

Relazioni derivate e manipolazioni

(1)

- Spesso si dispone di $v = v(x)$ - velocità in funzione del punto, anziché del tempo
- Oppure si vuol conoscere $v = v(x)$ conoscendo la legge oraria $x = x(t)$

[Es. - quale distanza occorre per ~~fermare~~ decelerare un corpo con $v_0 \neq 0$?
- quale ~~distinta~~ velocità assume un ~~corpo~~ in moto rettilineo uniforme dopo una distanza Δx]

* METODO 1 :

Legge oraria $x = x(t)$ $\xrightarrow{\text{invertire}} t = t(x)$
velocità : $v = \frac{dx}{dt} = v(t) \rightarrow v = v(t(x))$

* Metodo 2 :

$v = v(x)$ [implicitamente $x = x(t)$]

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx} v$$

derivata di
funzione composta



- Separando le variabili e integrando:

$$a dx = v dv$$
$$\int_{x_0}^x a dx = \int_{v_0}^v v dv = \frac{1}{2}(v^2 - v_0^2)$$

- Caso di $a = \text{cost}$ moto unif. acc.

$$\boxed{2a \Delta x = v^2 - v_0^2}$$

ma Verifichiamo con il metodo ① per il caso del moto unif. accelerato -

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \\ v(t) = v_0 + a t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - x_0 = \frac{v_0}{a} (v - v_0) + \frac{1}{2a} (v - v_0)^2 \\ v - v_0 = a t \end{cases} \Rightarrow \Delta x = \frac{v_0}{a} (v - v_0) + \frac{1}{2a} (v - v_0)^2$$

Svolgendo il quadrato:

$$\Delta x = \frac{v^2 - v_0^2}{2a} \quad \text{c.v.d.}$$

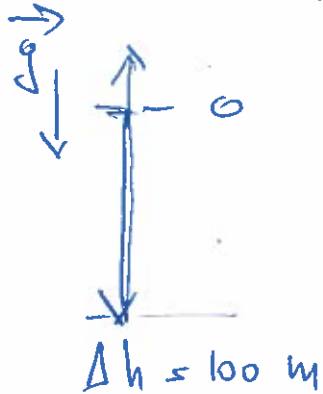
(2)

Esercizio 1

(invertito)

Caduta libera con $a = g = 9,8 \text{ m/s}^2$

— Trovare la velocità finale se $v_0 = 0$
e $h_0 = 100 \text{ m}$ —



Scego come x verso il basso —
con origine in h_0 —
legge del moto:

$$x(t) = \frac{1}{2} g t^2$$

$$x_0 = 0$$

$$v_0 = 0$$

$$\rightarrow 2g\Delta x = v^2 \quad \rightarrow \quad v = \sqrt{2g\Delta x}$$

Qs. relazioni si ricorda spesso a memoria,
ma è importante ricordare il concetto —

Eserc. 2 — Caduta libera

$v_0 = 0$ — dopo quale distanza Δx è
 $v = 10 \text{ m/s}$?

— dalle relazioni prec. (invertite)

$$\Delta x = \frac{v^2}{2g} \approx 5 \text{ m}$$

Esercizio 3

Altezza max di un corpo lanciato verso l'alto con $v_0 = 10 \text{ m/s}$

$\vec{g} \downarrow$ $\uparrow$ $x_0 = 0$

$$\begin{cases} v = v_0 - gt \\ x = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

$a = -g$

Si raggiunge $x_{\max}$ quando $v(t) = 0$

Uso la relazione generale:

$$\Delta x = \frac{v_f^2 - v_0^2}{2a} = \frac{v_0^2 - v_f^2}{2g} = \frac{v_0^2}{2g}$$

dunque $\Delta x = 5 \text{ m}$ -

Poi il corpo cade da $x_{\max}$ fino a x_0 (solo)

Con legge oraria del Pb. 2 -

$\Rightarrow$ Arriva in fondo con la stessa velocità (in modulo) che aveva in partenza -

$\Rightarrow$ Il moto di caduta/salita di un grave è simmetrico rispetto al vertice ($x_{\max}$) della traiettoria

(3)

Esercizio 4 (più concettuale che realistico)

- Si trovano $y(t)$ e velocità e acc.

di un punto vincolato a

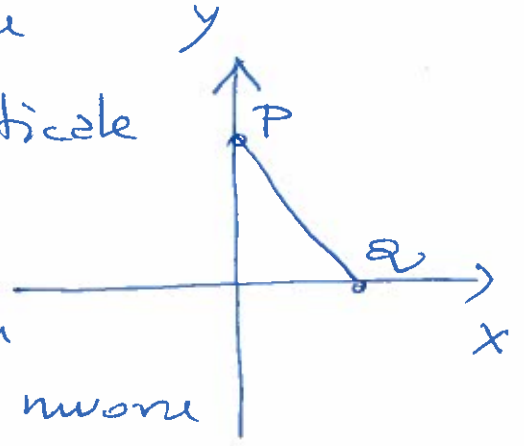
muoversi su una guida verticale

collegato a un'asta

di lunghezza L collegata

a un punto Q che si muove

lungo l'asse x con la legge:



$$x(t) = v_0 t - L \quad (t \geq 0 \quad x_0 = -L)$$

- Sono due moti 1D accoppiati dai vincoli

$$y = \sqrt{L^2 - x^2(t)} \quad \text{ma legge del moto}$$

$$\text{quando } x = \pm L \quad y = 0$$

$$\text{quando } x = 0 \quad y = L$$

(0 - L a seconda
di come inizia
a muoversi)

- velocità:

$$v_y = \frac{dy}{dt}$$

→ posso svolgere tutti i
calcoli sostituendo
la legge oraria di x

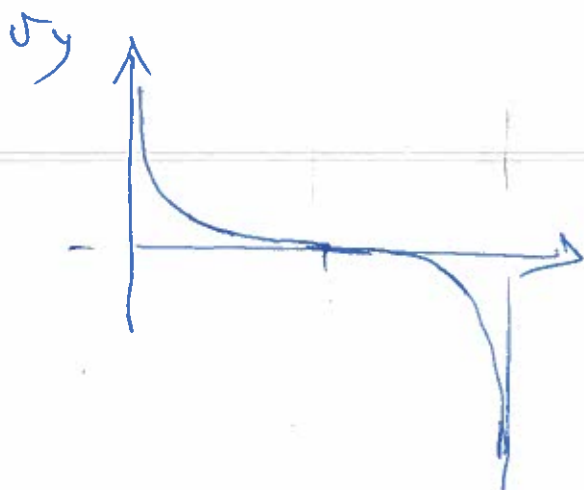
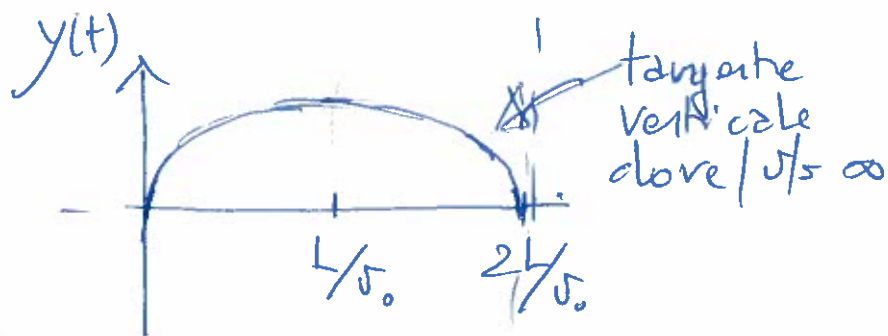
oppure →

oppure, per capire l'andamento:

$$v_y = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} =$$

$$= \frac{-x}{\sqrt{L^2 - x^2}} \cdot v_0 \Rightarrow = \begin{cases} +\infty & x \rightarrow -L \\ 0 & x = 0 \\ -\infty & x \rightarrow +L \end{cases}$$

Grafico di $y(t)$ e $v_y(t)$



moto confinato tra due estremi -

Se $\otimes$ invertire il moto dopo aver
spazzato l'intervallo, il moto di y
si ripete in modo periodico -

(4)

- I moti periodici si ripetono ~~spati~~ con legge oraria periodica - Si dice periodo T l'intervallo di tempo che separa due istanti in cui il ~~moto~~ punto passa dalle stesse coordinate, con stessa velocità e accelerazione
- I moti periodici possono essere vari, armonici e armonici - Tutti i moti periodici sono esprimibili come somma (sovrapposizione) del MOTO ARMONICO SEMPLICE [ESEMPIO $\Rightarrow$ moto]]

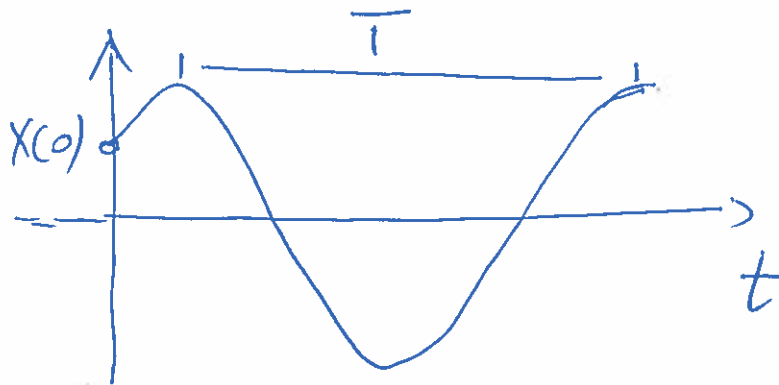
Legge oraria: $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$

A = ampiezza - elongazione $[A] = m$

φ = fase iniziale

ω = frequenza angolare / puls. $[\omega] = \frac{\text{rad}}{s}$

→ l'argomento di una funzione trigonometrica deve essere adimensionale



periodo $T = \frac{2\pi}{\omega}$

Fase iniziale determina la posizione del punto al tempo $t = 0$

$$x_0 = A \cos(\varphi)$$

$$\text{Es. } \begin{cases} \varphi = 0 & x_0 = A \\ \varphi = \pi/2 & x_0 = 0 \\ \varphi = \pi & x_0 = -A \end{cases}$$

La legge del moto non cambia, cambia solo l'istante iniziale di osservazione (o in altri termini la scelta dell'origine degli assi x e t , che abbiamo già commentato essere arbitraria)

Nota: $x(t) = A \cos(\omega t - \frac{\pi}{2}) = A \sin \omega t$

Sinusoidale e cosinusoidale rappresentano la stessa legge oraria (moto armonico semplice) e meno di una traslazione lungo l'asse x .

Per fissare A e φ bisogna conoscere due ~~posizioni~~ posizioni del moto oppure una posizione e una velocità —

$$x_0 = A \cos(\varphi)$$

$$x_1 = A \cos(\varphi + \omega t_1)$$

2 costanti
arbitrarie
nella soluzione
dell'eq. di moto

velocità:

$$v = \frac{dx}{dt} = -A\omega \sin(\omega t + \varphi)$$

→ sfasata di $\frac{\pi}{2}$
rispetto a x

accelerazioni:

$$a = \frac{dv}{dt} = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi)$$

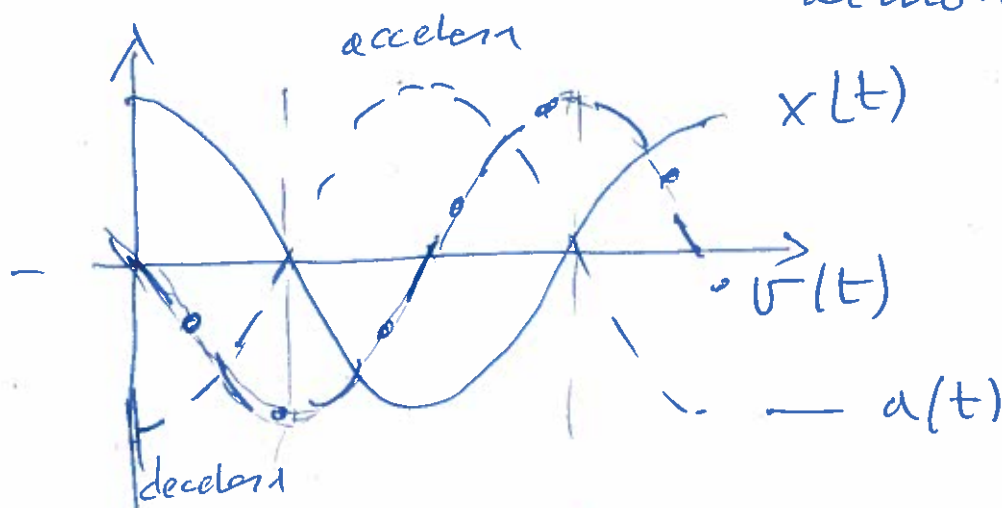
→ sfasata di π
rispetto a x

L'accelerazione è opposta a x -

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0}$$

Eq. diff. del moto
armonico semplice



v - nulla agli estremi e max in $x=0$

a - max in modulo agli estremi, ma
opposta a x - $|x|$ inverte il moto
negli estremi!

Descrizioni del moto nel caso 2D e 3D (1)

• Abbiamo costruito $\vec{v}$ e $\vec{a}$ in modo vettoriale, dobbiamo solo estendere il caso 1D alla 2D, vettoriale

— Caso delle coordinate cartesiane

^{ASSI FISSI}
Sistema di assi fissi, mutuamente ortogn.
possiamo esplicitare $\vec{v}$ e $\vec{r}$ nelle componenti:

$$\vec{v} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j} + v_z \hat{k} \quad (1)$$
$$\vec{r} = x \hat{i} + y \hat{j} + z \hat{k}$$

Calcoliamo $\vec{v}$, tramite la definizione op.

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt} (x \hat{i} + y \hat{j} + z \hat{k}) = \\ &= \frac{d}{dt} (x \hat{i}) + \frac{d}{dt} (y \hat{j}) + \frac{d}{dt} (z \hat{k}) \\ &= \frac{dx}{dt} \hat{i} + \frac{dy}{dt} \hat{j} + \frac{dz}{dt} \hat{k} \end{aligned}$$

(2)

Poiché gli assi sono fissi per ipotesi

$$\frac{d\hat{i}}{dt} = \frac{d\hat{j}}{dt} = \frac{d\hat{k}}{dt} = 0$$

Dunque:

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt} \hat{i} + \frac{dy}{dt} \hat{j} + \frac{dz}{dt} \hat{k}$$

d'altronde $\vec{v}$ è anche dato dalla (1) e affinché il vettore sia lo stesso, tutte le comp. devono essere uguali

$$v_x = \frac{dx}{dt} ; \quad v_y = \frac{dy}{dt} ; \quad v_z = \frac{dz}{dt}$$

In modo analogo posso trovare

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} ; \quad a_y = \frac{d^2y}{dt^2} \dots$$

Posso risalire dalla conosc. di (x, y, z) in funzione di t a v e a , e viceversa da $\vec{v}$ alla legge oraria

SCOMPONENDO IL MOTO NELLE COMPONENTI

→ tre moti rettilinei indep., eccetto che t è comune

Esempio esplicito: moto parabolico

— moto 2D, composizione di un moto unif. acc e un moto rett. uniforme su assi ortogonali

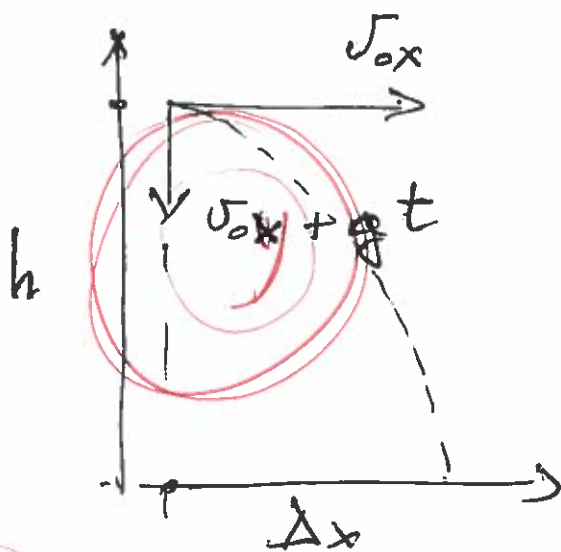
— moto del proiettile

$$x(t) = x_0 + v_{0x} t$$

$$y(t) = y_0 + v_{0y} t + \frac{1}{2} g t^2$$

dimostrazione

$$y(x) = y_0 + \frac{v_{0y}}{v_{0x}} (x - x_0) + \frac{1}{2} \frac{g}{v_{0x}^2} (x - x_0)^2$$



Parabola nel piano (x, y)

Vertice e concavità dipendono da v_{0x}, v_{0y}, x_0, y_0 e g -

→ puoi PERDERE TEMPO E TROVARE IL VERTICE

Es. calcolare Δx , per h e v_{0x} assegnati
con $v_{0y} = 0$

→ GITTATA DEL CANNONE

(4)

$$\begin{cases} x = x_0 + v_{0x} t \\ y = h - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases} \quad \text{caduta}$$

$y=0$ è punto di atterraggio

$$h = \frac{1}{2} g t^2$$

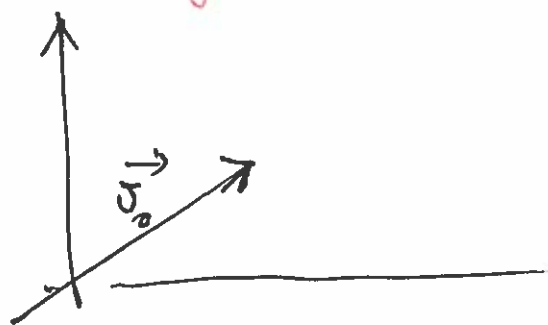
← relazione
sulla durata
per il moto v.

$$t = \left(\frac{2h}{g} \right)^{1/2}$$

$$\Delta x = v_{0x} \left(\frac{2h}{g} \right)^{1/2} \quad \text{gittata}$$

dipendenza dalla
radice

Quando è gittata



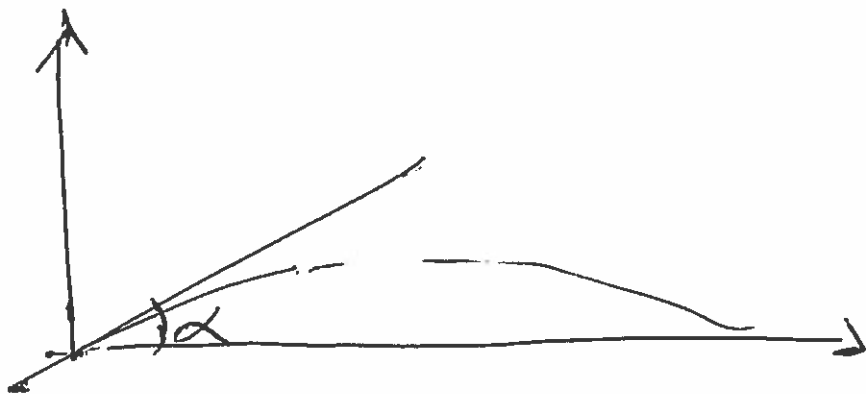
$$v_{0x} \text{ e } v_{0y} \neq 0$$

qual è la condizione
di gittata max

$$\begin{aligned} \text{per } v_{0x} = 0 &\rightarrow \Delta x = 0 \\ v_{0y} = 0 &\rightarrow \Delta x = 0 \end{aligned}$$

Il problema ha una simmetria in v_{0x} e v_{0y}
ammette la gittata, ma dimostrarla
in modo esplicito (tramite eq. del moto)

(5)



$$(x_0, y_0) = (0, 0)$$

$$\begin{cases} v_{0x} = v_0 \cos \alpha \\ v_{0y} = v_0 \sin \alpha \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x &= x_0 + v_{0x} t \\ y &= y_0 + v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2 \end{aligned}$$

gettata per $y = 0$ (oppure $\Delta y = 0$)

$$t = \frac{2 v_{0y}}{g}$$

$$\Delta x_{\max} = \frac{2 v_{0x} v_{0y}}{g}$$

$$\Delta x_{\max} = \frac{2 v_0^2 \cos \alpha \sin \alpha}{g}$$

$$\Delta x_{\max} = \frac{v_0^2}{g} \sin(2\alpha)$$

max per $\alpha = 45^\circ$

$\pi/4$

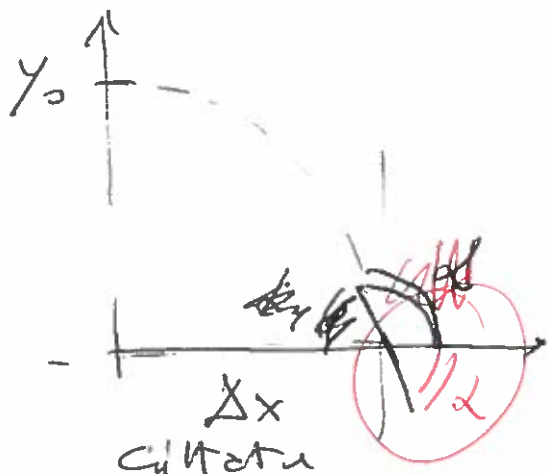
Trova anche il vertice

Moto parabolico

$$\begin{cases} x = x_0 + v_{0x} t \\ y = y_0 + v_{0y} t + \frac{1}{2} a t^2 \end{cases}$$

Permette soluzioni di numerose situazioni particolari, mettendo a sistema le due equazioni ~~cinematiche~~ ~~cinematiche~~

Es. 1 Gittata per $x_0 = 0$ e $v_{0y} = 0$:



1) Tempo di caduta dalla seconda eq.

$$\Delta y = (y - y_0) = \frac{1}{2} g t^2$$

$$t = \left[\frac{2 \Delta y}{g} \right]^{1/2}$$

SOLO SOLUZIONE POSITIVA

2) Gittata dalla prima eq.

$$\Delta x = v_{0x} t = v_{0x} \left[\frac{2 \Delta y}{g} \right]^{1/2}$$

Angolo di arrivo al volo ?

— $\vec{v}$ è tangente alla traiettoria in ogni punto — dunque $\int v_x = v \cos \alpha$
 $\int v_y = v \sin \alpha$

con α = angolo formato con asse x

(7)

Per $t = 0$ $v_{0x} \neq 0$ e $v_{0y} = 0$

$$\tan \alpha = \frac{v_{0y}}{v_{0x}} = 0 \rightarrow \alpha = 0$$

lancio orizzontale

Per v_f :

$$\begin{cases} v_{fx} = v_{0x} \\ v_{fy} = -gt \end{cases}$$

$$= -g \left[\frac{2\Delta y}{g} \right]^{1/2}, -[2\Delta y g]^{1/2}$$

Stessa relazione
trovata per la
caduta libera
(ovvio)

$$\tan \alpha = - \frac{[2\Delta y g]^{1/2}}{v_{0x}}$$

→ non imparate le relazioni a memoria
imparate il CONCETTO: $v // \text{traiettoria}$

Ci saranno altre traiettorie e altri
moti — le relazioni ^{cambiano} si trovano
i concetti sono stabili

il moto verticale è indep. dal moto
orizzontale — la caduta libera è sempre
la stessa

⇒ ESERCIZIO DEL CUGINETTO TONTO