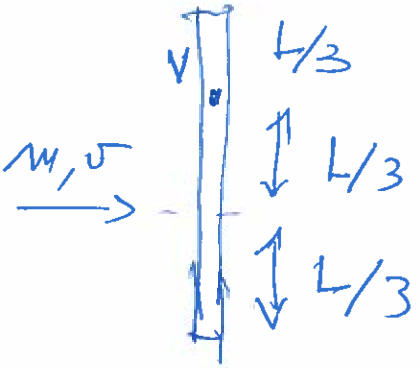
Problema 17 ~~e...~~

Urto anelastico con corpo rigido vincolato. La reazione vincolare nel perno non è trascurabile durante l'urto. Serve a garantire che il perno V rimanga fisso



$$\Longrightarrow \boxed{\Delta \vec{P} = \vec{J}_{V}} \quad (\boxtimes)$$

la quantità di moto non è conservata, la sua variazione è legata all'impulso della forza vincolare durante l'urto.

Per mettere in relazione v e la velocità di rotazione dopo l'urto attorno a V, si ricorre alla relazione:

$$\vec{r} \times \vec{J} = \Delta \vec{L}$$

Scegliendo il polo in V: $\vec{r}_V \times \vec{J}_V = 0$

e quindi $\Delta \vec{L} = 0 \Longrightarrow \vec{L}_{in,V} = \vec{L}_{fin,V}$

Possiamo scrivere:

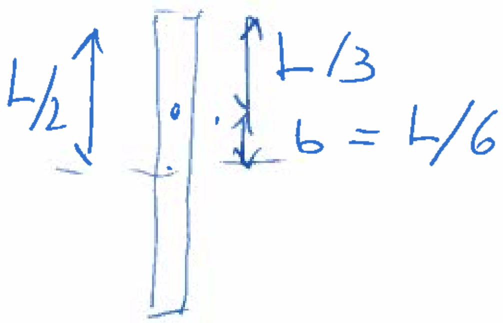
$$L_{in,V} = m \frac{L}{3} v \qquad (\vec{r}_* \times m\vec{v})$$

$$L_{fin,V} = I_V \, \omega_f \qquad (\text{rotazione attorno a } V)$$

$$= \left(I_{sbarra,V} + I_{m,V}\right)\omega_f$$

$$= \frac{1}{9} ML^2 + m\left(\frac{L}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}(M+m)L^2$$

Dove $I_{sbarra,V} = I_{cm} + Mb^2$ Teor. H-S o assi paralleli



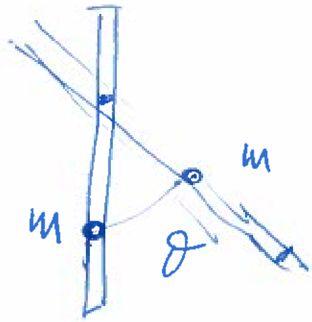
$$= \frac{1}{12} ML^2 + M\left(\frac{L}{6}\right)^2 = \frac{1}{9} ML^2$$

Dunque:

$$v = \frac{\frac{1}{9} ML^2}{m\, L/3}\,\omega_f = \frac{1}{3}\frac{ML}{m}\,\omega_f \qquad (*)$$

Per il calcolo della velocità minima necessaria affinché la sbarra ~~ruoti di~~ ~~attorn~~ compia un giro completo – si ricorre alla CONSERV. DELL'EN. MECCANICA dopo l'urto –

~~E_k~~



$$E_k(\theta=0)+E_p(\theta=0) = E_k(\theta)+E_p(\theta)$$

$$E_k(\theta=0) = E_k(\theta)+E_p(\theta)-E_p(\theta=0)$$

$$= E_k(\theta)+\Delta E_p$$

Affinché il sistema compia un giro completo $E_k(\theta=0)$ deve essere sufficiente a fornire il ΔE_p necessario per raggiungere $\theta=180°$, cui corrisponde la massima ΔE_p, con $E_k(\theta=180°)>0$ – Dunque

$\longrightarrow$

$$E_k(\theta=0) > \Delta E_p^{max} \qquad (**)$$

Esplicitando le ~~ed~~ espressioni per E_k e ΔE_p si ha:

$$E_k(\theta=0) = \frac{1}{2} I_v \omega_f = \frac{1}{18}(m+M)L^2\omega_f$$

$$\Delta E_p = \Delta E_p^{sbarra} + \Delta E_p^{m}$$

$$= Mg\,\Delta h_{CM,sbarra} + mg\,\Delta h_m$$

dove $\Delta h_{CM,\,sbarra} = 2\left(\frac{L}{6}\right)$

$\Delta h_m = 2\left(\frac{L}{3}\right)$

* Abbiamo tutte le relazioni necessarie per trovare da (**) ω_f minimo e da (*) v_0 —

* Per $\vec{J}_v$, ~~avendo trovato~~ si ricorre a ($\boxtimes$)

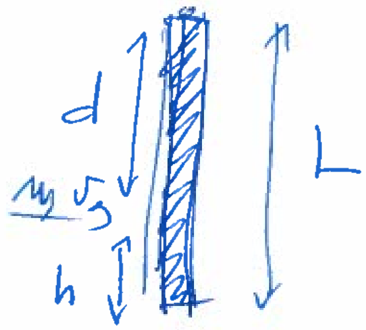
$$\vec{J}_v = \vec{P}_f - \vec{P}_{in} = M_{TOT}\,\vec{v}_{CM,f} - m\,\vec{v}_0$$

Problema 18

Soluzione analoga al Pb. 17, con qualche differenza –

– Urto con vincolo in V – :

$$\Delta \vec{L}_V = 0$$



$$L_{V,in} = m v_0 d$$

$$L_{V,out} = I_V \omega_f$$

con $I_V = \frac{1}{3} M L^2$ mom. di inerzia della sbarra rispetto a un suo estremo

Si noti che $\vec{L}_{m,f} = 0$ (mom. angolare del proiettile rispetto ~~all'urto~~ a V dopo l'urto) – Infatti il proiettile cade in verticale e dunque $\vec{v} \parallel \vec{r}_V$ e $\vec{r}_V \times \vec{v} = 0$

– Poi si procede con la cons. di E_m

Problema 19

Nell'urto la sponda del biliardo esercita una forza impulsiva $\vec{J}$ e un momento impulsivo $\vec{r} \times \vec{J}$ che determinano la variazione di $\Delta \vec{p}$ e $\Delta \vec{L}$ della biglia — [F attrito è trascurabile rispetto a forze impulsive]

$$J = m(v_f - v_i)$$

$$(h-R)J = I_{CM}\,\omega_f - \omega_i$$

Poiché si ipotizza che il moto sia di puro rotolamento sia prima sia dopo l'urto —

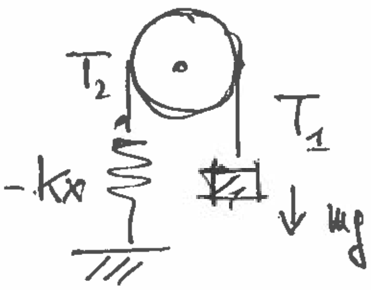
$$\omega_f = v_f/R \quad e \quad \omega_i = v_i/R$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} J = m \, \Delta v \\ J = \dfrac{I_{CM}}{(h-R)R} \, \Delta v \end{cases} \Longrightarrow \cancel{m} = \frac{2}{5}\frac{\cancel{m}R^2}{(h-R)R}$$

$$\Longrightarrow h = \frac{7}{5} R$$

Probl. 20 - 21 - 22   Stesso procedimento

20 - 1)



in generale T_1 e T_2 diverse ai due estremi

Eq. per la rotazione della carrucola:

$$R\,(T_2 - T_1) = I\,\alpha$$ (senso antiorario positivo)

in condizioni statiche $\alpha = 0$

$T_1 = T_2 \longrightarrow$

dunque l'allungamento della molla deve bilanciare mg =

$$-kx + mg = 0 \Rightarrow x = \frac{mg}{k} = \frac{\cancel{3.0}\,1.0 \times 9.8}{\cancel{600}\,200}\ m$$

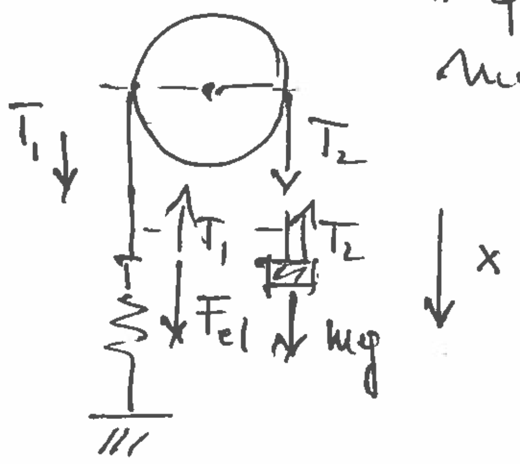
$$= 4.9 \times 10^{-2}\ m = 4.9\ cm$$

20, 2)

Metodo A   Equazioni del moto per i due corpi e accoppiamento

Metodo A

Eq. del moto per i due corpi — ricordando che $T_1 = F_{el}$, perché il punto di raccordo tra fune e molla è di massa nulla —



1) $mg - T_2 = ma$

2) $RT_1 - RT_2 = I\alpha$

(segno secondo convenzione antioraria)

per la scelta dell'asse:

$\alpha = -a/R$ ⟶ spostamento positivo ~~de~~ $\Delta x>0$, spost. angolare negativo -

Perciò a sistema:

$$\begin{cases} mg - T_2 = ma \\ T_2 - T_1 = \dfrac{I}{R^2}\, a \end{cases}$$

(cambio segno)

da cui:

$$mg - F_{el} = \left(\frac{1}{2}M + m\right)\frac{d^2x}{dt^2}$$

per uno spost. $\Delta x > 0$ la molla agisce come forza di richiamo, discorde da Δx — Dunque kx deve comp. con segno discorde dall'acc.

$$-kx + mg = \left(\frac{1}{2}M + m\right)\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$-k\left(x - \frac{mg}{k}\right) = \left(\frac{1}{2}M + m\right)\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$z = x - x_0 \qquad \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

Eq. dell'oscill. armonica per piccoli spostamenti attorno all'equilibrio.

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \left[\frac{k}{\frac{1}{2}M + m}\right]x = 0$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{\frac{1}{2}M+m}} = 10 \text{ rad/s}$$

$$\Rightarrow \omega_0^2 = \frac{k}{\frac{1}{2}M+m} \qquad T = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

$$T = 2\pi\left[\frac{\frac{1}{2}M + m}{k}\right]^{1/2} = 2\pi \cdot \left[\frac{6\,kg}{600\,N/m}\right] = 0.65\ s$$

3) $x = x_0 + z_{max}\cos(\omega_0 t + \varphi) \qquad z_{max} = 5.0\,cm$

$$v = \frac{dx}{dt} = -z_{max}\omega_0 \sin(\omega t)$$

$$v_{max} = z_{max}\,\omega_0$$

$$\omega_{max} = \frac{v_{max}}{R} = \frac{z_{max}}{R}\,\omega_0 = \frac{10}{3}\text{ rad/s} = 3.33 \text{ rad/s}$$

Problema 20 $\boxed{\text{METODO B}}$

1) Energia potenziale

$$E_p(x) = \frac{1}{2} k x^2 - mgx$$

Posizione di equilibrio nello zero della derivata prima ($\vec{F} = 0$) - Stabile se è un minimo

$$kx - mg \Rightarrow x_0 = \frac{mg}{k}$$

2) Moto attorno all'equilibrio definito dall'energia potenziale sviluppata al 2° ordine nell'intorno di x_0:

$$E_p(x) = E_p(x_0) + \frac{1}{2} \left.\frac{d^2 E_p}{dx}\right|_{x=x_0} (x - x_0)^2$$

$$= E_p(x_0) + \frac{1}{2} k (x - x_0)^2$$

Possiamo ridefinire l'energia potenziale per gli scostamenti dall'equilibrio:

$$z = x - x_0$$

e scegliere il rif. in x_0, con $E_p(x_0) = 0$

Si può scrivere:

$$E_p(z) = \frac{1}{2} k z^2 \qquad\qquad z = x - x_0$$

Poiché le forze sono conservative, E_m è conservata.

$$E_m = \frac{1}{2} k z^2 + \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} I \omega^2$$

Ora $v = \frac{dx}{dt} = \frac{dz}{dt}$

La puleggia ruota con $|R\, d\vartheta| = |dx|$ e dunque $v^2 = R^2 \omega^2$. Dunque

$$E_m = \frac{1}{2} k z^2 + \frac{1}{2}\left(m + \frac{I}{R^2}\right) v^2$$

Poiché E_m costante $\frac{dE_m}{dt} = 0$, da cui

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} k z^2 + \frac{1}{2}\left(m + \frac{1}{2} M\right) v^2\right) = 0$$

$$\cancel{\left[k z + \frac{1}{2}\left(m + \frac{1}{2} M\right) \frac{d^2 z}{dt^2}\right] v = 0}$$

$$k z \frac{dz}{dt} + \left(m + \frac{1}{2}M\right) v \frac{dv}{dt} = 0$$

$$\left[k z + \left(m + \frac{1}{2}M\right)\frac{d^2 z}{dt^2}\right] v = 0$$

Soluzione non banale per $v \neq 0$:

$$\underbrace{k z + \left(m + \frac{1}{2}M\right)\frac{d^2 z}{dt^2} = 0}$$

Eq. dell'oscillatore armonico attorno a $z = 0$ $(x = x_0)$ con

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m + \frac{1}{2}M}}$$ – stesso risultato precedente

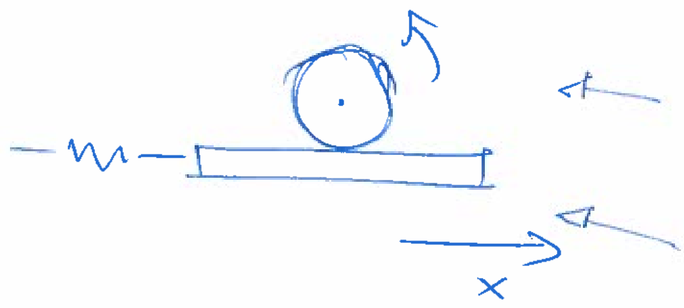
Prob. 21

* In questo caso la soluzione con la cons. dell'energia è più semplice (immediata), perché non si deve ridefinire la "posizione di zero"

$$E_m = \underbrace{\frac{1}{2}kX^2 + \frac{1}{2}mv^2}_{\text{Piastra}} + \underbrace{\frac{1}{2}I_{cM}\omega^2}_{\text{Disco}}$$

ecc. $(v = \omega R)$

Si può risolvere anche con il metodo A:



$$f = \frac{I}{R^2}a$$

$$ma = -kx - f$$

(f concorde con a)

$$kx + \left(m + \frac{I}{R^2}\right)\frac{d^2x}{dt^2} = 0$$

Risposta 2d. Punto 3)

$$\alpha = \frac{a}{R} \implies \alpha_{max} = \frac{a_{max}}{R}$$

Per il moto armonico semplice

$$x = A_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$$
$$a = -\omega_0^2 A_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

La massima acc. (in modulo) si ha quando $|\cos(\omega_0 t+\varphi)| = 1$, che corrisponde anche al punto di massima elongazione $x_{max} = A$. Dunque $|a_{max}| = x_{max}\,\omega_0^2$

$$\alpha_{max} = \frac{R f^{max}}{I} \qquad \text{eq. del moto angolare}$$

da cui

$$\frac{I}{R^2} a_{max} = f_s^{max} \leq \mu_s M g$$

$$\mu_s \geq \frac{I}{R^2} \frac{x_{max}\,\omega_0^2}{M g} \qquad \text{e poi e' numerico}$$

Prob. 24

Il problema non specifica se vi sia attrito – Nell'urto si esprime una forza impulsiva molto intensa. Durante l'urto l'attrito è trascurabile, comunque –

Perciò il sistema è isolato : si conservano $\vec{P}_{TOT}$ e $\vec{L}_{TOT}$:

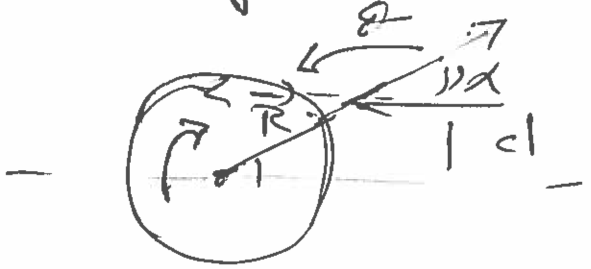
1) $\vec{P}_{in} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = \vec{P}_{CM}$

$= m_1 v_{1x} - m_2 v_{2x} =$

$= 1 \cdot 2\ kg\ m/s - 0.2 \times 10\ kg\ m/s = 0$

$v_{CM} = 0$

2) Scegliamo un polo nel CM (o lungo la direttrice di $\vec{v}_1$) –



$\vec{L} = |\vec{L}_1 + \vec{L}_2| =$

$= I\omega_1 + m v_2 R \sin\theta$

$= I\omega_1 - m d v_2$ $\qquad \sin\theta = \frac{d}{R}$

(2)

Dopo l'urto $\omega_f = 0 \implies L_f = I_f \omega_f = 0$

("$I_f = I$ + contributo del pto materiale ma non interessa calcolarlo, perché $\omega_f = 0$)

Dunque: $L_{in} = 0$

$$I\omega_1 - m\,d\,v_2 = 0$$

$$d = \frac{I\omega_1}{mv_1} = \frac{I\,2\pi f}{mv_1} =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{MR^2\,2\pi f}{mv_1} = \frac{MR^2\pi f}{mv_1} =$$

$$= \frac{1\,\mathrm{Kg} \cdot 36\times10^{-4}\,\mathrm{m}^2 \cdot 3.14 \cdot 5\,\mathrm{s}^{-1}}{0.2\,\mathrm{Kg} \cdot 10\,\mathrm{m/s}} = 2.8\,\mathrm{cm}$$

$$\Delta E_k = -E_k^{in} = -\left(\frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}I\omega_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2\right)$$

$$\frac{1}{2}m_1 v_1^2 = \left(\frac{1}{2}\,1.0 \cdot 4.0\right)\mathrm{J} = 2.0\,\mathrm{J}$$

$$\frac{1}{2}m_2 v_2^2 = \left(\frac{1}{2}\,0.2 \cdot 100\right)\mathrm{J} = 10.0\,\mathrm{J}$$

$\left[\ \pi^2 \simeq 10\ \right]$

$$\frac{1}{2}I\omega_1^2 = \frac{1}{2}\frac{1}{2}MR^2\,4\pi^2 f^2 \simeq 1.0\times36\times10^{-4}\,10 \cdot 25\,\mathrm{J}$$

$$= (6\times5)^2\times10^{-3}\,\mathrm{J} = 0.9\,\mathrm{J} \implies \Delta E_k = -11.9\,\mathrm{J}$$

Prob. 25

1

Nell'istante ruota senza sciv. attorno spigolo;

$\Longrightarrow$ ~~R~~ $\vec{F}_V \neq 0$ durante l'urto

Forza impulsiva -

E' un urto con CR vincolato -

Dunque ~~$\vec{R}^E$~~ $\vec{J}^E = \int_0^{\tau_{urto}} \vec{R}^E dt \neq 0$

NON SI CONSERVA LA Q.TA' DI MOTO

Pero' il punto in cui agisce $\vec{F}_V$ e' punto fisso attorno a cui si ha rotazione rigida del CR -

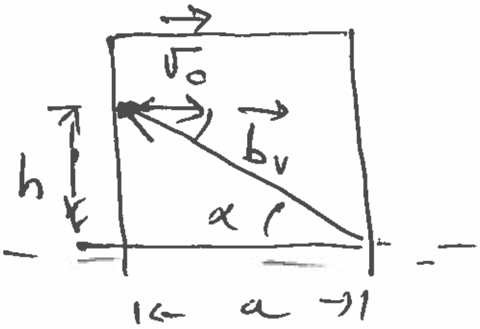
$\Longrightarrow$ durante l'urto $\vec{r}_V \times \vec{J}^E = \int (\vec{r}_V \times \vec{R}^E) dt = 0$

perche' $\vec{R}^E$ e' la somma di forze trascurabili durante l'urto + $\vec{F}_V$ che non e' trascurabile, ma che ha momento nullo rispetto a V -

Percio' $\vec{L}_V = \text{cost}$

Possiamo usare qs. informazione per mettere in relazione $L_{in} = L_{fin}$.

Troviamo $L_{in} = |\vec{b}_V \times m\vec{v}_0| =$



$= b_V m v_0 \sin\alpha$

$= \sqrt{a^2+h^2}\, m v_0 \cdot \frac{h}{\sqrt{a^2+h^2}} = m v_0 h$

Commento: il "braccio efficace" è la dist. del polo dalla direzione di $\vec{v}_0$ – sempre vero – e cioè in pr. caso h – come trovato dalla definizione di L.

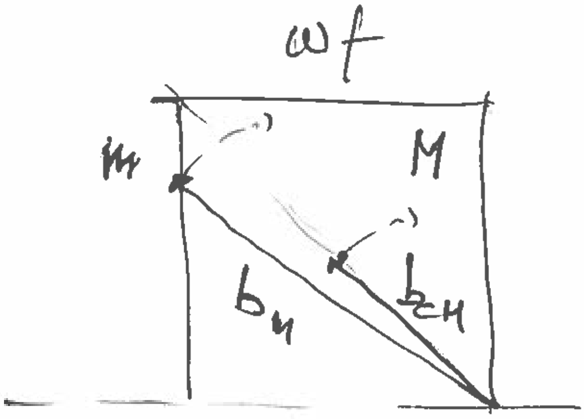
Troviamo: $L_f = I_{TOT}\, \omega_f$ (*) dove

$I_{TOT} = I_{proiettile} + I_{cubo}$ con polo in V (compl. anelastico)

Vale (*) perché dopo l'urto il moto è una RRAF – sia il cubo, sia il proiettile ruotano assieme attorno a V

$$I_{TOT} = m(a^2+h^2) + I_V$$

$$= \underbrace{m(a^2+h^2)}_{I_{proiettile}} + \underbrace{I_{CM} + M b_{CM}^2}_{\text{teorema asse parallelo per il cubo}}$$



$$b_m^2 = a^2 + h^2$$

$$b_{CM} = \frac{\sqrt{2}\,a}{2}$$

Dunque: $I_{TOT} = m(a^2+h^2) + \frac{1}{6}Ma^2 + \frac{Ma^2}{2}$

$$= \boxed{m(a^2+h^2) + \frac{2}{3}Ma^2} \leftarrow \text{ESATTO}$$

[nota: $m \simeq 10^{-3} M$ – il primo termine è numericamente trascurabile]:

$$\boxed{I_{TOT} \simeq \frac{2}{3}Ma^2} \leftarrow \text{USO QUESTO}$$

— DOPO L'URTO. ~~non~~ agiscono forze conservative oppure forze che non compiono lavoro (il punto di cui agisce $\vec{F}_V$ è fisso) - Dunque l'energia meccanica si conserva -

Affinché il corpo ruoti di 90°, il CM deve innalzarsi fino a un'altezza max raggiunta quando il corpo è ruotato di 45° -

L'energia cinetica in quel punto deve essere $E_k(h_{max}) > 0$

Conservazione dell'energia:

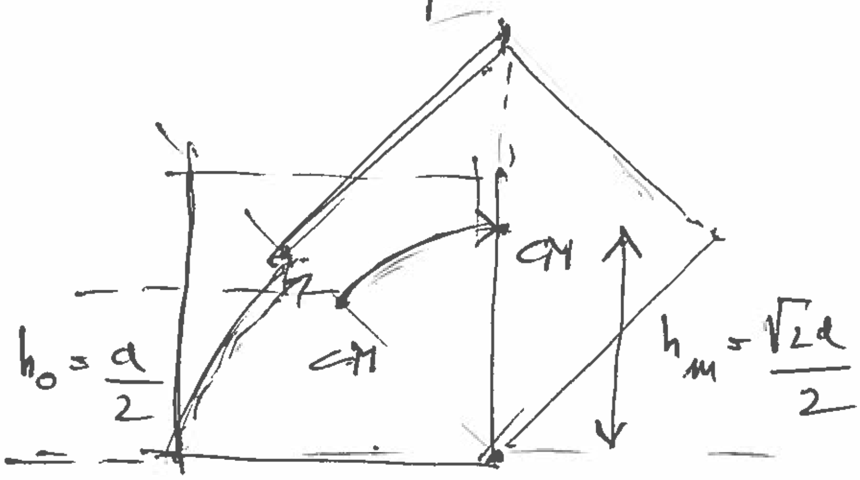
$$E_k(h_0) + E_p(h_0) = E_k(h_{max}) + E_p(h_{max})$$

$$E_k(h_0) = E_k(h_{max}) + \Delta E_p$$

$$E_k(h_0) > \Delta E_p \quad \text{per} \quad E_k(h_{max}) > 0$$

L'energia cinetica deve essere superiore a

$$E_k(h_0) = \Delta E_p$$



$$\frac{1}{2} I_{TOT}\, \omega_0^2 = Mg\Delta h$$

$$\omega_0 = \left[\frac{2Mg\Delta h}{I_{TOT}}\right]^{1/2} \simeq$$

$$= \left[\frac{Mg(\sqrt{2}-1)a}{\frac{2}{3}Ma^2}\right]^{1/2} = \left[\frac{3(\sqrt{2}-1)}{2a}g\right]^{1/2}$$

$$\simeq 3.49 \text{ rad/s}$$

(5.)

dalla relazione iniziale; $L_{in} = L_f$:

$$m v_0 h = \left[m(a^2+h^2) + \frac{2}{3} M a^2 \right] \omega_0$$

$$\simeq \frac{2}{3} M a^2 \omega_0$$

da cui $v_0 = \frac{2}{3} \frac{M a^2}{m h} \omega_0 \simeq 1{,}3 \times 10^3 \, m/s$

[attenzione risultato nel file sbagliato - 870 m/s perché c'è un errore nel libro da cui l'ho preso]