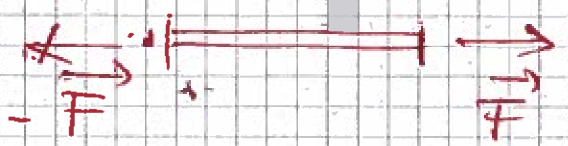
Forza elastica

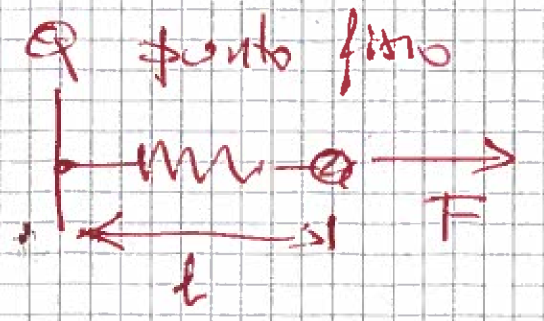
* Descrive resilienza dei materiali all'azioni di forze di trazione e compressione
* Dovuta a forze elettriche di coesione interne ai materiali
* Evidenza empirica: agendo con una forza di intensità F ai capi di un materiale (entrambi i capi)

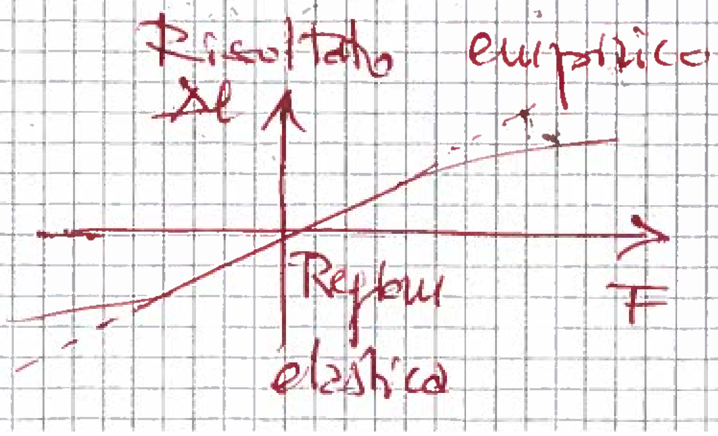


Il materiale si allunga o accorcia (a seconda del verso di F). Si deve agire con due forze uguali e opposte ai due capi, affinché il corpo rimanga globalmente fermo → deformazione statica. (Quando l'azione esterna cessa il corpo riassume la posizione iniziale)

→ Dunque esiste una forza interna che equilibra F → chiamiamo qs. forza **FORZA ELASTICA**

→ situazione schematica:

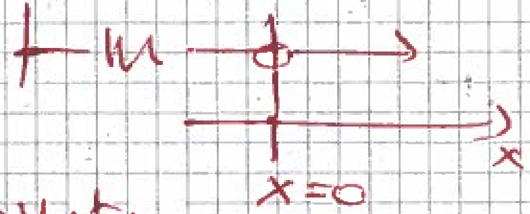




LEGGE DELLA FORZA ELASTICA

(molla ideale):

$$\vec{F} = -kx\,\vec{u}_x$$

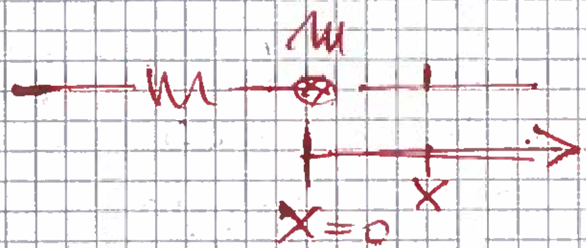


scegliendo $x=0$
nella posizione di molla rilassata

La forza è opposta allo spostamento dalla posizione di equilibrio (forza di richiamo)

Nel caso reale, il comportamento è lineare solo per un intervallo limitato di spostamenti

→ MOTO DEL PTO MATERIALE SOTTO L'AZIONE DI F. ELASTICA



Sia m in $x \neq 0$ con $v = 0$ (oppure in $x = 0$ con $v \neq 0$, o altre condizioni iniziali)

Eq. del moto (per scostamento dall'eq.)

$$-kx = ma$$ II legge di Newton

$$\boxed{m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0}$$

Eq del moto armonico sempl.

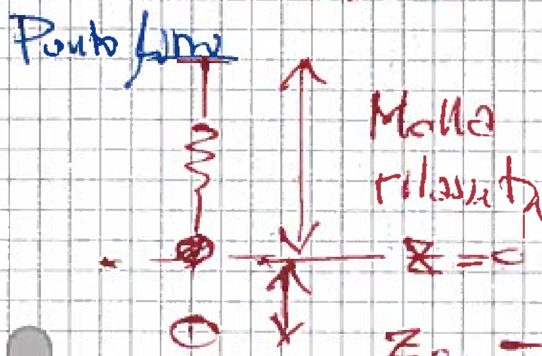
Conosciamo la soluzione (vedi cinematica e pendolo semplice) —

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

A = elongazione
φ — fase
} fissati da $x(0)$ e $v(0)$

$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ definito dalla dinamica del sistema

— MOTO IN PRESENZA DI ALTRA FORZA COSTANTE (PESO)



$mg - kz_0 = 0$ Eq. statica

$z_0 = \frac{mg}{k}$

z_0 — condizioni di equilibrio in presenza di Peso

— Spostiamo la massa dalla posizione di equilibrio $z_0 \neq 0$ e studiamo il moto —

$$mg - kz = ma \qquad a = \frac{d^2z}{dt^2}$$

Possiamo esprimere z come

$$z = z_0 + x \qquad x = z - z_0$$ spostam. dall'equilibrio

Eq. del moto per x:

$$mg - k(z_0+x) = m\frac{d^2}{dt^2}(z_0+x)$$

$$\underbrace{mg - kz_0}_{\text{condizioni di equilibrio: nullo}} - kx = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

$\Longrightarrow$ L'equazione del moto per x è

$$-kx = m\frac{d^2x}{dt^2} \rightarrow m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$$

$\rightarrow$ La massa m si muove di moto armonico semplice ~~attorno~~ nella variabile x ...

Dunque $z(t) = z_0 + \underbrace{x(t)}$

oscillazioni attorno al punto di equilibrio

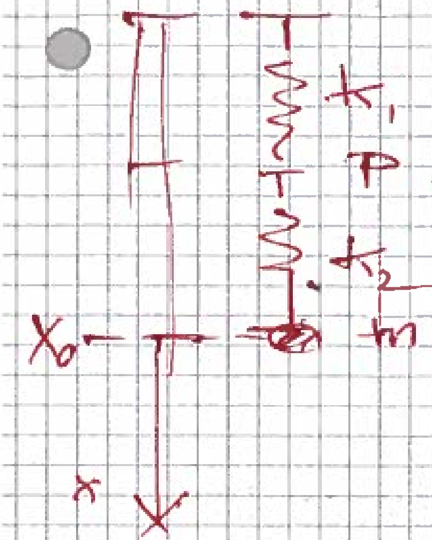
con $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

come nella condizione di molla rilassata

ESERCIZIO — DUE MOLLE IN SERIE

(ideali $m_{molla} = 0$)

$\longrightarrow$ Risultante delle forze ai capi della molla è nulla come per i fili ideali



P di massa nulla $m_P = 0$

m — — Equilibrio $x = x_0$

$$(1) \qquad -k x_2 = m a$$

allungamento di x_2

$$\begin{cases} x = x_1 + x_2 \\ -k x_1 + k x_2 = 0 \end{cases}$$

equilibrio di P vale durante il moto poiché $m_P = 0$

qs. relazioni danno

$$x = x_2 + \frac{k_2}{k_1} x_2 \Longrightarrow x_2 = \frac{k_1}{k_1 + k_2} x$$

Sost. in 1:

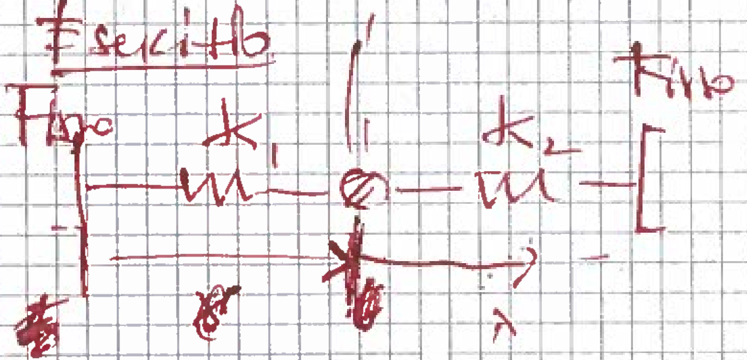
$$-\frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} x = m a$$

moto armonico con $\omega_0 = \left(\frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}\right) \frac{1}{m}$

cost. elastica molla equivalente

$$k = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$$

Esercizio



NOTA LE DUE F HANNO LO STESSO VERSO

Eq. moto piccole oscill. e equil. (relax a unità per autonomo –

$$\begin{cases} F_1 = -k_1 x \\ F_2 = +k_2(\cancel{l+}x) \end{cases}$$

misuro dal centro (Equilibrio) le forze sono concordi

oppure da O:

$$\begin{cases} F_1 = -k_1\left(x - \frac{l}{2}\right) \\ F_2 = +k_2\left(\frac{l}{2} - x\right) \end{cases}$$

sono concordi in x

Eq. $F_1 + F_2 = 0$

$$-k_1 x + k_1 \frac{l}{2} = k_2 \frac{l}{2} - k_2 x$$

$$(k_2 - k_1)x = (k_1 - k_2) l/2 \qquad x = l/2$$

ok

moto di m. uso la prima formula:

$$m a = F_1 + F_2$$
$$= -k_1 x - k_2 x$$

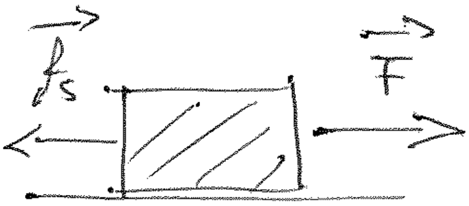
$$m a = -(k_1 + k_2)x$$

diff. delle cost

$$\omega \to T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1 + k_2}}$$

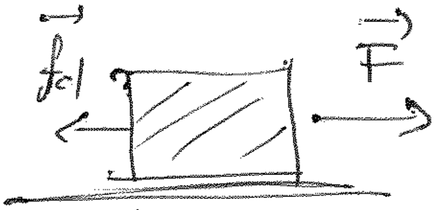
non capisco

F. Attrito radente   Empirica



$\vec{a} = 0$

attrito statico : $\vec{F} = -\vec{f_s}$



attrito dinamico

$\vec{a} \neq 0$
$\vec{F} + \vec{f_d} \neq 0$

$\longrightarrow \vec{a} = \dfrac{\vec{F} + \vec{f_d}}{m}$

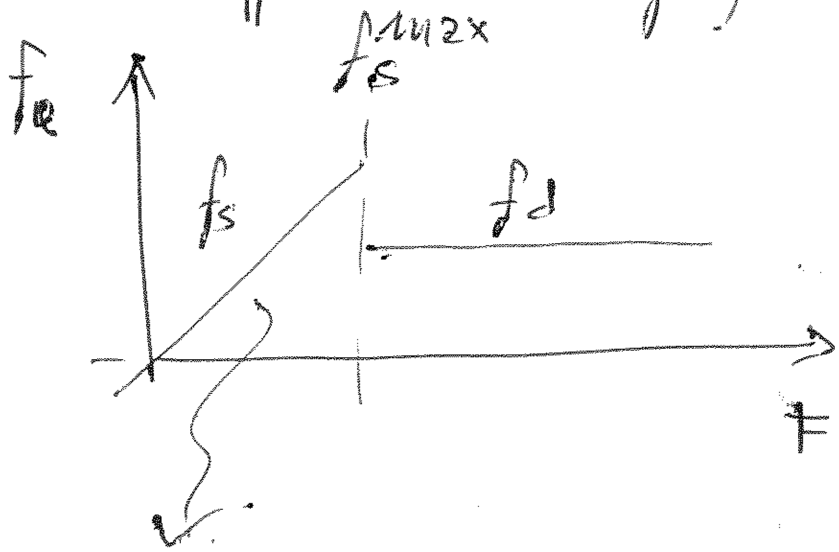
$a = \dfrac{F - f_d}{m}$

Dovuta a asperità, scabrosità superfici e forze di coesione elettriche – Si oppone allo scorrimento delle superfici l'una sull'altra (non è opposta al moto, ma allo scorrimento)

Analisi empirica – Tirando il corpo con F orizzontale (// superficie) di intensità crescente (controllabile con un dinamometro a molla) si nota 1) equilibrio ($\vec{a} = 0$) fino a una certa intensità, e poi 2) moto unif. accelerato con accelerazione $a = (F - f_d)/m$ –
L'analisi del moto rivela che f_d è indip. dall'intensità di F, ossia dall'acc. e dalla velocità del corpo m

$\longrightarrow$

Nella rappresentazione grafica:



1) Attrito statico dipende dall'intensità di F

→ non ho una legge della forza, ma devo determinare f_s dalla situazione statica in esame, controllando le forze (parallele alla superficie di scorrimento) in azione

→ Per via sperimentale si è trovata una relazione tra f_s^{max} e N:

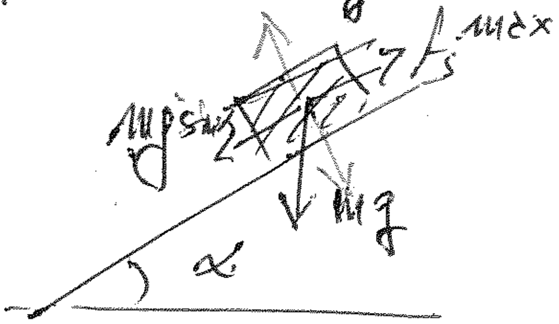
$$f_s^{max} = \mu_s N$$

N = forza normale

μ_s = coefficiente di attrito statico

Esempio: Condizioni di attrito statico su un piano inclinato –

Si trovi l'angolo massimo per cui un oggetto su un piano inclinato in presenza di forza peso ~~rimange~~ rimane in equilibrio:



Le condizioni di equilibrio determinano le seguenti relazioni per i moduli di f_s^{max}, N e delle componenti di $\vec{mg}$ lungo il piano e la normale:

$$f_s^{max} = mg \sin\alpha_{max}$$

$$N = mg\cos\alpha_{max}$$

Da $f_s^{max} = \mu_s N$ (*) si ricava:

$$\mu_s = tg\,\alpha_{max}$$

→ Questo metodo permette la misura di μ_s –

→ Si noti che m non compare nella relazione finale – Si può verificare sperimentalmente ~~che α_{max} è indip. da m per superfici~~

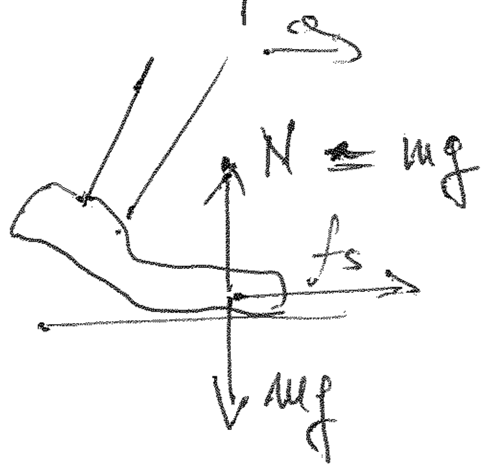
che α_{max} e quindi μ_s in qs. configurazione risulta indipendente da m (per superficie di contatto identica) -

Questo conferma la validità di (*). -

→ visitare http:// virgilio.mib.infn.it/~ttf /BeSmart/SmartExp.html

per un "kit" che permette la realizzazione di questo esperimento con un cellulare

Esempio 2 : Max accelerazione durante la camminata -



La spinta per camminare è dovuta a f_s esercitata dal terreno sul piede per opporsi allo scorrimento della suola

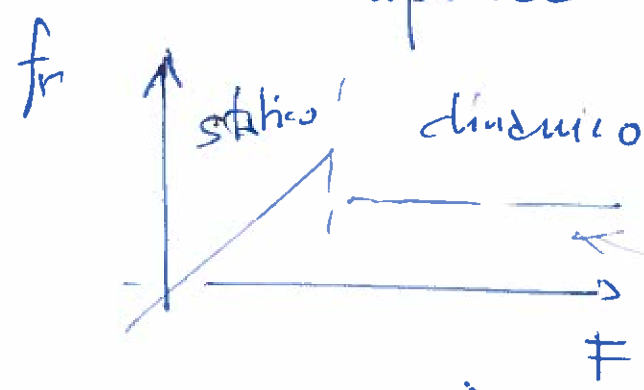
$$\longrightarrow \quad ma = f_s^{max} = \mu_s mg$$

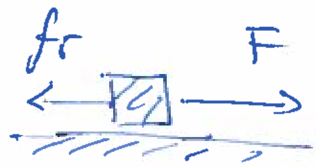
$$\Longrightarrow \quad \boxed{a = \mu_s g} \quad \text{non dipende da } m$$

Nota a è l'accelerazione del camminatore; la suola è ferma rispetto al terreno; l'attrito è statico

Forza Attrito radente dinamico

Evidenza empirica





moto unif. accelerato

$ma = F - f_d$

con intensità di f_d indip. dalle condizioni di moto

$$f_d = -\mu_d |\vec{N}| \hat{u}_s$$

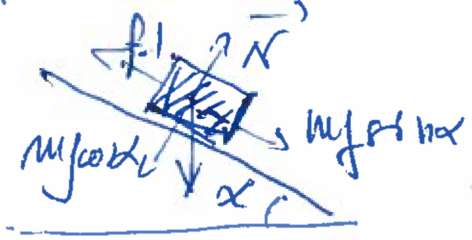
LEGGE DELLA FORZA

- μ_d coeff. di attrito dinamico ($\mu_d \neq \mu_s$) caratteristico dei materiali e della superf.
- direzione e verso opposto allo scorrimento delle superfici
- $\vec{N}$ forza normale

Nota: La legge della forza è valida solo quando c'è moto. Bisogna verificare che le condizioni dinamiche del problema realizzino le condizioni per cui si instaura ~~un~~ l'attrito dinamico

Esempio 1

Scivolamento di un blocco (di massa m) su piano inclinato di un angolo α e con $\mu_d \neq 0$



$$f_d = \mu_d |\vec{N}|$$
$$= \mu_d mg\cos\alpha$$

Moto lungo il piano:

$$ma = mg\sin\alpha - \mu_d mg\cos\alpha$$
$$a = g(\sin\alpha - \mu_d\cos\alpha)$$

L'accelerazione è $a > 0$ per $\boxed{\sin\alpha - \mu_d\cos\alpha > 0}$

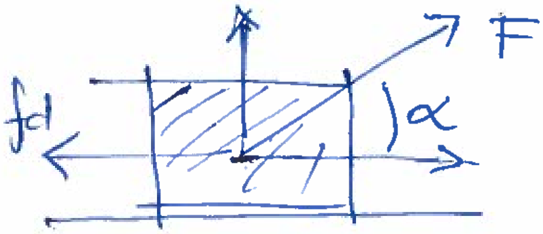
- Se la soluzione dà $a = 0$ o negativa, non è una soluzione accettabile.
  - Per $a = 0$ l'attrito è statico e non si può usare la legge di forza dell'attrito dinamico
  - Per $a < 0$ f_d avrebbe ~~dir~~ verso opposto

NOTA GENERALE: Si deve sempre discutere la condizione di validità per l'uso della legge di forza dell'attrito dinamico

IMP.

* È importante riconoscere correttamente $\vec{N}$, poiché $f_d = \mu_d |\vec{N}|$

= Esempio 2 : trascinamento di un blocco di massa m su un piano scabro con $\mu_d \neq 0$ & - Trovare la direzione di F rispetto al piano, per $|\vec{F}| = cost$ che rende massima l'accelerazione, ossia l'angolo ottimale di azione della forza [Nella pratica: a che angolo devo tirare la fune?]



$$|\vec{N}| = mg - F\sin\alpha$$

Moto lungo il piano:

$$ma = F\cos\alpha - \mu_d|\vec{N}|$$
$$= F\cos\alpha - \mu_d(mg - F\sin\alpha)$$

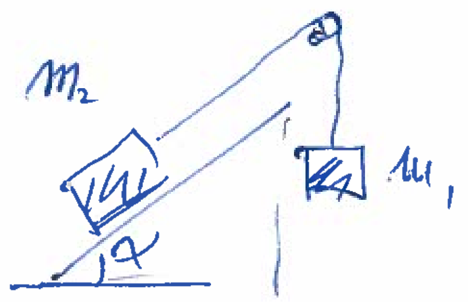
Accelerazione max quando risultante della forza lungo il piano è max - Ossia:

$$\frac{dR_x}{d\alpha} = \frac{d}{d\alpha}\left(F\cos\alpha - \mu_d mg + \mu_d F\sin\alpha\right) = 0$$

Soluzione: mu_d = tg(alpha)

Esercizio

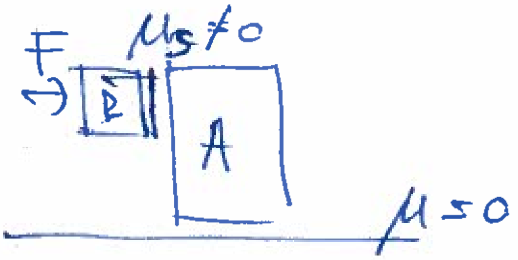
Moto su piano inclinato ($\alpha \neq 0$) con attrito ($\mu_d \neq 0$) di un blocco unito ad altro blocco con fune ideale.
Si trovino a e T, si discuta la condizione sulle masse affinché vi sia accelerazione e il verso dell'accelerazione



Suggerimento

Porre attenzione al verso di f_d - deve essere verificato che risulti opposto all'acc. del blocco m_2

Esercizio

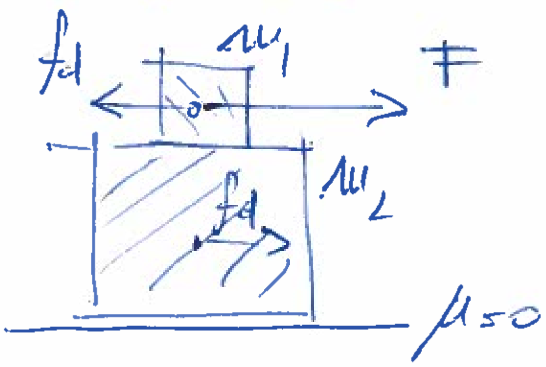


F - spinge B contro A
tra A e B superficie con attrito -
Si trovi F_{min} affinché il corpo B non scivoli verso il basso

* Caso facile $\mu = 0$ con il piano
* Caso medio $\mu \neq 0$
(Fare p.s. solo dopo aver risolto quello facile)

Esercizio notevole che mostra la differenza tra le affermazioni "l'attrito si oppone al moto" (sbagliata) e "l'attrito si oppone allo scorrimento delle superfici" (corretta) –

Es.: Trovare l'accelerazione di due blocchi sovrapposti di massa m_1 e m_2 con $\mu_d \neq 0$ tra essi e con il corpo di massa m_2 libero di scorrere su un piano liscio ($\mu = 0$) – Sia la forza F applicata al corpo di massa m_1 costante e orizzontale –



Eq. del moto:

m_1: $m_1 a_1 = F - f_d$

$m_2 a_2 = f_d$

$f_d = \mu_d m_1 g$

Il corpo m_2 si muove sotto l'azione della forza di attrito (reazione all'attrito che il corpo m_1 subisce da m_2)

→ Importante (ma non discusso in aula) (10)

La condizione affinché vi sia attrito dinamico (ossia scorrimento di m_1 su m_2) richiede:

$$a_1 > a_2$$

$$\frac{F - f_d}{m_1} > \frac{f_d}{m_2}$$

Cioè $F > \frac{m_1 + m_2}{m_2} f_d = \frac{m_1 + m_2}{m_2} \mu_d m_1 g \equiv F_{min}$. (*)

* Per $F \leq F_{min}$, si cade nella condizione di attrito statico e i corpi si muovono con la stessa accelerazione. Le equazioni sono

$$\begin{cases} F - f_s = m_1 a \\ f_s = m_2 a \end{cases} \Rightarrow \quad F = (m_1 + m_2) a \qquad f_s = \frac{m_2}{m_1 + m_2} F$$

Perché l'attrito sia statico, deve essere

$$f_s \leq f_s^{max} = \mu_s m_1 g \qquad (**)$$

Verificare per esercizio che per $F \leq F_{min}$ (*), la condizione (**) è necessariamente sempre soddisfatta (purché $\mu_d \leq \mu_s$, che è sempre il caso)

Forza di attrito viscoso

- Caratteristico del moto di oggetti nei fluidi
- Forza di attrito proporzionale alla velocita' <u>relativa</u> del corpo nel mezzo
- Legge della forza (empirica):

$$\vec{F}_a = -\eta \vec{v} \qquad (\eta \text{ costante})$$

Osservazione empirica: Una forza esterna costante $\vec{F}_T$ che agisce sul corpo determina un moto asintotico (a tempi grandi) con velocita' costante (v_T di trascinamento)

<u>Es. con v. iniziale</u> nulla:

$t = 0$	$\bullet \xrightarrow{F_T}$	$v_0 = 0$	$a_0 = F_T/m > 0$
$t_1 > t_0$	$\leftarrow \bullet \xrightarrow{F_T}$	$v_1 > 0$	$a_1 = (F_T - F_a)/m < a_0$
$t_2 > t_1$	$\leftarrow \bullet \rightarrow$	$v_2 > v_1$	$a_2 = \dots < a_1$
$\vdots$			
t grande	$\vec{F}_a = -\vec{F}_T$	$v = v_T$	$a = 0$

$\rightarrow$ Equilibrio dinamico con $\eta v_T = F_T$

Es. con v. iniziale $v > v_T$

$t = 0$ $\quad \overleftarrow{\vec{F}_a} \cdot \overrightarrow{\vec{F}_T}$ $\quad v_0 > v_T \quad a_0 = (F_T - F_a)/m < 0$

$t_1 > 0$

t grande $\quad \vec{F}_a = -\vec{F}_T \quad v = v_T$

- In qs. caso il corpo decelera, perché l'intensità della forza di attrito viscoso è in modulo all'inizio maggiore della forza di trascinamento

- In entrambi i casi si raggiunge una condizione di equilibrio dinamico (v = cost) con $v_T = F_T/\eta$ (v_T prop. a F_T)

$\longrightarrow$ condizione di ~~regime~~ moto stazionario

- Durante il periodo iniziale, la velocità evolve nel tempo - cresce o decresce a seconda del valore iniziale di v_0

- Scriviamo l'equazione del moto in presenza di forza viscosa e F_T = cost per vedere come evolve il moto $\longrightarrow$

Eq. dinamica del moto viscoso

$$\boxed{F_T - \eta v = m a}$$

Poniamo $v_T = \dfrac{F_T}{\eta}$ e $k = m/\eta$ → l'equazione diventa

$$\boxed{v_T - v = k \frac{dv}{dt}} \xrightarrow{\text{oppure}} \boxed{\frac{dv}{v - v_T} = -k\,dt}$$

Qs. equazione è vera sempre, anche nel caso $F_T = 0$ – Risolviamo, per iniziare, questo caso

CASO A: $F_T = 0$ con $v_0 \neq 0$ → $v_T = 0$ (condizione di moto stazionario)

Qs. condizione rappresenta il caso, ad esempio, del moto di un proiettile sparato in un bersaglio –

L'equazione diventa

$$\frac{dv}{v} = -kt \xrightarrow{\text{integro}} \underline{v(t) = A e^{-kt}}$$

Soluzione generale

Grafico di $v(t)$

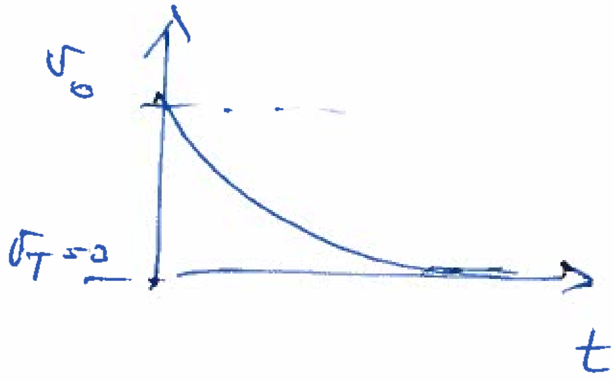
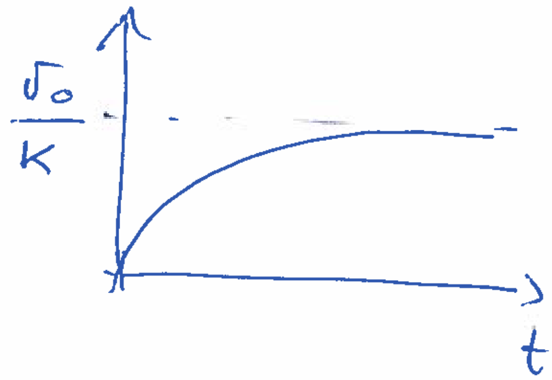


Grafico di Δx



Troviamo il percorso del proiettile nel bersaglio

$$\Delta x(t) = \int_0^t v(t)\,dt = \int_0^t v_0 e^{-kt}\,dt = \left[-\frac{v_0}{k} e^{-kt}\right]_0^t$$

$$= \frac{v_0}{k}\left(1 - e^{-kt}\right) \xrightarrow[t \to \infty]{} \frac{v_0}{k}$$

- Il percorso del proiettile è <u>finito</u>, anche se la velocità tende a zero asintoticamente e non è mai davvero nulla -

Nella realtà, qs descrizione è solo approssimata
la forza viscosa è una rappresentazione empirica della forza in un mezzo continuo dovuto alle interazioni elementari tra i costituenti discontinui -

Eq. dinamica del moto viscoso

$$\boxed{F_T - \eta v = m a}$$ Valida per ogni valore di F_T (anche $F_T = 0$)

Poniamo $v_T = F_T/\eta$ e $k = m/\eta$

$$\Longrightarrow \quad v - v_T = -k \frac{dv}{dt}$$

oppure $$\frac{dv}{v - v_T} = -k\,dt \qquad (*)$$

Risolviamo un caso semplice, che rappresenta ad esempio il moto di un proiettile scagliato in un bersaglio :

Caso A : $F_T = 0$ e $v_0 > 0$

Per $F_T = 0$ la velocità di trascinamento $v_T = 0$ e l'eq. (*) diventa :

$$\frac{dv}{v} = -k\,dt \xrightarrow{\text{integro}} v(t) = A e^{-kt}$$

La costante A è definita dalla condizione iniziale del moto $v(0) = v_0 \Longrightarrow A = v_0$

CASO B $\quad F_T \neq 0$

$$v_T = F_T/\eta \neq 0$$

Equazione del moto ha la forma

$$v - v_T = -k\frac{dv}{dt}$$

oppure: $\quad v + k\frac{dv}{dt} = v_T \qquad (**)$

Cerchiamo una soluzione per qu. equazione

1) La funzione $v(t) = v_T$ cost.

è una soluzione particolare, come si può verificare per sostituzione $\left(\frac{dv}{dt} = 0\right)$

- Descrive il comportamento asintotico, ma non l'evoluzione a tempi piccoli

2) La soluzione generale è la somma della soluzione particolare + una funzione v_1 t.c. $v_1(t) + k\frac{dv_1}{dt} = 0$ — Infatti

$v(t) = v_T + v_1(t)$ risolve $(**)$

Poiché $\quad v + k\frac{dv}{dt} = \underbrace{v_T + k\frac{dv_T}{dt}}_{v_T} \underset{+}{+} \underbrace{v_1 + k\frac{dv_1}{dt}}_{0} = v_T$

Conosciamo già dal caso A le soluzioni dell'equazione $v_1(t) + k\frac{dv_1}{dt} = 0$

$$v_1(t) = Ae^{-kt}$$

Dunque la soluzione generale è

$$\boxed{v(t) = v_T + Ae^{-kt}}$$

con A definita dalle condizioni iniziali del moto: $v(0) = v_T + A$ ($e^{-kt} = 1$ per $t=0$)

B.1) Per $v(0) = 0 \Longrightarrow A = -v_T$

$$v(t) = v_T(1 - e^{-kt})$$

B.2) Per $v(0) = v_0 \Longrightarrow A = v_0 - v_T$

$$v(t) = v_T + (v_0 - v_T)e^{-kT}$$