Problema 1

Cilindro: $I_1 = \frac{1}{2} m R^2 = 1.6 \ kg \ m^2$

Cilindro + asta (in rotazione attorno al proprio CM):

$I_2 = I_C + I_A =$

$= \frac{1}{2}(m - m_b) R^2 + \frac{1}{12} m_b L^2$

$= 1.5 \ kg m^2 + 1.35 \ kg m^2 = 2.85 \ kg m^2$

Problema 2

Il momento delle forze esterne rispetto a un polo lungo l'asse di rotazione è nullo (forza peso e forza normale hanno braccio nullo)

Dunque $\vec{L}$ si conserva rispetto a un polo lungo l'asse di rotazione. Possiamo scrivere:

$$I_1 \omega_0 = I_2 \omega_f \Rightarrow \omega_f = \frac{I_1}{I_2} \omega_0$$

Usando il risultato del Pb. 1: $\omega_f = 2.67$ giri/sec $= 16.8$ rad/s (1 giro $= 2\pi$ rad)

Il lavoro delle forze interne (spostamento delle braccia) è misurabile dalla variazione dell'energia cinetica:

$$W^{(I)} = \frac{1}{2} I_2 \omega_f^2 - \frac{1}{2} I_1 \omega_0^2 = 98.9 \ J$$

Problema 3

Il lavoro erogato determina la variazione di energia cinetica della macina. Poiché la macina è inizialmente ferma ($E_k^i = 0$):

$$W \Delta t = \Delta E_k = \frac{1}{2} I \omega_f^2$$

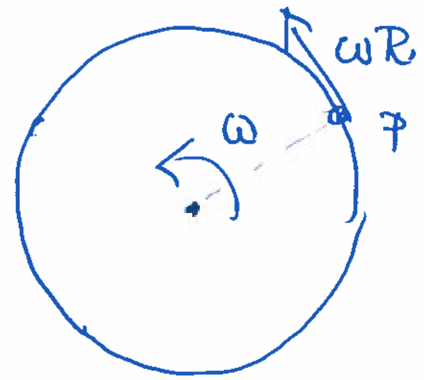
Da cui si ricava: $\omega_f = \left[\frac{2 W \Delta t}{I}\right]^{1/2}$

Per il disco $I_D = \frac{1}{2} M R^2$, per l'anello $I_A = M R^2$

In conclusione: $\omega_D = \left[\frac{4 W \Delta t}{M R^2}\right]^{1/2} = 3{,}0 \text{ rad/s}$

$$\omega_A = \omega_D / \sqrt{2} = 2.1 \text{ rad/s}$$

Problema 4



1) $E_k = E_k^{Disco} + E_k^{Punto}$

$$= \frac{1}{2} I_D \omega^2 + \frac{1}{2} m (\omega R)^2 = 6.22 \text{ J}$$

2) Poiché il disco ruota attorno al proprio CM (fisso) non è necessaria una forza per tenerlo in posizione. L'asse deve provvedere la forza necessaria a mantenere il punto materiale P in moto circolare ~~uniforme~~ con velocità ω:

$$\vec{F} = - m \omega^2 R \hat{u}_r \quad \text{centripeta.}$$

$$|\vec{F}| = m \omega^2 R = 6.91 \text{ J}$$

Problema 5

1) Il momento τ è riferito all'asse della mola, dunque il momento di inerzia va calcolato rispetto all'asse:

$$I_D = \frac{1}{2} M R^2 = 8.87 \ \mathrm{Kg\,m^2}$$

2) In presenza di attrito di intensità costante

$$\omega(t) = \omega_0 - \alpha t$$

con α accelerazione angolare determinata dall'equazione del moto per una R.R.A.F.

$$\tau = I \alpha \implies \alpha = \tau / I$$

Troviamo t ponendo $\omega(t) = 0$:

$$t = \omega_0 / \alpha = \frac{\omega_0 I}{\tau} = 5.55 \ \mathrm{s}$$

3 e 4) Possiamo porre in relazione il lavoro compiuto dal momento della forza e la variazione di energia cinetica. Per una forza di intensità costante, il momento τ è costante:

$$\tau \Delta \vartheta = \Delta E_K$$

$\longrightarrow$

Dunque

4) $W = + \Delta E_k = -\frac{1}{2} I \omega_0^2 = -249.5\ J$

3) $\Delta\theta = \frac{|\Delta E_k|}{\tau} = 20.8\ rad$

In alternativa si può procedere integrando l'equazione della velocità:

3) $$\Delta\theta = \int_0^t \omega(t)\,dt = \int_0^t (\omega_0 - \alpha t)\,dt =$$

$$= \omega_0 t - \frac{1}{2}\alpha t^2$$

Sostituendo i risultati del punto 2)

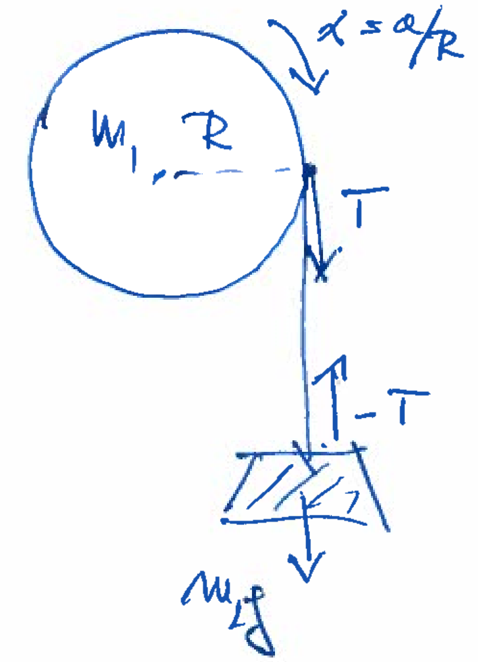
$t = \frac{\omega_0 I}{\tau}$ e $\alpha = \tau / I$ si ottiene

$$\Delta\theta = \frac{\omega_0^2 I}{\tau} - \frac{1}{2}\frac{\tau}{I}\omega_0^2\frac{I^2}{\tau^2} = \frac{1}{2} I \omega_0^2 / \tau$$

è immediato notare che questo risultato coincide con il precedente -

4) $\tau\Delta\theta = \Delta E_k$ - coincide con il prec.

Problema 6



- Si scrive un'equazione per ogni moto, si accoppiano usando i vincoli ($a = \alpha R$) e si mette a sistema.

- R.R.A.F. per la carrucola con polo nel suo CM (asse rotazione)

$$RT = I\alpha \implies T = \frac{1}{2} m_1 R \alpha$$

Poiché il filo è inestensibile e non striscia, all'avanzamento ds della massa corrisponde un avanzamento angolare $R\,d\theta = ds$ per la carrucola. Ne consegue che $R\alpha = a$

$$\implies T = \frac{1}{2} m_1 a$$

- Eq. per il peso:

$$m_2 g - T = m_2 a$$

Mettendo a sistema e risolvendo:

1) $a = \dfrac{2 m_2}{m_1 + 2 m_2} g = 2.45 \ m/s^2$

2) $T = \frac{1}{2} m_1 a = 14.7 \ N$

3) Il lavoro della tensione del filo è globalmente nullo: $W = \underbrace{R\,T\,d\theta}_{\text{lavoro sulla carrucola}} - \underbrace{T\,ds}_{\text{lavoro sul peso}}$ $(R\,d\theta = ds)$

Il lavoro totale può quindi essere espresso dalla variazione di energia potenziale della forza peso. Inoltre, poiché il sistema è inizialmente fermo, si ha $E_k = \Delta E_k$.

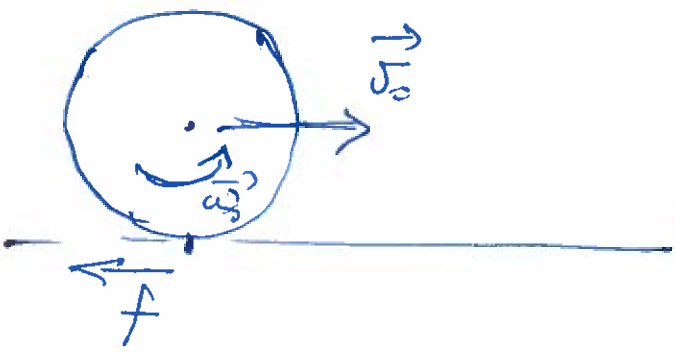
$$\Longrightarrow E_k = -\Delta E_p = m_2 g \Delta h = 9.8\ \mathrm{J}$$

4) $$E_k = \frac{1}{2} I \omega^2 + \frac{1}{2} m_2 v^2$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} m_1\right) R^2 \omega^2 + \frac{1}{2} m_2 v^2$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} m_1 + m_2\right) v^2$$

$$E_k^1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} m_1\right) v^2 = \frac{\frac{1}{2} m_1}{\frac{1}{2} m_1 + m_2} E_k = 7.35\ \mathrm{J}$$

$$E_k^2 = \frac{1}{2} m_2 v^2 = \frac{m_2}{\frac{1}{2} m_1 + m_2} E_k = 2.45\ \mathrm{J}$$

Problema 7



Appena dopo il lancio la sfera scorre sul piano con $\vec{v}_0$ e $\vec{\omega}_0$ e $\vec{f}$ come in figura.

La forza di attrito decelera la sfera, il momento della forza di attrito rispetto al CM decelera il moto di rotazione:

$$v(t) = v_0 - a\,t \qquad ; \quad a = f/m \quad \text{TdCM}$$

$$\omega(t) = \omega_0 - \alpha\,t \qquad ; \quad \alpha = \tau/I \quad \text{RRAF}$$

Le velocità si annullano ($v(t_1) = 0$ e $\omega(t_2) = 0$) per:

$$t_1 = \frac{m\,v_0}{f} \quad \text{e} \quad t_2 = \frac{\omega_0\,I}{\tau}$$

Ponendo $t_1 = t_2$ (condizione affinché si annullino allo stesso istante):

$$\frac{m\,v_0}{f} = \frac{\frac{2}{5} m R^2\,\omega_0}{R f} \Rightarrow \frac{v_0}{\omega_0} = \frac{2}{5} R$$

2) Possiamo esplicitare il risultato per il tempo usando la prima relazione

$$t_1 = \frac{m v_0}{f} = \frac{m v_0}{\mu_d m g} = \frac{v_0}{\mu_d g} \qquad (*)$$

ove si è sfruttato $f = \mu_d N$ sapendo che poiché il corpo striscia, l'attrito è dinamico.

Dall'integrazione della legge della velocità, troviamo lo spostamento del CM:

$$\Delta s_{CM} = \int_0^{t_1} (v_0 - at)\,dt = v_0 t_1 - \frac{1}{2} a t_1^2$$

$$= \frac{m v_0^2}{f} - \frac{1}{2}\frac{f}{m}\left(\frac{m v_0}{f}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{m v_0^2}{f} = \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{\mu g}$$

Oppure, sostituendo la relazione trovata in 1)

$$\Delta s_{CM} = \frac{1}{2}\,\frac{4}{25}\,\frac{\omega_0^2 R^2}{\mu g} = \frac{2}{25}\,\frac{\omega_0^2 R^2}{\mu_d g}$$

Problema 8

1) La forza di attrito tra i due dischi è una forza interna. ~~Dor~~ Mentre i dischi interagiscono, tramite la forza interna, le forze esterne sono t.c. $R^{(E)} = 0$ (~~Il~~ CM del sistema non si sposta) e analogamente $\tau_z^{(E)} = 0$ (z = asse di rotazione). Dunque $\vec{L}_z$ si conserva:

$$I_1 \vec{\omega}_1 + I_2 \vec{\omega}_2 = (I_1 + I_2)\, \vec{\omega}_f$$

$$\omega_f = \frac{(I_1 - I_2)\,\omega_1}{I_1 + I_2} = \frac{(60-15)\,kg\,m^2}{60+15\,kg\,m^2} \cdot 20\,rad/s = 12\,rad/s$$

2) L'en. potenziale del sistema è costante. Dunque

$$\Delta E_m = \Delta E_k = \frac{1}{2}(I_1 + I_2)\,\omega_f^2 - \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2 + \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2$$

$$= \frac{1}{2}(I_1 + I_2)(\omega_f^2 - \omega_1^2) = -9.6\ kJ$$