Problema 9

1) Durante l'urto le forze esterne sono trascurabili dunque

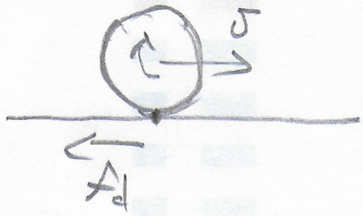
$$\Delta \vec{P}_{CM} = \vec{J}$$

$$\Delta \vec{L}_{CM} = \vec{r} \times \vec{J} = 0 \quad \text{poiché } \vec{r} \parallel \vec{J}$$

per polo nel CM

Perciò $M v_{CM} = J$ e $v_{CM} = J/M = 3.81\ m/s$
il moto è di pura traslazione, poiché $\omega_0 = 0$ prima dell'urto e $\Delta L = 0$ nell'urto

2) Dopo l'urto la biglia è decelerata dalla forza di attrito, mentre il momento della forza di attrito instaura un moto angolare

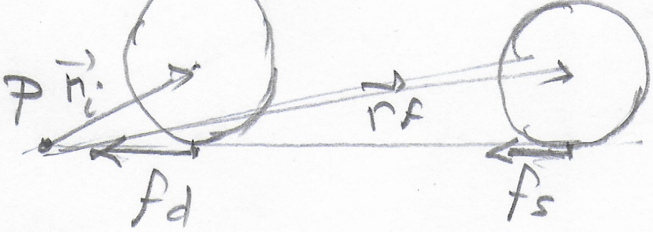


$$v(t) = v_{CM} - at \qquad ma = f_d$$

$$\omega(t) = \alpha t \qquad I\alpha = r f_d$$

Si raggiunge la condizione di puro rotolamento quando $v(t) = r\,\omega(t)$. Poiché f_d non è nota, conviene sfruttare un polo fisso sul piano per trovare le relazioni tra $v_{in} = v_{CM}$ e v_f quando si raggiunge il moto di puro rotolamento. →

Polo fisso nel piano.



$\vec{r}_i \times \vec{f}_d = 0$ Iniziale

$\vec{r}_f \times \vec{f}_s = 0$ puro rotol.

inoltre il momento della forza peso e della normale sono uguali e contrari (delle forze) → Dunque ~~il polo~~ rispetto momento rispetto a P è nullo. Perciò $\vec{L}_p$ si conserva.

$$\vec{L}_{p,in} = \vec{r}_i \times m\vec{v}_{CM} = m r v_{CM}$$

$$\vec{L}_{p,fin} = L_{CM} + \vec{r}_f \times m\vec{v}_f = \left(I_{CM} + mr^2\right)\omega_f$$

Nella seconda relazione si usa il fatto che il moto fin è di puro rotolamento (*) e dunque $L = I_0\omega$ con ω velocità di rotazione attorno ad un asse fisso nel pto di contatto (oppure si ottiene dal teorema di Koenig, come indicato).

Per la sfera $I_{CM} = \frac{2}{5}mr^2$, dunque

$$L_p = \frac{7}{5}mr^2\omega_f = \frac{7}{5}mrv_f \quad (v_f = \omega_f r)$$

Infine dunque

$$m r v_{in} = \frac{7}{5} m r v_f \Longrightarrow v_f = \frac{5}{7} v_{in} = 2{,}72 \text{ m/s}$$

3) $\omega_f = \frac{v_f}{r} = \frac{2{,}72 \text{ m/s}}{3{,}1 \times 10^{-2} \text{ m}} = 87{,}8 \text{ rad/s}$

4) $f_d \cdot \Delta s = \Delta E_k^{TOT} =$

$$= \frac{1}{2} m v_f^2 + \frac{1}{2} I_{CM} \omega_f^2 - \frac{1}{2} m v_{in}^2$$

$$= \frac{1}{2}\left(I_{CM} + m r^2\right)\omega_f^2 - \frac{1}{2} m v_{in}^2$$

$$= -0{,}435 \text{ J}$$

5) $\Delta E_k^{TOT} = \underbrace{\cancel{\Delta E_k^{CM}}\,\Delta\left(\frac{1}{2} m v_{CM}^2\right)}_{\text{moto del CM}} + \underbrace{\Delta E_k'}_{\text{moto attorno al CM}}$

Parte dell'energia di traslazione del CM viene tradotta in energia cinetica di rotazione. La variazione di energia cinetica associata al moto di traslazione è (in modulo) maggiore della variazione di en. cinetica totale.

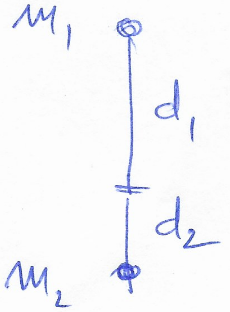
$$\Delta E_k^{CM} = \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_i^2 = -0{.}747 \text{ J}$$

Problema 10

1) Poichè sul sistema non agiscono forze esterne nel piano del moto, e le forze ortogonali al piano (peso e forza normale) si annullano $\vec{R}^{(E)} = 0 \longrightarrow$ il CM non subisce accelerazioni. Poichè il CM è inizialmente fermo, nel riferimento scelto, esso rimane fermo.

2) La distanza tra le due masse viene diminuita da un meccanismo interno. La forza che agisce su di esse è dunque una forza interna $\Longrightarrow \vec{\tau}_{CM} = 0$ e il momento angolare rispetto al CM si conserva. Si ha

$$L = (I_1 + I_2)\,\omega = (m_1 d_1^2 + m_2 d_2^2)\,\omega$$



$$d_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\, d = \frac{2}{3} d$$

$$d_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} = \frac{1}{3} d$$

$$L = \left(m_1 \frac{4}{9} d^2 + m_2 \frac{1}{9} d^2\right)\omega = \frac{2}{3} m_1 d^2 \omega$$

(avendo usato $m_2 = 2 m_1$) $\longrightarrow$

dunque : $L_{in} = \frac{2}{3} m_1 d_{in}^2 \omega_{in}$

$$L_{fin} = \frac{2}{3} m_1 d_f^2 \omega_f$$

$$d_{in}^2 \omega_{in} = d_f^2 \omega_f$$

Poiché il filo si accorcia di $1/3$,

$$\omega_{in} = \frac{\omega_f}{9} \qquad \omega_f = 9\,\omega_{in} = 54 \text{ rad/s}$$

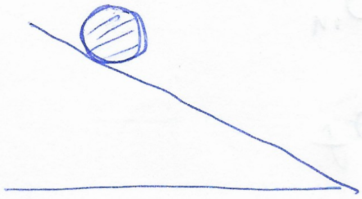
3) $W = \Delta E_k = \frac{1}{2} I_f \omega_f^2 - \frac{1}{2} I_{in} \omega_{in}^2$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3} m_1 d_f^2\right)\omega_f^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3} m_1 d_{in}^2\right)\omega_i^2$$

$$= \frac{1}{3} m_1 \left(\frac{d_{in}^2}{9} \cdot 81\,\omega_{in}^2 - d_{in}^2 \omega_{in}^2\right) =$$

$$= \frac{8}{3} m_1 d_{in}^2 \omega_{in}^2 = 27.2 \text{ J}$$

Problema 11



Sia M = massa del cilindro generico e $I = \frac{1}{2}MR^2$ il mom. di inerzia rispetto al proprio asse di un cilindro di massa M e raggio R –

Nel puro rotolamento 2) $\omega R = v_{CM}$ (v_{CM} = vel. del CM)

$$E_K = \frac{1}{2} M v_{CM}^2 + \frac{1}{2} I \omega^2$$ (Teo. Koenig)

Poiché E_M si conserva: $\Delta E_K = -\Delta E_p$. Siccome il cilindro parte da fermo, $E_K^i = 0$ ($v_{CM}^i = 0$, $\omega^i = 0$)

In fondo al piano si ha:

$$\frac{1}{2} M v^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} MR^2\right)\omega^2 = Mg\Delta h$$

$$2v^2 + v^2 = 4g\Delta h$$

1) $v^2 = \sqrt{\frac{4}{3} g\Delta h}$ $\quad \left[\cancel{= \sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{2g\Delta h}}\right.$ ~~v. del punto materiale~~ $\left.\right]$

Come si nota dalle relazioni trovate la velocità finale è indip. da M e da R

$\Longrightarrow$ È UNA PROPRIETÀ DELLA GEOMETRIA DEL CR, NON DELLA MASSA E DELLA DIMENSIONE

Problema 12

~~Per~~
Il risultato è un semplice ~~corollario dell'eserc~~ estensione ~~dell'eserci~~ del problema precedente.
Per un corpo a simmetria sferica di massa M il momento di inerzia rispetto all'asse di simmetria si può esprimere come:

$$I = mK^2 \qquad K = \text{RAGGIO GIRATORE}$$

$k = cR$ dove c è un coefficiente ≤ 1

per l'anello $c = 1$ $(I = mR^2)$
disco $c = \frac{1}{2}$
sfera piena $c = \frac{2}{5}$
eccetera ...

Dalla conservazione dell'energia cinetica:

$$\frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} m c^2 R^2 \omega^2 = mg\Delta h$$

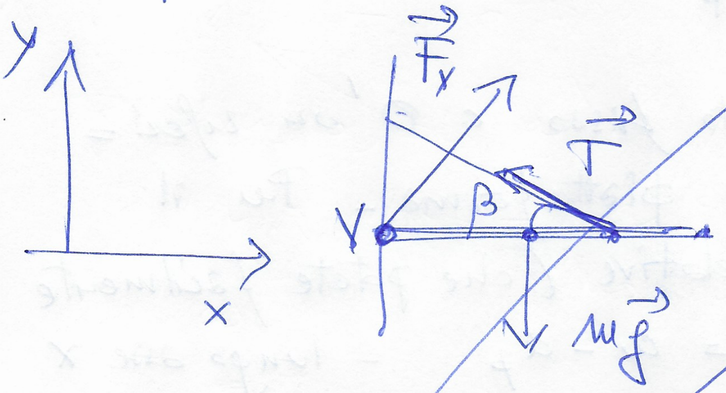
Ossia:

$$v^2 = \frac{2g\Delta h}{1+c^2} \leq 2g\Delta h$$

La relazione trovata non dipende da M, né da R. Il corpo più veloce è quello con c minimo. L'anello perde con il cilindro

Problema 13

Equilibrio statico di un sistema di forze complanari: Da $\vec{R}^E = 0$ e $\vec{\tau}^E = 0$ si



hanno tre equazioni non banali, per le componenti x e y delle forze e per la componente z dei momenti delle forze

$$\begin{cases} T_x - F_{Vx} = 0 \\ T_y + F_{Vy} - mg = 0 \\ \frac{1}{2} mg - \frac{3}{4} L T \sin(\beta) = 0 \end{cases} \quad \text{Polo in V}$$

Dalla terza: $T = \frac{4}{3} mg = 13.0\ kN$ (6.50 kN per fune)

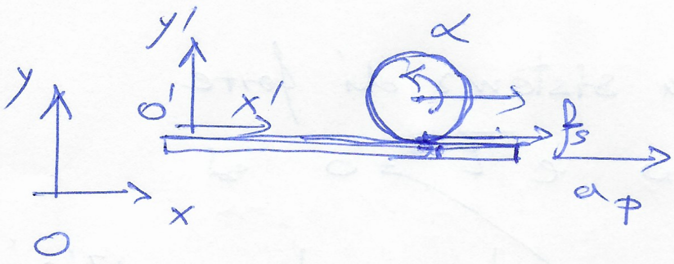
Dalla prima: $F_{Vx} = T \cos\beta = 11.2\ kN$

Dalla seconda: $F_{Vy} = mg - T \sin\beta = 3.3\ kN$

Da cui $T = \sqrt{T_x^2 + T_y^2} = 11.3\ kN$

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{T_y}{T_x}\right) \simeq 16^\circ$$

Problema 16



Siano O un riferimento fisso e O' un riferimento solidale con la piattaforma. Per il teorema delle acc. relative (che potete facilmente ridimostrare): $a' = a - a_p$ lungo asse x

Nel rif. O, inerziale, il CM del cilindro si muove ~~accelerato~~ sotto l'effetto della forza di attrito che agisce nel verso di x positivo (si oppone allo scorrimento delle superfici):

$$f_s = ma$$

L'equazione angolare riferita a un polo nel CM è:

$$r f_s = I_{CM}\,\alpha$$

La condizione di puro rotolamento lega α all'accelerazione a' in O', poiché il cilindro rotola sulla piattaforma in moto. Inoltre, per rotazioni antiorarie (α > 0), il cilindro scorre ~~in O'~~ sulla piattaforma verso sx (vedi figura) cioè verso x' negativi. Dunque $\alpha = -a'/r$

→

Si ottiene il sistema:

$$\begin{cases} f_s = ma \\ r f_s = -\left(\frac{1}{2} m r^2\right) \frac{a'}{r} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f_s = ma \\ f_s = \frac{1}{2} m (a_p - a) \end{cases}$$

Risolvendo per a:

$$2ma = ma_p - ma$$

Da cui:

$$a = \frac{1}{3} a_p = 1.0 \ m/s^2$$

$$a' = a - a_p = -\frac{2}{3} a_p = -2.0 \ m/s^2$$

Il cilindro accelera nella direzione di a_p (concorde a f), ma con acc. relativa in direzione opposta.

2) La condizione di puro rotolamento richiede

$$ma = f_s \leq \mu_s mg$$

Ossia:

$$\mu_s \geq \frac{a}{g} = 0.102$$