1ª Parte   Cinematica del punto

DESCRIZIONE del moto di un corpo

Moto di un corpo

la POSIZIONE del corpo rispetto ad altri corpi considerati come fissi varia nel TEMPO

Il moto ha un significato RELATIVO

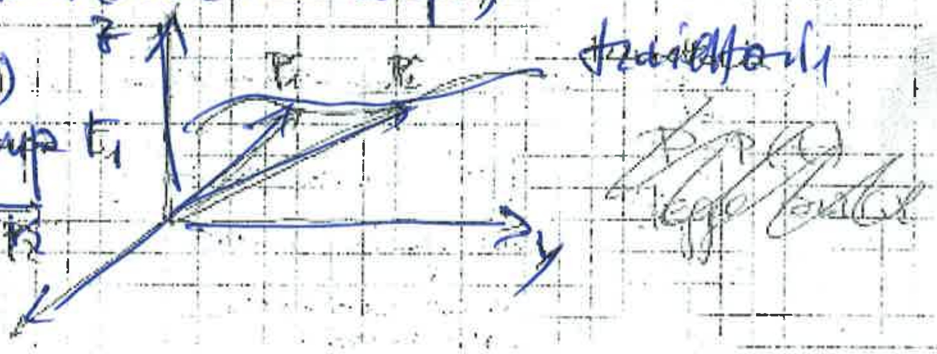
1 Fissare un sistema di riferimento (spaziale e temporale)

2 Descrivere la posizione del corpo nello spazio (attraverso ad es. le coordinate cartesiane ortogonali) in funzione del tempo → variabile indipendente

Si dice traiettoria la linea descritta dalla posizione del "punto materiale" (trascuriamo le dimensioni estese dei corpi)

$\vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$
posizione al tempo $t_1$

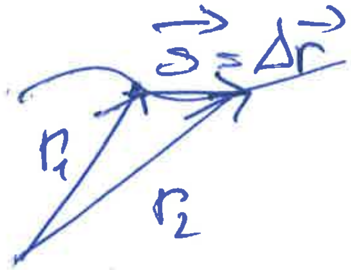
Analogamente $\vec{r}_2$



Si descrive il moto tramite lo

SPOSTAMENTO = spazio percorso nell'intervallo di tempo $\Delta t = t_2 - t_1$

$$\vec{s} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \Delta \vec{r} \qquad \text{(variazione di posizione)}$$




Nel limite $\Delta t$ piccolo la corda individuata da $\vec{s}$ coincide con l'arco da $\vec{r}_1$ a $\vec{r}_2$ lungo la traiettoria

Spostamento: vettore tangente alla traiettoria in ogni punto e in ogni istante
- nel verso del moto
- con modulo $\div$ spazio percorso

Rappresenta lo spazio percorso lungo la traiettoria nel tempo $\Delta t$, per $\Delta t$ piccolo

$\vec{s}$ e' definito ad ogni tempo:

$$\vec{s}(t) = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)$$

la legge $\vec{s} = \vec{s}(t)$ o $\vec{r} = \vec{r}(t)$ descrive il moto (Legge oraria)

Nelle componenti cartesiane: $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$

Per caratt. LO STATO DEL MOTO
si introducono grandezze derivate
[SINTETIZZANO LA NATURA DEL MOTO]

VELOCITÀ MEDIA = $\dfrac{\text{spostamento (finito)}}{\text{intervallo di tempo}}$

$$\vec{v}_m = \frac{\vec{r}_2(t_2) - \vec{r}_1(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \equiv \frac{\vec{s}}{\Delta t}$$

La velocità media è una grandezza vettoriale

Posso darne una def. scalare (più sensata per la velocità media, ma attenzione ha signif. diverso — $v_{scal.\,media} = \dfrac{\text{percorso}}{\text{intervallo di tempo}}$)
per "percorso" lungo la traiettoria si intende il modulo della lunghezza spostamento)

UNITÀ DI MISURA : $1\ m/s$ SI

Es- velocità media su un circuito ha senso solo in termini scalari

- VELOCITÀ [ISTANTANEA]

Velocità all'istante $t$ def. tramite un procedimento di limite: rapporto tra uno spostamento infinitesimo e un tempo infinitesimo:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

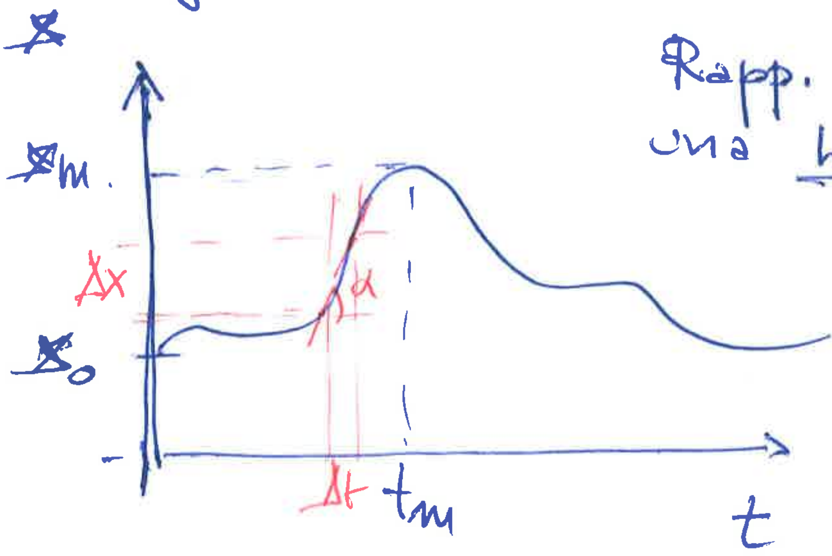
Simbolicamente: $\boxed{\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}}$ derivata del raggio vettore rispetto al tempo

- Poiché $dt$ è uno scalare:

$\vec{v}_M \parallel \Delta \vec{r}$ e $\vec{v} \parallel d\vec{r}$: parallela allo spostamento, cioè $\vec{v}$ è sempre $\boxed{\text{tangente}}$ alla traiettoria, con verso concorde allo spostamento (poiché $dt > 0$)

Localmente posso rappresentare $\vec{v} = v\,\hat{u}_v$ con $\hat{u}_v$ versore che individua la direzione della traiettoria - Posso pensarlo (localmente) come moto monodimensionale

Nella rappresentazione monodim., interpretazione geometrica del modulo della velocità




Rapp. grafica di una legge oraria

- il punto si sposta lungo x da $x_0$, raggiunge $x_m$ al tempo $t_m$ e poi torna indietro

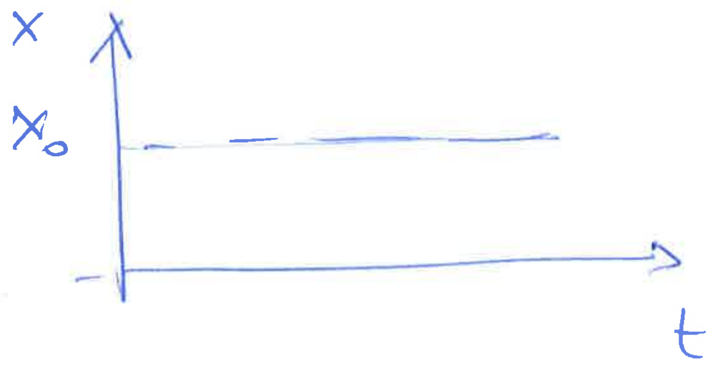
- Velocità: $\displaystyle v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \operatorname{tg} \alpha$

$\equiv$ pendenza della curva che rappresenta lo spostamento nel tempo

— Velocità $> 0$ pendenza positiva
$< 0$ " negativa (torna indietro)
$= 0$ pendenza nulla ($\Delta s = 0$, il punto non si sposta)

# Esempi moti monodimensionali

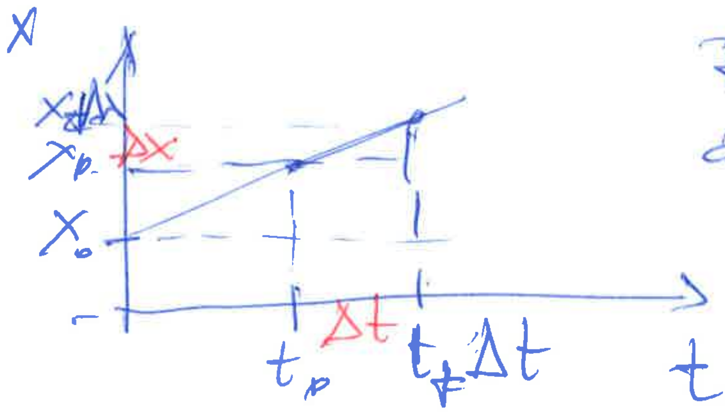
1) Legge oraria $x(t) = x_0$ punto fisso




$v = tg\alpha = 0$

il punto è fermo

2) Legge oraria $x(t) = x_0 + bt$ $(b > 0)$




Retta con coeff. angolare $b$

$\Rightarrow v = tg\alpha = b$

$v =$ costante

Calcolo differenziale:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x_0 + b(t + \Delta t) - x_0 - bt}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} b \frac{\cancel{\Delta t}}{\cancel{\Delta t}} = b$$

moto rettilineo uniforme

Nota: 1) è un caso particolare di 2)

2) include il caso in cui $b < 0$, ma ho rappr. $b > 0$ in figura

Più in generale: $v = v(t)$

Posso conoscere la velocità in funzione del tempo e da ~~essa~~ essa risalire alla legge oraria —

Analizziamo il caso monodim., per semplicità.

Il caso generale si ottiene componendo i moti nelle tre coordinate (ad esempio)

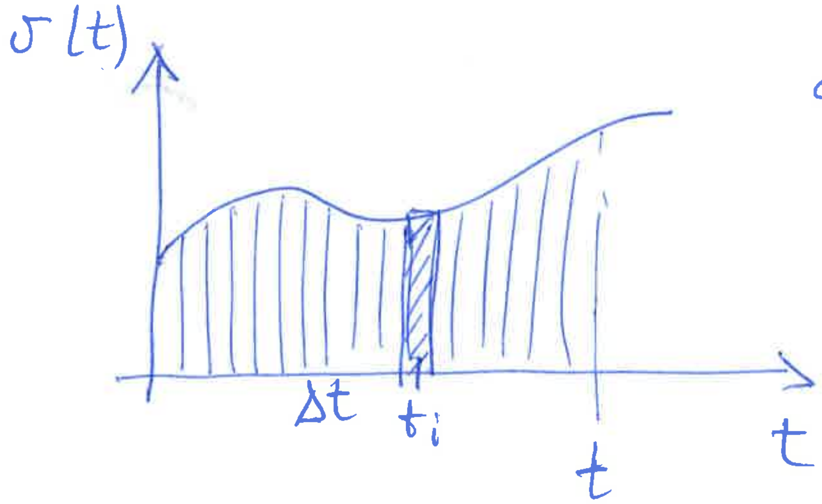



Grafico di $v = v(t)$

Dividiamo il tempo da 0 a $t$ in $N$ intervalli $\Delta t$

Sia $v_i = v(t_i)$ la velocità media nell'intervallo $i$, al tempo $t_i$

Lo spostam. $\Delta x_i$ è

$$\Delta x_i = v(t_i)\Delta t \qquad \text{[dalla def. di vel.]}$$

Rappresenta, geom. sul grafico, l'area del parallelogramma di base $\Delta t$ e altezza $v(t_i)$

spostamento complessivo

$$\Delta x(t) = \Delta x_1 + \Delta x_2 + \cdots \Delta x_n$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} v(t_i)\, \Delta t$$

Area sotto la curva = somma di elem. discreti

Calcolo spostam. totale più preciso se $\Delta t \to 0$, $n \to \infty$, $v(t_i) \to v(t)$ velocità istantanea

$\longrightarrow$ un numero infinito di intervalli infinitesimi

$$\underbrace{\Delta x(t) = \int_0^t v(t)\, dt}_{\text{Spostamento}}$$

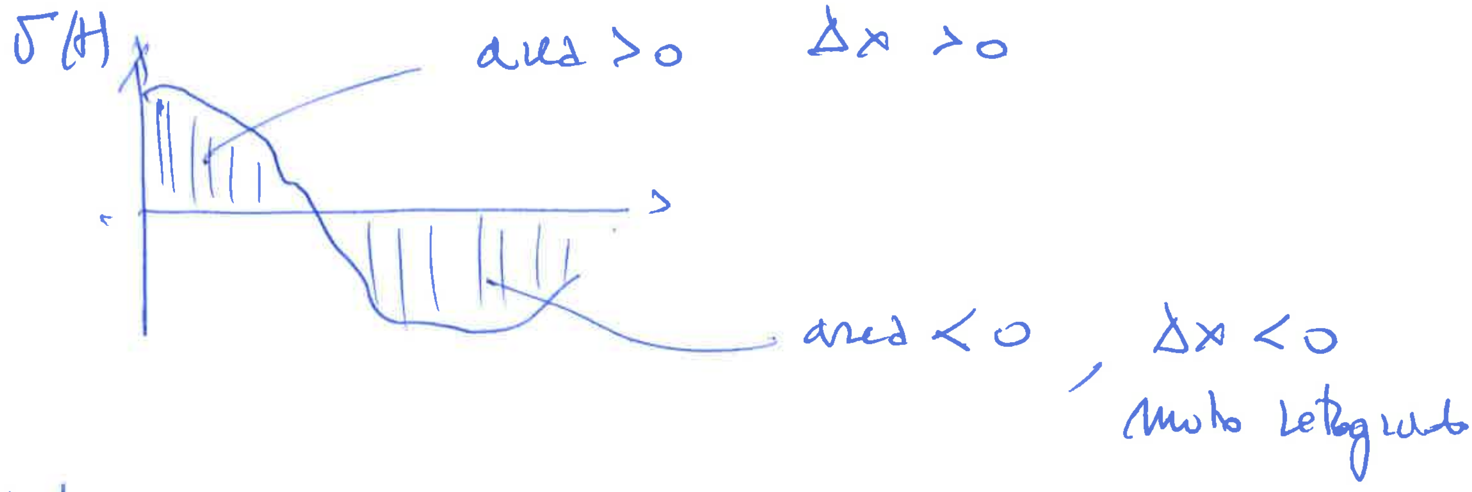
Integrale = somma nel limite continuo

$$\underset{\text{posizione}}{x(t)} = \underbrace{\Delta x(t)}_{\text{spostam.}} + \underset{\text{posiz. iniziale}}{x_0} \longrightarrow x(t) = \int_0^t v(t)\,dt + x_0$$

[moto ha signif. relativo]

Integrale è op. inversa della derivata

Nota: $v = v(t)$ può essere $\gtrless 0$



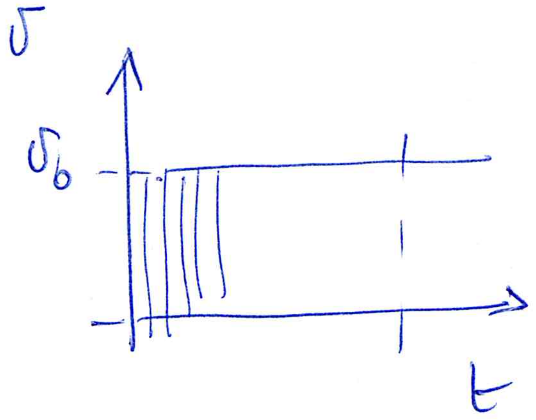

L'area soggiacente alla curva ha un segno poiché $v(t_i) \lesseqgtr 0$ può dare contributi positivi o negativi alla somma $\sum_i v(t_i)\Delta t$

~~Il segno non c'è ma~~ [diff. dal caso di "Area geometrica"]

# Es. materali

3) $v(t) = v_0$ Velocità costante

troviamo la legge oraria



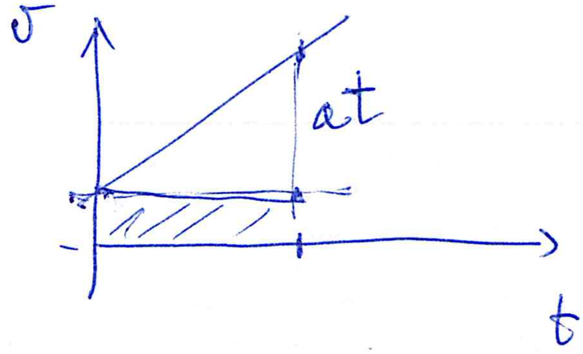

$\Delta x$ = Area del parall.

$$\Delta x = \int_0^t v_0 \, dt = v_0 \int_0^t dt$$

$$= v_0 t$$

moto rett. uniforme

4) $v(t) = v_0 + at$ ← velocità con v. lineare

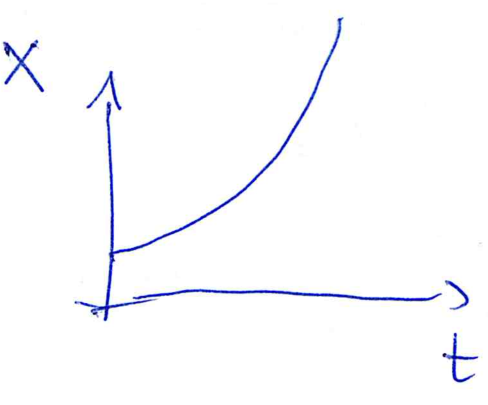



Spost. dall'area:

$\Delta x(t)$ = Area rettangolo + triangolo

$$= v_0 t + \frac{1}{2}(at)t$$

$$\Delta x = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$




parabola

# Richiamo derivate e integrali notevoli

simbolo $\frac{df}{dt} \equiv f'$

(1) somma $(f+g)' = f' + g'$

Es. $x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left(x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2\right)$$

$$= \frac{dx_0}{dt} + \frac{d}{dt}(v_0 t) + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} a t^2\right)$$

(2) prodotto $(fg)' = f'g + fg'$

(2bis) rapp. $(f/g) = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

(3) composta $[f(g(t))]' = f'(g(t))g'(t)$

Es. ~~esponenziale~~

Funzioni notevoli:

$f = \text{cost} \qquad f' = 0$

$f = x_0 + bt \qquad f' = b$

$f = bt^2 \qquad f' = 2bt$

Es. $\frac{d}{dt}(bt^2) = \frac{db}{dt}t^2 + b\frac{dt^2}{dt} =$

$= b\frac{dt^2}{dt} = 2bt$

Usiamo rapp. increm.

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{(t+\Delta t)^2 - t^2}{\Delta t} =$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\cancel{t^2} + 2\Delta t\, t + \Delta t^2 - \cancel{t^2}}{\Delta t} =$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} (2t + \Delta t) = 2t$$

$f = t^n \qquad f' = n t^{n-1}$

$f = \frac{t^{n+1}}{n+1} \qquad f' = t^n$

+ sen e exp e log

Più in generale $v = v(t)$

Si introduce il concetto di ACCELERAZIONE tramite lo stesso procedimento

$$\vec{a}_m = \frac{\vec{v}(t_2) - \vec{v}(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

ACC. ISTANTANEA:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

= derivata della velocità rispetto al tempo

UNITÀ DI MISURA $[L T^{-2}] \equiv 1\, m/s^2$

---

Poiché $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)$$

$$\equiv \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$ scrittura simbolica

"dobbiamo prima calcolare la variazione di $\vec{r}$ rispetto a $t$ (trovando $\vec{v}$), e poi la variazione di $\vec{v}$ rispetto a $t$

in modo analogo ~~x~~ e $v$ :

$$v = \frac{ds}{dt} \longleftrightarrow \Delta s = \int_0^t v\,dt$$

$$a = \frac{dv}{dt} \longleftrightarrow \Delta v = \int_0^t a\,dt$$

→ Moto (rett.) unif. accelerato $a(t) = a$

$$v(t) = \int_0^t a\,dt + v_0$$

$$= at + v_0$$

Abbiamo già trovato la legge oraria di qs. moto notevole (parabola)

Es. notevole di moto unif. acc. —

CADUTA LIBERA : $a = g \cong 9.8\ m/s^2$

$$\cancel{v}\ \cancel{x}\ y(t) = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2} g t^2$$

$$v(t) = v_0 + gt$$