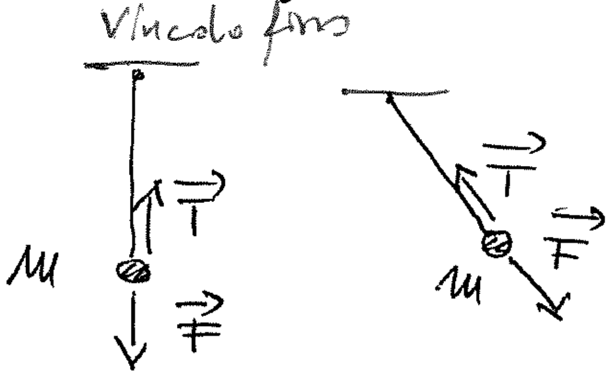
Tensione del filo

Oss. empirica: Si realizzano condizioni **statiche** ($\vec{a}=0$) sotto l'azione di $\vec{F}$ esterna con ~~il~~ filo teso nella direzione di $\vec{F}$



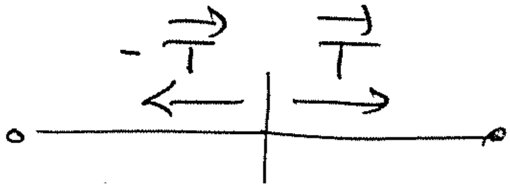
$\Rightarrow$ Reazione vincolare del filo che equilibra $\vec{F}$

$\vec{T} = -\vec{F}$

Filo ideale: i) inestensibile, ii) massa nulla (trascurabile)

~~Poiché~~

- In equilibrio ($\vec{a}=0$) in <u>ogni punto</u> del filo deve essere $\vec{T} = -\vec{T}$ entrambi estremi.



$\exists$ $\vec{T} \neq 0$ lungo il filo, perché se viene tagliato gli estremi accelerano

- Alle estremità del filo $|\vec{T}| = |\vec{F}|$ con $\vec{F}$ forza esterna

- In condizioni statiche $\vec{F} = -\vec{F}$ ai due estremi (poiché il filo è fermo)

FILO IN MOVIMENTO: $\vec{a} \neq 0$

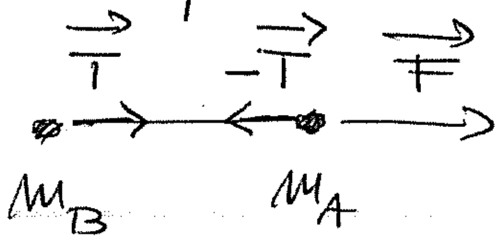
- Poiché $m = 0$ (filo ideale), in ogni pto del filo $\sum \vec{F} = 0$, ossia $\vec{T} = -\vec{T}$

$\Longrightarrow$ Filo teso con tensione identica in tutti i punti anche per $\vec{a} \neq 0$

- Però $\vec{T}$ non è uguale alla forza esterna in questo caso, ma il suo valore dipende dalla situazione dinamica

SOTTOLINEA GLI ASPETTI GENERALI DI COME SI ANALIZZA UN SISTEMA

Esempio



* SERVE AZIONE E REAZIONE

- $\vec{F}$ esterna applicata a m_A
- m_A e m_B legate da filo inestensibile $\longrightarrow$ Stessa accelerazione

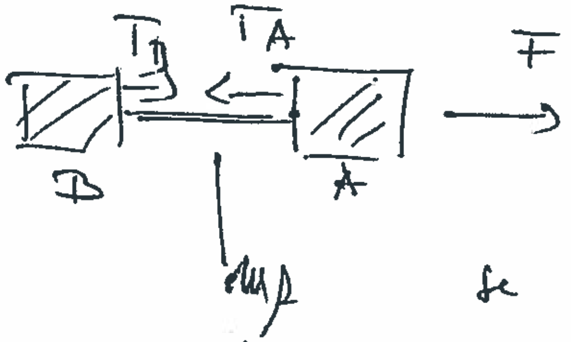
Eq. dinamica (lungo l'asse di $\vec{F}$ e $\vec{T}$):

$$\begin{array}{ll} \text{corpo A:} & \left\{ \begin{array}{l} F - T = m_A a \\ T = m_B a \end{array} \right. \\ \text{corpo B:} & \end{array}$$

$$\Longrightarrow \quad a = F/(m_A + m_B) \equiv F/M_{TOT}$$

$$T = \frac{m_B}{m_A + m_B} F < F$$ Tensione inferiore a F

Filo di $m \neq 0$ —



a = comune

se $m_f \neq 0$ $\quad m_f a \neq 0$

dunque $\vec{T}_B + \vec{T}_A = m_f \vec{a} \neq 0 \Longrightarrow \vec{T}_A \neq -\vec{T}_B$

<u>3 equazioni</u> —

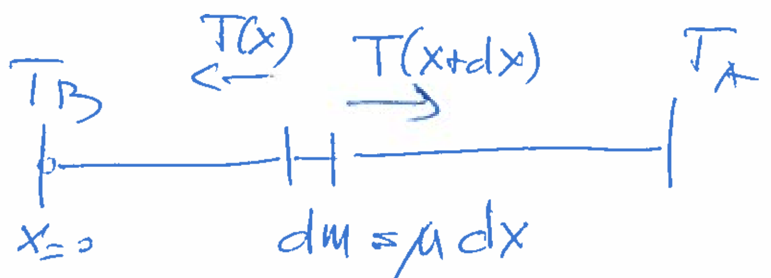
$$\begin{cases} F - T_A = m_A a \\ T_A - T_B = m_f a \\ T_B = m_B a \end{cases} \longrightarrow \quad a = \frac{F}{m_A + m_B + m_f} = \frac{F}{M}$$

$$T_B = \frac{m_B}{M} F$$

$$T_A = T_B + \frac{m_f}{M} F$$

Se la massa cambia linearmente con x posso calcolare la tensione in ogni punto x

$$T(x) = T_B + \frac{m_f}{M} F \frac{x}{d} \qquad \text{per } x \text{ da } x_B = 0 \text{ a } x_A = d$$



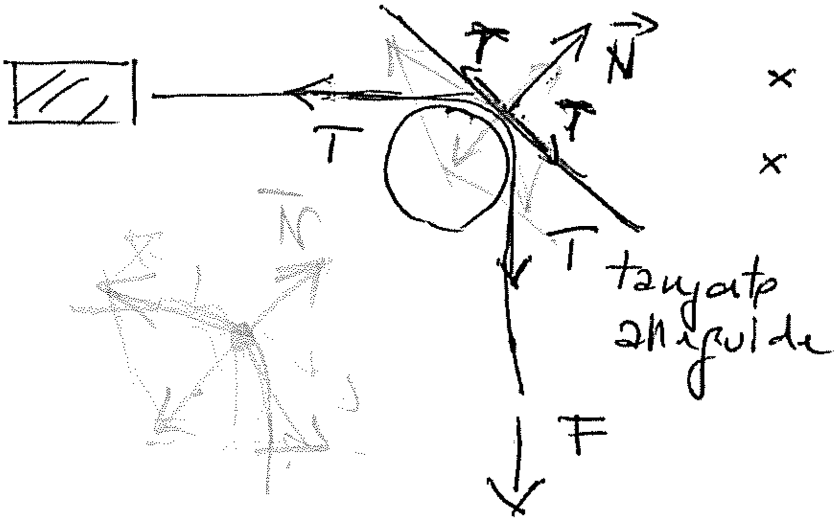
<u>FACILE</u>

$$a\,dm = T(x+dx) - T(x)$$

$$a \mu\, dx = dT \longrightarrow \text{integro}$$

$$a \mu x = T(x) - T_B \Longrightarrow T(x) = T_B + \underbrace{\mu}_{\frac{m_f}{d}} \frac{F}{M} x$$

Fili e guide (prive di attrito)



× Tensione del filo
× Forza normale della guida

Per $m_{filo} = 0$, risultante delle forze in ogni punto del filo nulla

Localmente (nel punto), la tensione è diretta lungo la tangente alla guida e $\vec{T} = -\vec{T}$

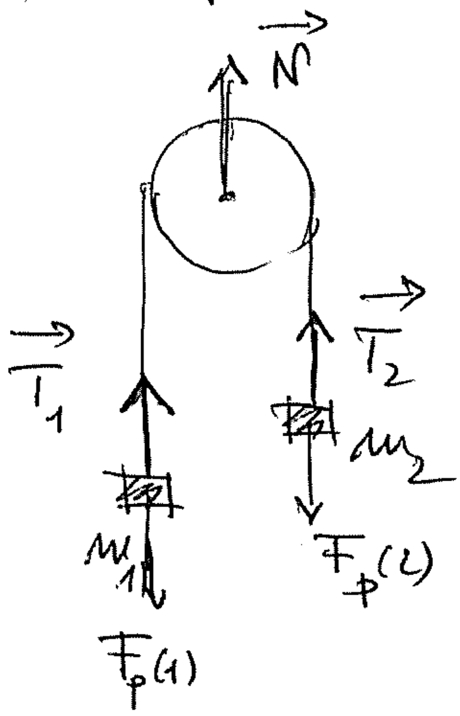
→ $\vec{T}$ si trasmette lungo il filo

- il modulo è costante
- la direzione è lungo il filo

Per trovare il valore di T e N bisogna risolvere il problema dinamico, caso per caso

Nota: Per limitare l'attrito le guide sono spesso equipaggi mobili (carrucole) → di massa nulla

Esempio : Macchina di Atwood



- $\vec{T_1} = \vec{T_2} = \vec{T}$ stessa direzione e modulo
- Filo inestensibile
  → stessa accelerazione versi ~~direzioni~~ opposte
- $\vec{F}_p(1) = m_1 g$
- $\vec{F}_p(2) = m_2 g$
- N sostiene l'equipaggio ma non agisce su m_1 e m_2

Eq. del moto per m_1 e m_2 (direz. verticale)

$$\begin{cases} m_1 a = m_1 g - T \\ -m_2 a = m_2 g - T \end{cases}$$

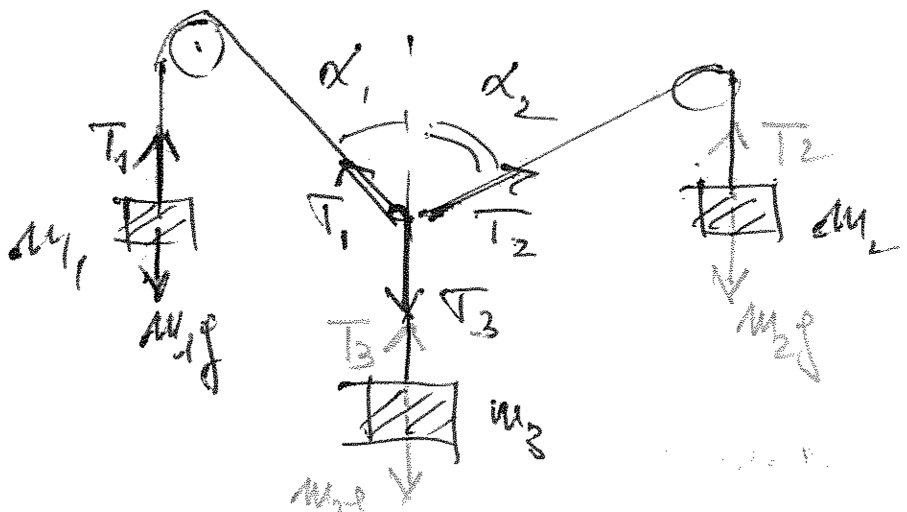
(acc. con segno opposto)

$$\begin{cases} a = \dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g \\ T = 2 \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g \end{cases}$$

- verso l'alto m_2 se $m_1 > m_2$
- verso l'alto m_1 se $m_2 > m_1$

Per $m_1 \simeq m_2$ $a << g$, metodo per misurare a con precisione non limitata dalla precisione del cronometro (critica nel passato)

Esempio : Esperimento di VARIGNON



La condizione di equilibrio per il punto P è

$$\vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \vec{T}_3 = 0 \qquad (\text{acc. nulla})$$

Qs. condizione impone una relazione tra angoli e masse, che discende dalla def. di somma vettoriale. La misura di m_1, m_2, m_3 e degli angoli permette di verificare per via sperimentale che le forze si sommano vettorialmente. Troviamo la relazione tra m_i $(i=1,..3)$ e α_1, α_2 per la condizione di equilibrio ($\vec{a} = 0$ per tutti i corpi)

Per ogni corpo : $T_i = m_i g$ in modulo

$$\left[\ \vec{T}_i + m_i \vec{g} = 0 \quad \Rightarrow \vec{T}_i = -m_i \vec{g}\ \right]$$

Inoltre:

Eq. di P lungo la verticale:

$$m_3 g = m_1 g \cos\alpha_1 + m_2 \cos\alpha_2 \qquad (1)$$

Eq. di P lungo l'orizzontale:

$$m_1 g \sin\alpha_1 = m_2 g \sin\alpha_2 \qquad (2)$$

$\longrightarrow$ misuro α_1, α_2, m_1, m_2, m_3 e verifico

Oppure, rispetto a $\underline{\vartheta = \alpha_1 + \alpha_2}$

Dalla (1): $m_3^2 = m_1^2 \cos^2\alpha_1 + 2 m_1 m_2 \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 + m_2^2 \cos^2\alpha_2$

$$2 m_1 m_2 \cos(\alpha_1 + \alpha_2) + 2 m_1 m_2 \sin\alpha_1 \sin\alpha_2$$

$$2 m_1 m_2 \cos\vartheta + \underbrace{m_1^2 \sin^2\alpha_1 + m_2^2 \sin^2\alpha_2}_{\text{Usando le (2)}}$$

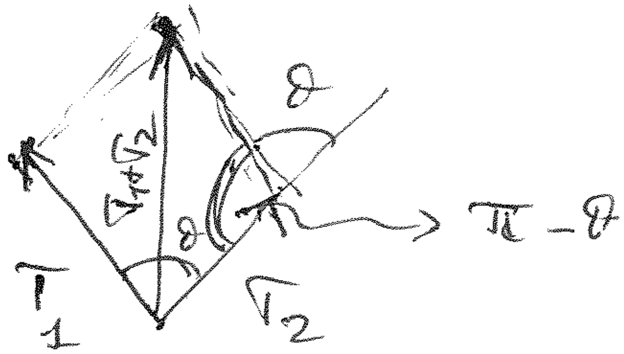
m_1^2 $\qquad$ m_2^2

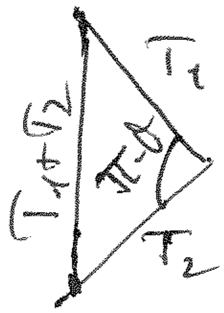
Ricombinando:

$$m_3^2 = m_1^2 + 2 m_1 m_2 \cos\vartheta + m_2^2$$

In modo più semplice possiamo utilizzare il teorema del coseno (o teorema di Carnot) applicato alla ~~prima~~ somma di vettori:

$$-\vec{T}_3 = \vec{T}_1 + \vec{T}_2 \Rightarrow |\vec{T}_3| = |\vec{T}_1 + \vec{T}_2|$$





Per il teorema del coseno (generalizzazione del teorema di Pitagora):

$$|\vec{T}_1 + \vec{T}_2|^2 = |\vec{T}_1|^2 - 2|\vec{T}_1||\vec{T}_2|\cos(\pi - \vartheta) + |\vec{T}_2|^2$$

$$|\vec{T}_1 + \vec{T}_2|^2 = T_1^2 + 2\, T_1 T_2 \cos\vartheta + T_2^2$$

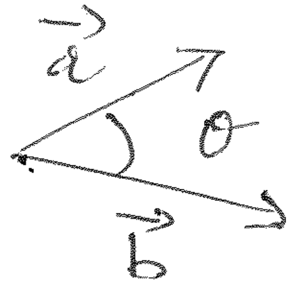
— Si può ottenere questo risultato (in modo semplice) introducendo l'operazione di prodotto scalare tra vettori

Prodotto scalare: $\vec{a} \cdot \vec{b} \stackrel{def}{=} a\, b \cos\theta$

Modulo di a

Modulo di b

angolo compreso



Il risultato è una grandezza scalare con unità di misura definite dal prodotto delle unità di a e b –

Proprietà:

- È invariante per roto-traslazioni: i moduli dei vettori e l'angolo ~~...~~ (direzioni relative) sono ~~...~~ proprietà invarianti
- È commutativo $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$

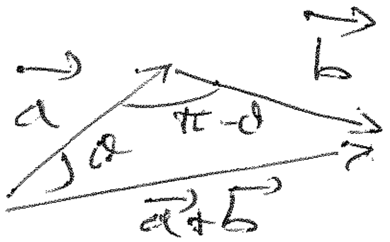
L'operazione definita è consistente con le proprietà geometriche introdotte nell'algebra dei vettori dalle ~~nelle~~ operazioni di somma e differenza:

* $\vec{a}\cdot\vec{a} = a^2$ Prodotto scalare di un vettore per se stesso dà il modulo quadro del vettore

* $|\vec{a}+\vec{b}| = (\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b}) =$
$= a^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b} + b^2$

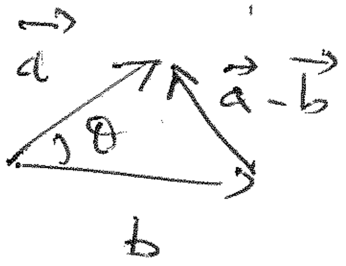
segue →

$$|\vec{a}+\vec{b}| = a^2 \underline{+ 2ab\cos\vartheta} + b^2$$



$\Leftarrow$ consistente con il teorema del coseno (o Carnot)

$$|\vec{a}-\vec{b}| = (\vec{a}-\vec{b})(\vec{a}-\vec{b}) = \underline{a^2 - 2ab\cos\vartheta + b^2}$$



$\Leftarrow$ Teorema del coseno (o Carnot)

— o —

In termini di componenti cartesiane:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = (a_x\hat{u}_x + a_y\hat{u}_y + a_z\hat{u}_z)(b_x\hat{u}_x + b_y\hat{u}_y + b_z\hat{u}_z)$$

$$= a_x b_x\, \hat{u}_x\cdot\hat{u}_x + a_x b_y\, \hat{u}_x\cdot\hat{u}_y + a_x b_z\, \hat{u}_x\hat{u}_z +$$

$$+ \ldots \quad + a_y b_y\, \hat{u}_y\hat{u}_y + \ldots$$

$$+ \ldots \quad + \ldots \quad a_z b_z\, \hat{u}_z\cdot\hat{u}_z$$

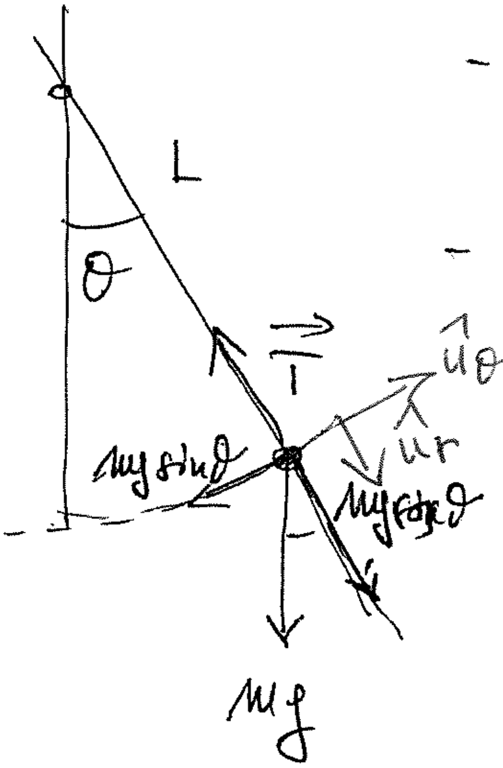
$$= a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

Sfruttando:

$\hat{u}_x\cdot\hat{u}_x = \hat{u}_y\cdot\hat{u}_y = \hat{u}_z\cdot\hat{u}_z = 1$ (versori //)

$\hat{u}_x\cdot\hat{u}_y = \hat{u}_y\cdot\hat{u}_z = \hat{u}_z\hat{u}_x = 0$ (versori $\perp$)

Pendolo Semplice



- Moto circolare con $R = L$ (filo inestensibile e $m = 0$)
- $v_T = \frac{d\theta}{dt} L = \omega L$

$$\vec v = \frac{d\theta}{dt} L \hat u_\theta$$

$$\vec a = \underbrace{\frac{d^2\theta}{dt^2} L \hat u_\theta}_{\text{Acc. TANGENZIALE}} - \underbrace{\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 L \hat u_r}_{\text{ACC. RADIALE CENTRIPETA}}$$

Forze agenti su m: Peso + tensione del filo

Eq. del moto:

centripeta

Radiale: $\begin{cases} T - mg\cos\theta = \boxed{m\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 L} & (*) \\ mg\sin\theta = - mL\frac{d^2\theta}{dt^2} & (**) \end{cases}$

Tangenziale:

(*) Segno dell'acc. centripeta concorde a T

(**) segni discordi perché la direzione della forza è discorde ~~dal segno~~ al segno di θ (angoli positivi verso dx)

Risolvo (**), che non contiene T (ignota a priori):

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\sin\vartheta$$

- Eq. differenziale che lega $\vartheta = \vartheta(t)$ alla sua accelerazione. Situazione differente da quelle incontrate nelle analisi dei moti dove abbiamo trovato $x = x(t)$ a partire da $v = v(t)$ o $a = a(t)$ o $v = v(x)$

- Soluzione generale delle eq. diff. $\longrightarrow$ Analisi II
- Per ora, conosciamo già la soluzione di (**) nel limite di ϑ piccolo ($\vartheta < 13°$)

$\longrightarrow \sin\vartheta \simeq \vartheta$ e l'eq. diventa

(O.A.S.) $$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\vartheta$$

- Eq. diff. del moto armonico
- ϑ prop. alla sua accelerazione

MOTO ARMONICO SEMPLICE $\vartheta = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$

(ω_0 = pulsazione $\neq \omega$) $\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = -A\omega_0^2\cos(\omega_0 t + \varphi)$

Sostituendo in (O.A.S):

$$-A\,\omega_0^2 \cos(\omega_0 t+\varphi) = -\frac{g}{L} A \cos(\omega_0 t+\varphi)$$

Vera per ogni fase φ e ogni tempo t se

$$\omega_0^2 = \frac{g}{L}$$

* Frequenza angolare $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}$ (indip. dalla massa)

* Periodo $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$

- Freq. angolare e periodo sono definiti dalle condizioni dinamiche e dalla geometria

- L'ampiezza dell'oscillazione A, e la fase iniziale φ dipendono dalle condizioni iniziali del moto

Tensione del filo da Eq (*)

$$T(\theta) = mg\cos\theta + m\omega^2 L$$
$$= mg\cos\theta + m\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 L$$

ove $\theta = \theta(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$

$$\frac{d\theta}{dt} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

La soluzione analitica è complicata

$$T(\theta) = mg\cos(\theta(t)) + mA^2\omega_0^2 L \sin^2(\omega_0 t + \varphi)$$

In termini qualitativi —

ω è max quando $\theta = 0$ — $\theta = 0$ significa $\cos(\omega_0 t + \varphi)$ $\sin(\omega_0 t + \varphi)$

$\omega = 0$ quando $\theta = \theta_{max}$

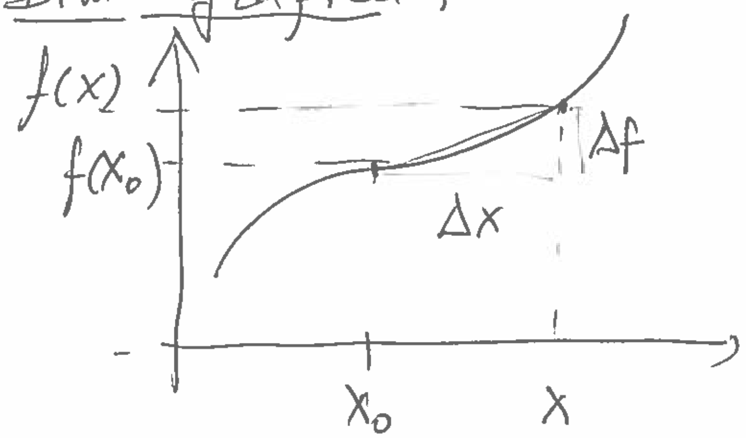
poiché $\theta = 0 \rightarrow \cos\theta = 1$ è il max anche per il primo termine — La tensione del filo è max a $\theta = 0$ e min a $\theta = \theta_{max}$

APPENDICE II — $\sin\theta \simeq \theta$ per θ piccolo

Per definizione di derivata, una funzione in un punto x nell'intorno di un punto x_0 può essere approssimata con

$$f(x) \simeq f(x_0) + \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0} (x - x_0)$$

Dim grafica:



$$f(x) = f(x_0) + m(x - x_0)$$

m = coeff angolare della retta

$$m = \operatorname{tg}\alpha = \frac{\Delta f}{\Delta x} \qquad m \simeq \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0}$$

$\sin\theta \simeq \theta$ per θ nell'intorno di 0

$$\Longrightarrow \sin(\theta) = \sin(0) + \left.\frac{d\sin\theta}{d\theta}\right|_{\theta=0} (\theta - 0)$$

$$= 0 + \cos(0)\cdot\theta = \theta$$

– Se $\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0} = 0$ si devono guardare le derivate seconde –

In generale buona approx usando tutti gli ordini