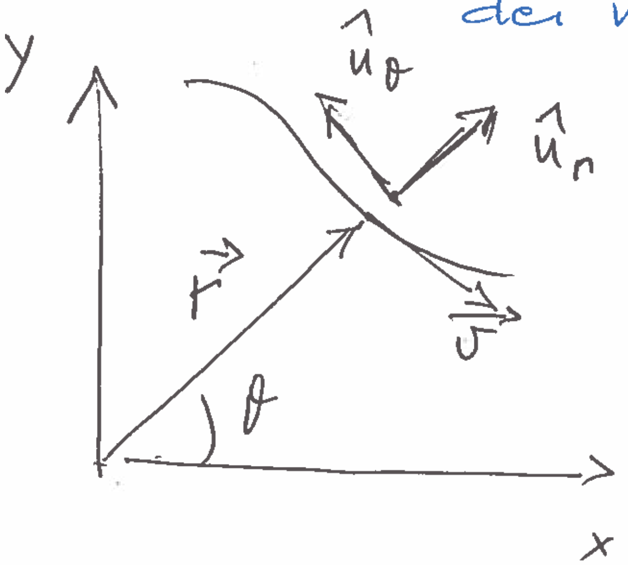
Moti 2D – Descrizione polare dei moti curvilinei



(r, θ) coord. polari

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

In alcune situazioni conviene esprimere il moto in relazione a $\vec{r}$, piuttosto che nella scomposizione in assi cartesiani.

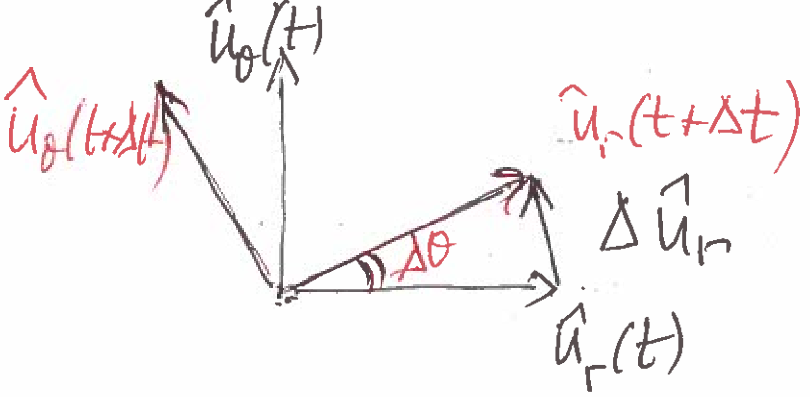
Nella scomposizione sugli assi, abbiamo sfruttato il fatto che il riferimento fosse fisso $\left(\frac{d\hat{u}_x}{dt} = \frac{d\hat{u}_y}{dt} = \frac{d\hat{u}_z}{dt} = 0\right)$. Nella rappresentazione INTRINSECA di $\vec{r} = r\hat{u}_r$ non è possibile: la direzione di $\vec{r}$ e il suo modulo, in generale, cambiano entrambi nel tempo.

Derivata di un vettore:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(r\hat{u}_r) = \underbrace{\frac{dr}{dt}\hat{u}_r}_{\text{Comp. radiale di } v} + \underbrace{r\frac{d\hat{u}}{dt}}_{\text{Comp. associata alla variazione di direzione}}$$

Calcolo di $\dfrac{d\hat{u}_r}{dt} \doteq \lim_{\Delta t \to 0} \dfrac{\hat{u}_r(t+\Delta t) - \hat{u}_r(t)}{\Delta t}$

– Consideriamo il caso in cui il versore $\hat{u}_r$ (modulo unitario) cambi direzione ruotando di un angolo $\Delta\theta$ nel tempo Δt



La direzione di $\hat{u}_\theta$ è per convenzione disposta nel verso di θ antiorario misurato da $\hat{u}_r$

$$\Delta \hat{u}_r = \hat{u}_r(t+\Delta t) - \hat{u}_r(t)$$

* modulo: $|\Delta \hat{u}_r| = \Delta\theta \, |\hat{u}_r| = \Delta\theta$
  ($\hat{u}_r$ ha modulo unitario)

* direzione secondo la congiungente dei versori di $\hat{u}_r(t)$ a $\hat{u}_r(t+\Delta t)$ $\approx$ parallelo a $\hat{u}_\theta$
  $\longrightarrow$ tanto più // quanto più piccolo è $\Delta\theta$

$$\Longrightarrow \frac{d\hat{u}_r}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\hat{u}_r(t+\Delta t) - \hat{u}_r(t)}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}\hat{u}_r \quad (**)$$

Esito: $\vec{v} = \frac{dr}{dt}\hat{u}_r + r\frac{d\theta}{dt}\hat{u}_\theta$

$v_r = \frac{dr}{dt}$ = velocità radiale (comp.)

$v_\theta = r\frac{d\theta}{dt}$ = comp. velocità polare

$\omega = \frac{d\theta}{dt}$ – velocità angolare del punto – descrive la variazione dell'angolo in relazione al tempo

Né l'una, né l'altra componente sono in generale tangenti alla traiettoria – La somma vettoriale delle componenti:
$\vec{v} = v_r\hat{u}_r + v_\theta\hat{u}_\theta$ è tangente alla traiettoria
[ricordare: dalla definizione di velocità segue che $\vec{v}$ è sempre tangente alla traiettoria]

Le componenti assumono significato immediato nel caso del MOTO CIRCOLARE

MOTO CIRCOLARE (VARIO)

$$\begin{cases} r(t) = R & \text{- costante} \\ \vartheta(t) = \vartheta_0 + \int_0^t \omega\, dt \end{cases}$$

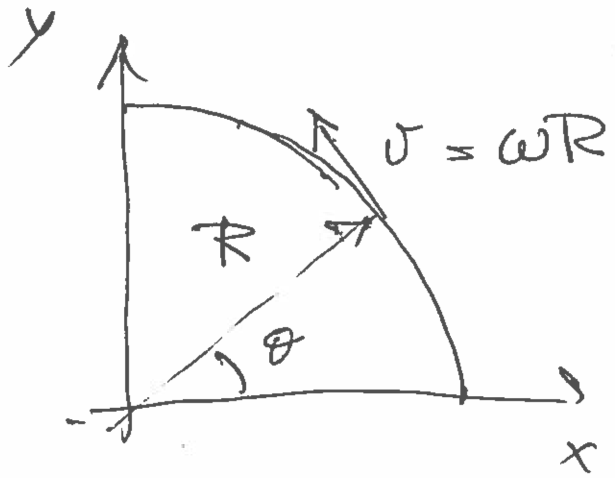
$\omega = \omega(t)$ in generale

traiettoria circolare, $R = \text{cost}$ e ~~traiett~~ tangente alla traiettoria sempre ortogonale a $\vec{r} = R\,\hat{u}_r$ $\longrightarrow$ velocità deve avere solo comp. polare ($\hat{u}_\theta \perp \hat{u}_r$ è tangente alla traiettoria)

dal risultato generale:

$$\vec{v} = \cancel{\frac{dR}{dt}\hat{u}_r} + R\frac{d\vartheta}{dt}\hat{u}_\theta = \underbrace{\omega R\,\hat{u}_\theta}_{\text{Velocità tang.}}$$

$\frac{dR}{dt} = 0$ per $R = \text{cost}$



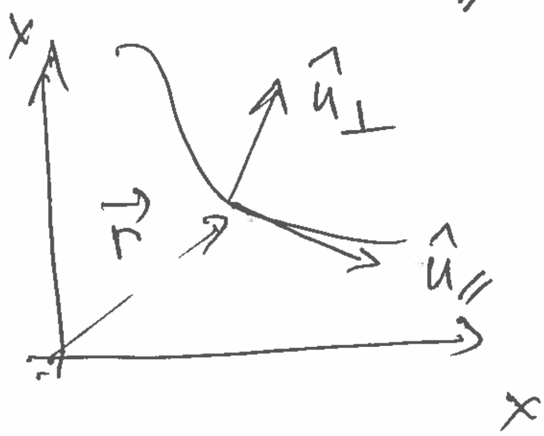
Si noti che in generale $\omega = \omega(t) \neq \text{cost.}$, se $\omega = \text{cost} \rightarrow$ moto circolare uniforme.

ACCELERAZIONE NEL MOTO CURVILINEO (PIANO)

Rappresentazione intrinseca di $\vec{v}$ –

$$\vec{v} = v\,\hat{u}_{/\!/}$$

$\hat{u}_{/\!/}$ indica la direzione tangente alla traiettoria [$\vec{v}$ è sempre tangente alla traiettoria]

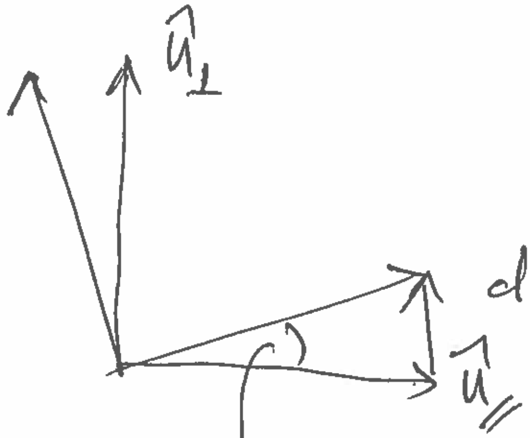


$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\hat{u}_{/\!/} + v\frac{d\hat{u}_{/\!/}}{dt}$$

$$= \underbrace{\frac{dv}{dt}\hat{u}_{/\!/}}_{\text{acc. tangenziale}} + \underbrace{v\frac{d\phi}{dt}\hat{u}_\perp}_{\text{acc. normale}}$$

acc. tangenziale (variazione del modulo di $\vec{v}$)

acc. normale (cambio di direzione di $\vec{v}$) → nulla nel moto rettilineo



$$d\hat{u}_{/\!/} = d\phi\,\hat{u}_\perp$$

$d\phi$ = angolo della variazione di direzione

MOTO CIRCOLARE : ACCELERAZIONE

La velocità si mantiene sempre ortogonale a $\vec{r}$ nel corso del moto - ed è diretta secondo $\hat{u}_\theta$ tangente alla traiettoria

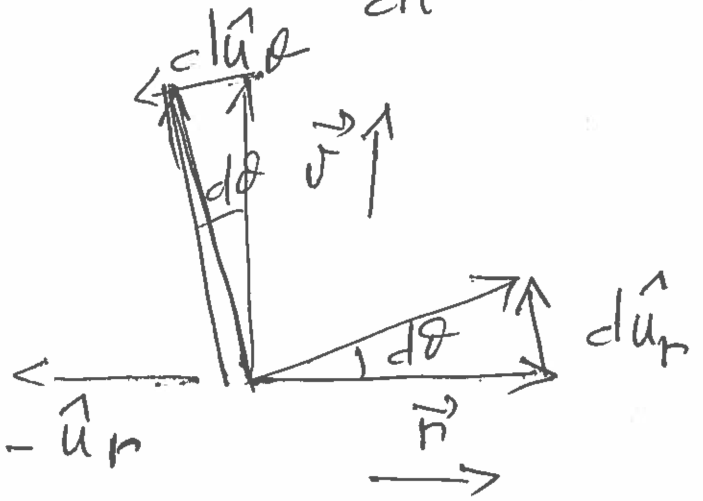
$$\vec{v} \perp \vec{r}$$

$$\vec{v} = R\frac{d\theta}{dt}\hat{u}_\theta$$

$$v = R\frac{d\theta}{dt} = \omega R$$

La variazione di direzione di $\vec{v}$ e di $\vec{r}$ sono uguali $(d\phi = d\theta)$

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\hat{u}_\theta + v\frac{d\hat{u}_\theta}{dt}$$



$$d\hat{u}_\theta = -d\theta\,\hat{u}_r$$

occhio al segno

$$v\frac{d\hat{u}_\theta}{dt}$$

$$\vec{a} = \left(\frac{dR}{dt}\cdot\frac{d\theta}{dt} + R\frac{d^2\theta}{dt^2}\right)\hat{u}_\theta - R\frac{d\theta}{dt}\cdot\left(\frac{d\theta}{dt}\hat{u}_r\right)$$

$$= \underbrace{R\frac{d^2\theta}{dt^2}\hat{u}_\theta}_{\text{Acc. tang.}} - \underbrace{R\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\hat{u}_r}_{\text{Acc. Radiale verso il centro}}$$

CENTRIPETA

- l'acc. tang. è R moltiplicato per l'accelerazione angolare $\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\vartheta}{dt^2}$
- l'acc. radiale è sempre centripeta in modulo

$$a_c = R\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = \omega^2 R \qquad \omega = \frac{d\vartheta}{dt}$$

In generale $\alpha \neq \cancel{0}$ e $\omega = \omega(t)$ –

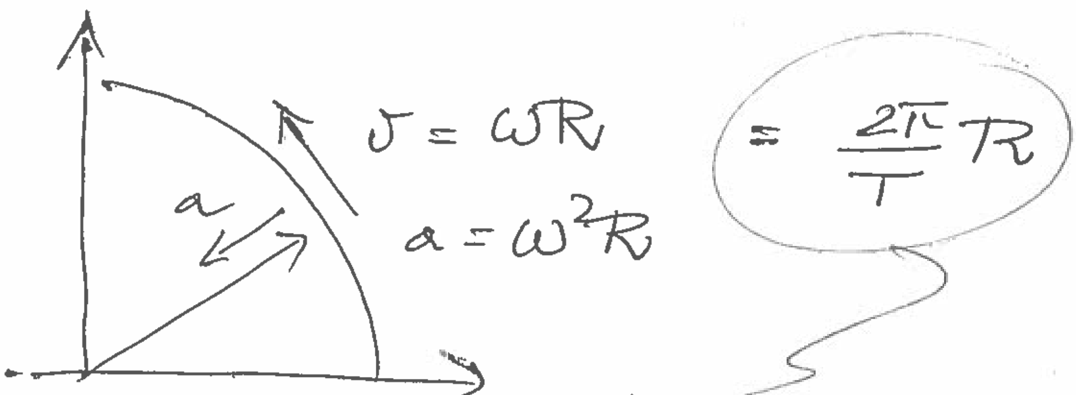
Caso notevole:

MOTO CIRCOLARE UNIFORME

$\omega = \text{cost}$

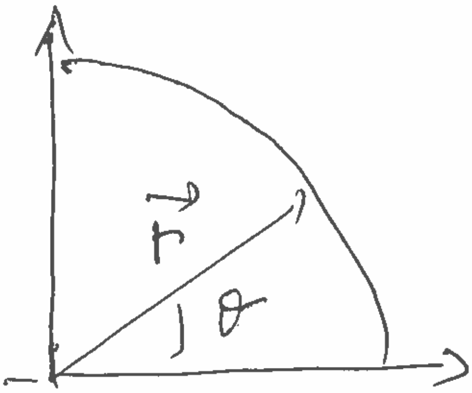
$$\begin{cases} r(t) = R \\ \vartheta(t) = \vartheta_0 + \omega t \end{cases}$$

L'accel. tang. è nulla – L'acc. centripeta non è mai nulla – $a_c = R\omega^2$



Un moto circolare uniforme è periodico $\omega = \text{cost}$. Il moto si ripete uguale ad ogni giro di circonf. $v = \frac{2\pi R}{T}$

Rappresentazione cartesiana del moto circolare uniforme



$$\begin{cases} |\vec{r}| = R \\ \vartheta = \vartheta_0 + \omega t \end{cases}$$

= Legge del moto in coord. polari

$$\begin{cases} x = R\cos\vartheta \\ y = R\sin\vartheta \end{cases} \qquad \begin{cases} \cancel{R}x = R\cos(\vartheta_0 + \omega t) \\ y = R\sin(\vartheta_0 + \omega t) \end{cases}$$

$$\vec{r} = x\,\hat{u}_x + y\,\hat{u}_y$$

= Legge oraria in coord. cartesiane (due moti armonici semplici sfasati di $-\pi/2$)

- Velocità :

$$\begin{cases} v_x = -\omega R \sin(\omega t + \vartheta_0) \\ v_y = \omega R \cos(\omega t + \vartheta_0) \end{cases}$$

$$v_x = \omega R \cos\left(\omega t + \vartheta_0 + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$v_y = \omega R \sin\left(\omega t + \vartheta_0 + \frac{\pi}{2}\right)$$

→ ortogonale a $\vec{r}$ (~~ruotato~~ sfasato di $\pi/2$)

$$\vec{v} = v_x\,\hat{u}_x + v_y\,\hat{u}_y$$

Accelerazione

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 R\cos(\omega t+\vartheta_0) = -\omega^2 x$$

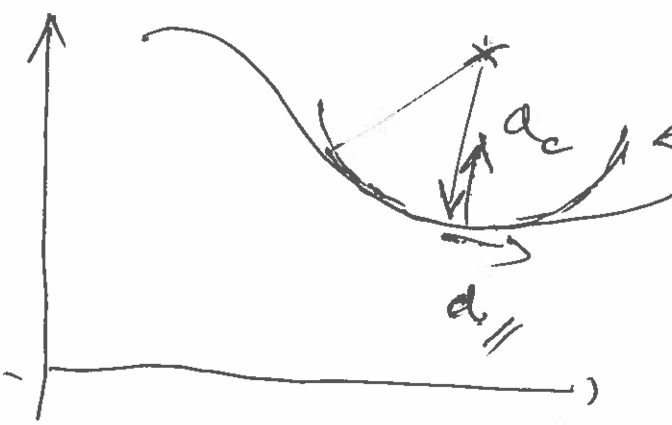
$$a_y = \frac{d^2y}{dt^2} = -\omega^2 R\sin(\omega t+\vartheta_0) = -\omega^2 y$$

$$\vec{a} = a_x \hat{u}_x + a_y \hat{u}_y = -\omega^2 (x\hat{u}_x + y\hat{u}_y)$$
$$= -\omega^2 \vec{r} = -\omega^2 R \hat{u}_r$$

Accelerazione diretta come $\hat{u}_r$ con verso opposto — Acc. centripeta -

— o —

MOTO CURVILINEO GENERICO: È SEMPRE rappresentabile "localmente" come un moto circolare ~~...~~!



circonf. OSCULATRICE (tang. alla traiettoria nel punto)

Più in generale si può usare $\vec{r} = r\hat{u}_r$ e trovare $\vec{v}$ e $\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ in coord. polari

$\longrightarrow$ Lo FAREMO PIÙ AVANTI — Fatelo per esercizio

Esercizio

$$\vec{a} = \frac{d^2}{dt^2}\vec{r} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dr}{dt}\hat{u}_r + r\frac{d\vartheta}{dt}\hat{u}_\vartheta\right)$$

ricordo: $$\frac{d\hat{u}_r}{dt} = \frac{d\vartheta}{dt}\hat{u}_\vartheta$$

$$\frac{d\hat{u}_\vartheta}{dt} = -\frac{d\vartheta}{dt}\hat{u}_r$$

Dunque:

$$\vec{a} = \Big\{\underbrace{\frac{d^2r}{dt^2}}_{\text{acc. radiale della velocità}} - \underbrace{r\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2}_{\text{diventa acc. centripeta nel moto circolare}}\Big\}\hat{u}_r +$$

$$+ \Big\{\underbrace{2\frac{dr}{dt}\frac{d\vartheta}{dt}}_{\text{termine di Coriolis}} + \underbrace{r\frac{d^2\vartheta}{dt^2}}_{\text{acc. angolare}}\Big\}\hat{u}_\vartheta$$