziale, l'angolo della seconda è determinato dalla variazione dell'energia cinetica. Per conoscere l'angolo di diffusione (angolo tra la direzione della biglia entrante prima e dopo l'urto) occorre un'altra informazione. Ad esempio il "parametro di impatto" (figura):

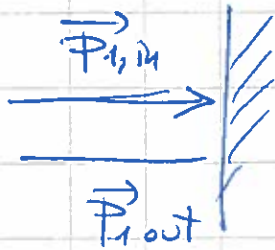


## URTO CONTRO PARETE (ELASTICO)

(15)

Urto di un punto materiale di massa  $m_1$  contro parete vincolata e non muoversi

ESEMPIO NON DISCUSO:  
SVOLGERE COME ESERCIZIO



$$\Delta \vec{p} = J$$

Passiamo descriverlo come urto tra due masse  $m_1$  e  $m_2$  con  $m_2 = \infty$  (Terra)

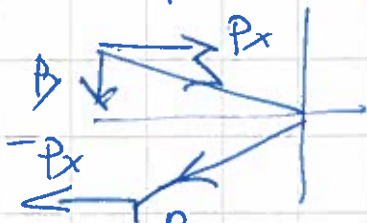
È il caso c) degli esempi precedenti

$$\begin{aligned} v_{1,in} &= -v_{1,f} \quad (\text{nel LAB}) \\ \rightarrow E_k(in) &= \frac{1}{2} m_1 v_{1,in}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1,f}^2 = E_k(f) \\ \rightarrow \Delta p_1 &= -2 p_1 \end{aligned}$$

Attention  $\Delta p_1 \neq 0$ , ma  $\Delta \vec{p}_{tot} = 0$  :  
la conservazione della quantità di moto  
è garantita da  $m_2 = \infty \Rightarrow \Delta p_2 = -\Delta p_1$   
anche per  $\Delta v_2 \approx 0$  perché  $m_2 = \infty$

\* Se l'incidente non è normale :

$$\Delta p_x = -2 p_x \quad \Delta p_y = \Delta p_2 = 0$$





# Altri esempi (Newton's cradle)



Sequenza di urti elastici



$$P_{in} = 3m\sigma$$

$$E_k(in) = 3\left(\frac{1}{2}m\sigma^2\right)$$

$$P_f = 3m\sigma$$

$$E_k(f) = 3\left(\frac{1}{2}m\sigma^2\right)$$

> q.s. configuratione richiederebbe

$$\sigma_f = 3\sigma \quad \text{per la condizione } \Delta \vec{P} = 0$$

e dunque  $E_k(f) = \frac{1}{2}m(3\sigma^2) > E_k(in)$

incoeristente con l'ipotesi di urto elastico

# URTI INELASTICI

(17)

- Caso generale  $\Delta E_K' < 0$
- Caso notevole  $\Delta E_K' = -E_{K,in}$  - tutta l'energia cinetica relativa al CM è dissipata nell'urto

$$E_K = E_K' + \frac{1}{2} M v_{CM}^2$$

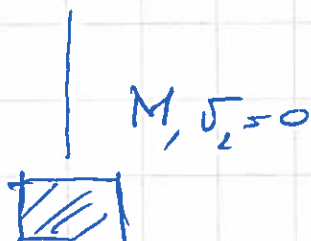
$$E_K'(in) = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2$$

$$E_K'(f) = 0 \quad \Rightarrow \quad v_1' = v_2' = 0$$

i due corpi sono fermi nel SR del CM  
→ rimangono attaccati e procedono  
con  $\vec{v}_1 = \vec{v}_2 = \vec{v}_{CM}$

Esempio: Pendolo balistico (monodim.)

$m v_1$   
→



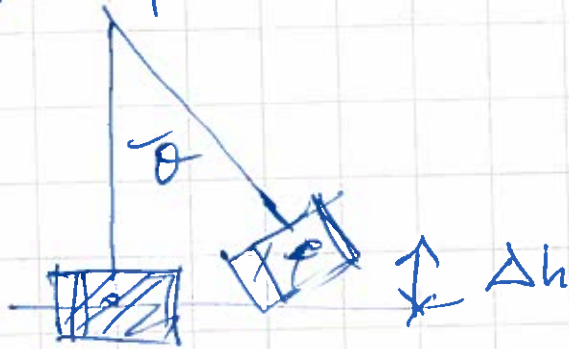
La pallottola si  
conficca nel  
pendolo dopo l'urto

$$v_{CM} = \frac{m}{m+M} v_1 \quad \rightarrow \quad \text{dopo l'urto} \quad v_{1f} = v_{2f} = v_{CM}$$

$$E_K(f) = \frac{1}{2} (m+M) v_{CM}^2 = \frac{1}{2} \frac{m^2}{(m+M)} v_1^2$$



Dopo l'urto l'energia meccanica è conservata - il pendolo si sposta dall'equilibrio fino ad una deviazione max, ~~per~~ dove tutta l'energia cinetica è convertita in energia potenziale;

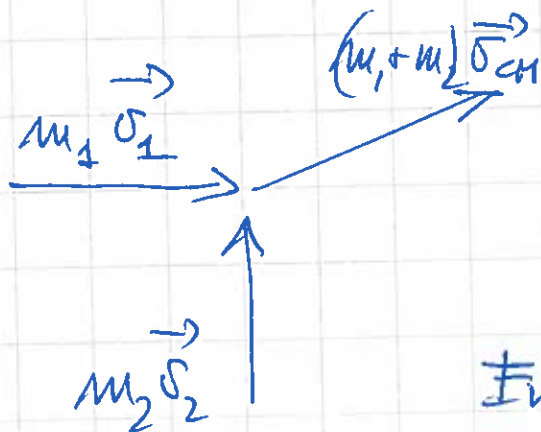


$$\Delta E_p = (m+M)g \Delta h$$

$$= (m+M)g L (1 - \cos \theta_{\max})$$

→ dalla misura della deviazione angolare si risale a  $v_{cm}$ , dall'urto a  $v_1$  -

Esempio: urto totalmente inelastico tra due auto (2D)



$$\vec{v}_{cm} = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2}$$

Energia dissipata:

$$- \Delta E_k = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_{cm}^2$$