

Problema 5

In termini generali (1° principio della TD)
per ciascuna delle trasformazioni del
problema 4 vale la relazione

$$dU = dQ - dW$$

* Nella trasf. da -10°C a 0°C , il gas
scambia calore con il ghiaccio e
nel contempo cambia volume. Possiamo
scrivere, per ogni variazione infinitesima
della tra temp.,

$$dU = mC_v dT$$

$$dQ_{\text{gas}} = -dQ_{\text{ghiaccio}} = -mC_s dT$$

$$dW = p dV$$

$$\text{Dunque: } (mC_v - mC_s) dT = -p dV \quad (***)$$

* Nella trasf. a $T = 0^{\circ}\text{C}$ $T = \text{cost}$
e la trasf. è isoterma $pV = nRT$
con $T = 273.15 \text{ K}$

* Nella trasf. da $T = 0^{\circ}\text{C}$ a $T = +5^{\circ}\text{C}$, il
gas scambia calore con l'acqua. Procedendo
in modo analogo alla prima trasf.,
si può scrivere:

$$(nC_V - c_s^a m) dT = -p dV$$

Vediamo che la relazione tra le variabili di stato nelle prime e nella terza trasformazione ha la stessa forma =

$$K dT = -p dV \quad (*)$$

$$\text{con } K_1 = nC_V - c_s^a m$$

$$K_2 = nC_V - c_s^a m$$

Partendo da (*) e usando le relazioni di stato dei gas perfetti (si tratta di trasformazioni reversibili, dal testo del problema) troviamo:

$$K dT = -nRT \frac{dV}{V}$$

$$\frac{dT}{T} = -\frac{nR}{K} \frac{dV}{V}$$

Integrando qs. relazione tra due stati generici A e B si trova:

$$\ln \left(\frac{T_B}{T_A} \right) = \frac{nR}{K} \ln \left(\frac{V_A}{V_B} \right)$$

Ossia: $TV^{\frac{nR}{k}} = \text{cost}$

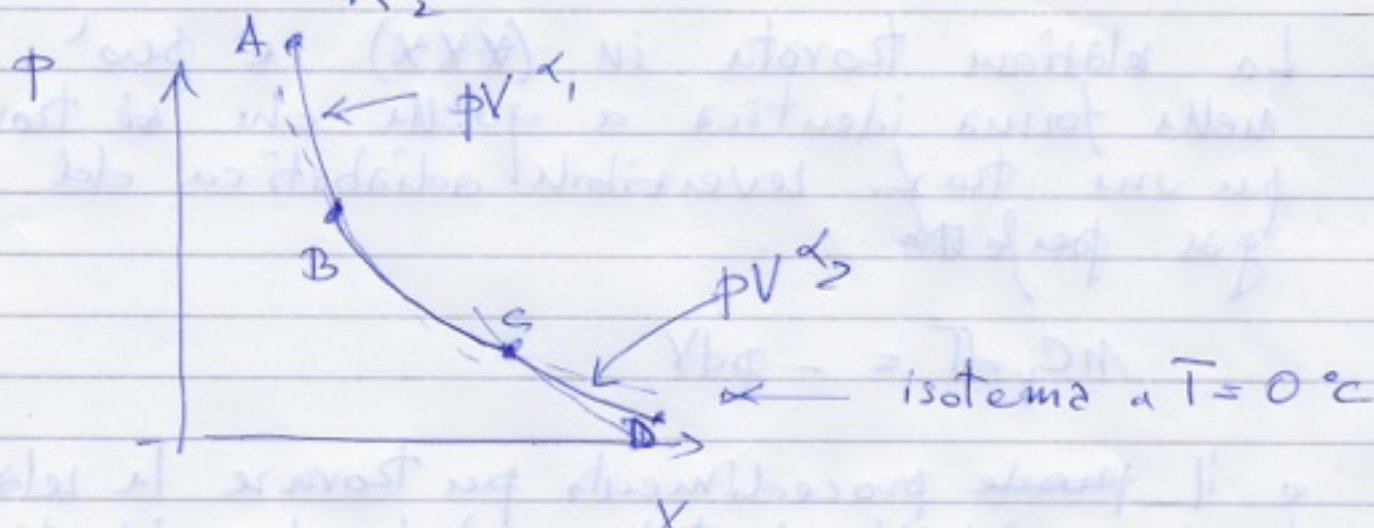
Sostituendo a $T = \frac{pV}{nR}$ e ricavando
da $nR = \text{cost}$

Si ottiene $pV^{\left(\frac{nR}{k} + 1\right)} = \text{cost}$

Queste relazioni ~~sono~~ rappresentano
delle trasformazioni politropiche con

$\alpha_1 = \frac{nR}{k_1} + 1 = 1.63$ (ghiaccio)

$\alpha_2 = \frac{nR}{k_2} + 1 = 1.60$ (acqua)



Per il volume finale $V_f = 56.7$ l il
volume V_i otteniamo da

$TV^{\frac{nR}{k_i}} = \text{cost}$ usando i k_i

→

appropriati per ciascuna trasformazione
sulle due polistiche -

Per la transf. isoterma $T = \text{cost}$ ~~non~~ p e p
non è costante. Siccome $\Delta U = 0$ il
lavoro è $p dV = Q = \Delta m = nR \ln(V_B/V_A)$
da cui si può ricavare dV e in
ultima analisi $V_C/V_B = 0,953$

COMMENTO : La prima e l'ultima transf.
NON sono adiabatiche per il
gas - lo sono per il sistema

La relazione trovata in (****) è però
nella forma identica a quella che si trova
per una transf. reversibile adiabatica del
gas perfetto :

$$nC_V dT = -p dV$$

e il ~~prode~~ procedimento per trovare la relazione
tra le variabili di stato è ~~lo stesso~~ identico
a quello mostrato a lezione per le transf.
adiabatiche. Cambia il coefficiente nella
legge di potenza, che per le adiabatiche è
 $pV^\gamma = \text{cost}$ con $\gamma = C_p/C_V$

Problema 9



x Contenitore adiabatico con
pistone scorrevole contro
 $p_{\text{ext}} = 1.013 \times 10^5 \text{ Pa}$

Stato iniziale del gas:

$$p_i = p_{\text{ext}}$$

$$V_i = 44.8 \text{ l}$$

$$n = 2.0 \text{ mol}$$

Posto a contatto con massa all'interno del
contenitore

$$m = 1.0 \text{ kg}$$

$$C_s = 380 \text{ J/(kg} \cdot \text{K)}$$

$$T = 373 \text{ K}$$

Trovare T_f , ΔU , Q e W del gas

Soluzioni

Troviamo temperatura iniziale del gas:

$$T_i = \frac{p_i V_i}{nR} = 273.1 \text{ K} \quad (*)$$

(*) Si può procedere con il calcolo esplicito
a partire dai dati del problema, oppure
ricordare che 1 mole di gas perfetto
occupa 22.4 l in condizioni NTP

→

e che $V \propto n$ - dunque per 2 moli
a pressione atmosferica il volume di 44.8 l
corrisponde a 0°C , ossia 273.1 K -

$\Rightarrow$ Temperatura finale

Il gas e il metallo raggiungono l'equilibrio
termico con una trasf. ISOBARA, poiché
il pistone è libero di muoversi -

Dunque $Q_{\text{gas}} + Q_{\text{met}} = 0$

$$nC_p(T_e - T_i) + mC_s(T_e - T) = 0$$

Da cui si trova la temp. finale di
equilibrio:

$$T_f \equiv T_e = \frac{nC_p T_i + mC_s T}{nC_p + mC_s}$$

(ossia dalle medie
pesate delle capacità termiche)

per un gas monoatomico $C_p = \frac{5R}{2}$

$$\begin{aligned} T_f &= \frac{5 \times 8,31 \text{ J/K} \cdot 273 \text{ K} + 380 \text{ J/K} \cdot 373 \text{ K}}{5 \cdot 8,31 \text{ J/K} + 380 \text{ J/K}} \\ &= 363,1 \text{ K} \end{aligned}$$

⇒ Variazioni dell'energia interna del gas

$$\Delta U = n C_V \Delta T \quad \text{per ogni transf.}$$

$$= 2 \text{ mol} \cdot \frac{3}{2} R \cdot \Delta T$$

$$= 3 \cdot 8,31 \text{ J/K} \cdot (363,1 - 273,1) \text{ K}$$

$$= 2,25 \text{ kJ}$$

⇒ Calore scambiato dal gas

$$\text{Sappiamo che } Q_{\text{gas}} + Q_{\text{met}} = 0$$

$$Q_{\text{gas}} = -Q_{\text{met}}$$

$$= -4n C_S \Delta T_{\text{met}} = + 380 \text{ J/K} (373 - 363,1)$$

$$= + 3,74 \text{ kJ}$$

In modo alternativo e più diretto

$$Q_{\text{gas}} = n C_p \Delta T_{\text{gas}} = 2 \cdot \frac{5}{2} R \Delta T_{\text{gas}}$$

$$= (5 \cdot 8,31) \text{ J/K} \cdot (363,1 - 273,1)$$

$$= 3,74 \text{ kJ}$$

Il Lavoro compiuto dal gas può essere calcolato in tre modi:

$$1) \Delta U = Q - W \Rightarrow W = Q - \Delta U$$

$$W = 3,74 \text{ kJ} - 2,25 \text{ kJ} = 1,49 \text{ kJ} > 0$$

il gas si espande (lavoro positivo)

$$2) W = nR \Delta T_{\text{gas}} = 1,49 \text{ kJ}$$

$$3) W = \oint_{\text{tot}} p \Delta V$$

poiché in p.s. trasf.,
il gas si espande
contro una pressione
esterna costante

Per trovare ΔV , si deve calcolare V_F

$$V_F = V_i \frac{T_F}{T_i}$$

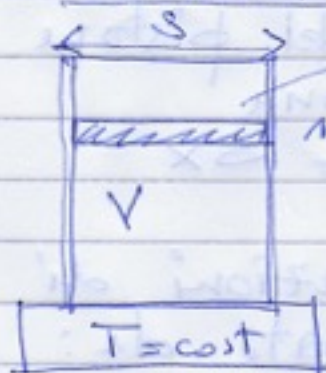
(Eq. di stato dei
gas perfetti a $p = \text{cost}$)

$$= 59,6 \text{ l}$$

$$W = 1,013 \times 10^5 \text{ Pa} \times (59,6 - 44,8) \times 10^{-3} \text{ m}^3$$

$$= 1,50 \text{ kJ} \quad - \text{ consistente con i risultati precedenti}$$

PROBLEMA 10



Pistone mobile di massa m e sezione S

Gas di volume V in condizioni isoterme (figura) o adiabatiche (scelta urgente)

Soluzione

- a) In condizioni di equilibrio la forza esercitata dal gas sulla parete interna del pistone sconfigge di massa m eguaglia la forza esercitata dal pistone sul gas. Poichè all'esterno del pistone c'è il vuoto ($p=0$), la forza esterna è dovuta al peso del pistone:

$$p_{\text{gas}} = \frac{mg}{S} \quad (\equiv p \text{ nel seguito})$$

- b) Sia le trasformazioni isoterme sia quelle adiabatiche sono ~~politropiche~~ rappresentabili come politropiche:

$$pV^\alpha = \text{cost}$$

con $\alpha = 1$ nel caso di isoterme
 $\alpha = \gamma$ " adiabatiche

Lo spostamento dall'equilibrio del pistone di un tratto x determina una variazione di volume $dV = Sx$

Per una politropica, le variazioni di volume e pressione sono legate da:

$$\frac{dp}{p} = -\alpha \frac{dV}{V} \quad (\text{dim. FATE la derivata!})$$

Spostando il pistone dunque compare una forza

$$\begin{aligned} dF = dpS &= -\alpha p \frac{dV}{V} \\ &= -mg \frac{S}{V} x \quad \leftarrow \end{aligned}$$

⚡ Poiché il segno è negativo ~~disce~~ la forza è discorde dallo spostamento x , ossia è una forza di richiamo

c) Equazione del moto:

$$dF = ma$$

$$-mg \frac{S}{V} x = m \frac{d^2 x}{dt^2} \Rightarrow \frac{d^2 x}{dt^2} + \left(\frac{gS}{V} \right) x = 0$$

È l'equazione del moto di un oscillatore armonico con pulsazione (o freq. angolare)

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{gS}{V}}$$

d) Sostituendo i dati $V = 0.98 \times 10^{-3} \text{ m}^3$
 $S = (0.10 \text{ m})^2$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{9.8 \text{ N/kg} \cdot 10^{-2} \text{ m}^2}{0.98 \times 10^{-3} \text{ m}^3}} = 1 \text{ Hz}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 6.28 \text{ s}$$

e) Nel caso di trasf. adiabatica

$$\frac{dp}{p} = -\gamma \frac{dV}{V}$$

si hanno le stesse relazioni a meno del fattore γ :

$$F = -\gamma mg \frac{S}{V}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\gamma \frac{gS}{V}} = \sqrt{\gamma} \omega_0^{\text{isost}}$$

L'approx. isoteramica va bene quando il periodo di oscillazione è molto più lento del tempo caratteristico dello scambio termico tra gas e parete