 ISBN 978 88 08 18043 8

secondo la formula:

$$\dot{\mathbf{M}}_{\Omega'} = \dot{\mathbf{M}}_{\Omega} + \overrightarrow{\Omega'\Omega} \times \dot{\mathbf{V}}\,.$$

L'unico modo per avere sempre $\dot{\mathbf{M}}_{\Omega'} = \dot{\mathbf{M}}_{\Omega}$ indipendentemente da Ω e Ω' è richiedere che il vettore risultante $\dot{\mathbf{V}}$ sia nullo: $\dot{\mathbf{V}} = \mathbf{0}$.

3-4 Problemi risolti completamente

Esercizio 3-1

Nel piano xy, la componente x di un vettore $\vec{v}$ vale -12, quella y vale $+35$. Quanto vale il modulo del vettore? Quanto vale l'angolo compreso fra $\vec{v}$ e l'asse delle ascisse?

Esercizio 3-2

Esprimere, mediante i versori cartesiani del piano xy, il vettore $\vec{v}$ somma dei due vettori $\vec{a} = 4\hat{\imath} + 3\hat{\jmath}$ e $\vec{b} = 13\hat{\imath} + 7\hat{\jmath}$. Quali sono il modulo e la direzione (rispetto ad $\hat{\imath}$) di $\vec{v}$?

Esercizio 3-3

Dati i due vettori $\vec{a} = 4\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} + \hat{k}$ e $\vec{b} = \hat{\imath} + \hat{\jmath} + 4\hat{k}$, si trovino i vettori $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$ e un vettore $\vec{c}$ tale che $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$.

Esercizio 3-4

Partendo da un aeroporto, un pilota d'aereo si porta a 6,2 km di quota, a una distanza di 11,5 km a sud e di 8,4 km a ovest dal punto di decollo. A che distanza si trova dal punto di decollo? Definire un sistema di riferimento con origine nel punto di decollo, con assi diretti verso due punti cardinali e determinare i coseni e gli angoli di direzione della posizione dell'aereo in tale sistema.

Esercizio 3-5

Nel piano xy, siano $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ tre vettori di modulo rispettivamente 4,6 e 12. Sia $\vec{a}$ lungo il semiasse positivo delle ascisse, $\vec{b}$ formi un angolo di 60° in senso antiorario con $\vec{a}$, e l'angolo fra $\vec{b}$ e $\vec{c}$ sia di 90° in senso antiorario. Calcolare le componenti x e y dei tre vettori. Trovare due numeri α e β tali che $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$.

Esercizio 3-6

Nella somma $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$, definita sul piano xy, il vettore $\vec{a}$ ha modulo 12 e forma un angolo di 40° rispetto al semiasse positivo delle ascisse, mentre il vettore $\vec{c}$ ha modulo 15 e la sua direzione forma un angolo di 20° in senso antiorario con il semiasse negativo delle ascisse. Calcolare il modulo e la direzione (rispetto al semiasse positivo delle ascisse) di $\vec{b}$.

ISBN 978 88 08 18043 8

Esercizio 3-7

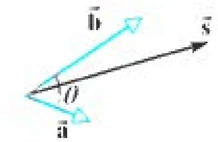

Figura 3-2

Sapendo che il rapporto fra i moduli di due grandezze vettoriali omogenee $\vec{b}$ e $\vec{a}$ è $b/a = f$ (≥ 1) e che l'angolo θ formato dalle loro direzioni orientate è acuto, si determini: 1) l'espressione del modulo del vettore $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b}$ in termini di a, f e θ, 2) il suo valore numerico (nelle unità di misura della grandezza fisica da esso rappresentata) nel caso in cui $\sin\theta = 3/5$, $f = 2$ e $a = 10$ (nelle suddette unità).

Esercizio 3-8

Dati nel piano cartesiano i punti $A = (5, 2)$, $B = (3, 4)$, $C = (1, 2)$ e $D = (1, 5)$, determinare il valore dell'angolo formato dai segmenti CA e OB e di quello formato dai segmenti DA e OB.

Esercizio 3-9

Dati i vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$, le cui componenti cartesiane sono rispettivamente (4, 5, 3) e (0, 2, 2) calcolare $\vec{a} \cdot \vec{b}$, $\vec{a} \times \vec{b}$ e il valore dell'angolo compreso fra $\vec{a}$ e $\vec{b}$.

Esercizio 3-10

Dati $\vec{a} = \hat{\imath} - \hat{\jmath} \;\; \hat{k}$, $\vec{b} = -2\hat{\imath} + 3\hat{\jmath}$ e $\vec{c} = -4\hat{\jmath} + 2\hat{k}$, calcolare $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$ e $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ e verificare che i due vettori non sono uguali.

Esercizio 3-11

Dati i vettori $\vec{a} = 3\hat{\imath} + 4\hat{\jmath}$, $\vec{b} = 2\hat{k}$, calcolare: 1) il prodotto vettoriale $\vec{a} \times \vec{b}$, 2) il vettore $\vec{c}$, perpendicolare ad $\vec{a}$ e $\vec{b}$, che ha modulo $c = 5$ e per il quale risulta $\vec{c} \cdot \hat{\jmath} > 0$.

Esercizio 3-12

Nell'Esercizio 3-10 si è chiesto di verificare mediante il calcolo diretto (in un caso particolare) che i prodotti tripli fra vettori dipendono dall'ordine in cui essi vengono eseguiti. Alcuni studenti potrebbero avere verificato che nel caso in questione essi risultavano effettivamente diversi fra loro, ma singolarmente non uguali alle espressioni riportate nella soluzione.

ISBN 978 88 08 18043 8

In effetti nel calcolare i numerosi prodotti vettoriali coinvolti in tale verifica non è trascurabile la probabilità di incorrere in qualche errore, pertanto è utile proporre ora di 1) dimostrare in generale una formula compatta per la differenza fra i due prodotti tripli $\vec{\mathbf{a}} \times (\vec{\mathbf{b}} \times \vec{\mathbf{c}}) - (\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}}) \times \vec{\mathbf{c}}$, utilizzando l'identità vettoriale [3-14] valida per ogni terna di vettori, 2) individuare due situazioni in cui i due prodotti tripli risultano invece uguali.

Esercizio 3-13

Nello spazio euclideo sono dati i tre punti $A = (4, 5, 2)$, $B = (1, 1, 2)$ e $C = (0, 3, 5)$, dove le coordinate sono misurate in metri. Calcolare l'area del triangolo ABC.

Esercizio 3-14

Preso un cubo e detta A la diagonale di una sua faccia, calcolare l'angolo formato da A e la diagonale principale del cubo.

Esercizio 3-15

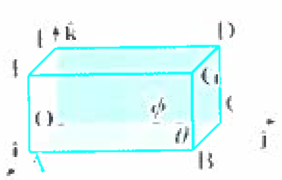

Figura 3-3

La scatola rappresentata in figura 3-3 ha la forma di un parallelepipedo OABCDEFG di altezza $\overline{CD} = h = 4$, avente una base rettangolare i cui lati hanno lunghezza $\overline{AB} = a = 6$ e $\overline{BC} = b = 3$. Determinare gli angoli θ e φ che la diagonale della scatola OG forma, rispettivamente, con la diagonale OB della base e con il lato OC.

Esercizio 3-16

Due vettori di ugual modulo ($\neq 0$) soddisfano le relazioni $\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}} = 2\sqrt{2}\,\hat{\mathbf{k}}$ e $|\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}}| = \vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}}$, ove $\hat{\mathbf{k}}$ è il versore perpendicolare al foglio uscente da esso verso il lettore. Determinare il modulo dei due vettori. Disegnare una coppia di vettori che soddisfano le soprascritte relazioni e determinare il valore dell'angolo θ formato dalle loro direzioni orientate.

Esercizio 3-17

Dimostrare che i vettori omogenei, definiti nelle unità del SI, $\vec{\mathbf{a}} = 2\hat{\mathbf{i}} - 4\hat{\mathbf{j}} + 3\hat{\mathbf{k}}$, $\vec{\mathbf{b}} = \hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} - \hat{\mathbf{k}}$ e $\vec{\mathbf{c}} = -3\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} - 2\hat{\mathbf{k}}$ formano un triangolo e determinarne l'area.

Esercizio 3-18

Determinare il volume del parallelepipedo individuato dai vettori $\vec{\mathbf{a}} = 2\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}$, $\vec{\mathbf{b}} = -3\hat{\mathbf{j}}$ e $\vec{\mathbf{c}} = -\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}} - 2\hat{\mathbf{k}}$, definiti nelle unità del SI.

Esercizio 3-19

Un blocco di calcestruzzo ha la forma di un parallelepipedo e ha una densità volumetrica $\rho = 2{,}32\ \mathrm{g/cm^3}$. Avendo posto l'origine di un sistema di riferimento cartesiano in uno dei suoi vertici, i tre spigoli sono individuati dai vettori $\vec{\mathbf{a}} = \hat{\mathbf{i}} - 0{,}5\,\hat{\mathbf{j}} + 2\,\hat{\mathbf{k}}$, $\vec{\mathbf{b}} = -2\,\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} - \hat{\mathbf{k}}$ e $\vec{\mathbf{c}} = -3\,\hat{\mathbf{i}} + 2\,\hat{\mathbf{j}} - 2\,\hat{\mathbf{k}}$, dove i coefficienti sono espressi in metri. Qual è la massa M del blocco di calcestruzzo?

ISBN 978 88 08 18043 8

Esercizio 3-20

Dati un vettore $\vec{\mathbf{v}}$ e un versore $\hat{\mathbf{n}}$, né paralleli né mutuamente perpendicolari, determinare:

1. il vettore componente di $\vec{\mathbf{v}}$ parallelo a $\hat{\mathbf{n}}$;
2. il vettore componente di $\vec{\mathbf{v}}$ perpendicolare a $\hat{\mathbf{n}}$.

Esercizio 3-21

Dato un punto A di coordinate cilindriche $(\rho, \psi, z) = \left(10\ \mathrm{m}, \frac{\pi}{3}, 3\ \mathrm{m}\right)$, esprimere la sua posizione in coordinate cartesiane e in coordinate sferiche.

Esercizio 3-22

In un sistema di riferimento cartesiano, il punto A ha coordinate (3, 4, 5), dove i coefficienti sono espressi in decimetri. Un altro punto B si trova, rispetto ad A, alla stessa distanza dall'asse z e alla stessa distanza dal piano xy. La sua posizione è però ruotata di un angolo di 30° in senso antiorario rispetto all'asse z. Determinare la distanza fra A e B.

Esercizio 3-23

Immaginiamo di dover collegare mediante un traforo lineare due località sulla superficie terrestre (supposta perfettamente sferica, con $R_T = 6366\ \mathrm{km}$). La prima località ha coordinate 30° longitudine est e 30° latitudine nord, la seconda 70° longitudine est e 45° latitudine nord. Determinare la lunghezza di questo ipotetico tunnel, la massima profondità a cui arriva e quanto tragitto si risparmia a percorrerlo rispetto alla traiettoria di minima lunghezza sulla superficie.

Esercizio 3-24

Siano dati i tre vettori $\vec{\mathbf{a}} = 3\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}$, $\vec{\mathbf{b}} = 2\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} - \hat{\mathbf{k}}$ e $\vec{\mathbf{c}} = \hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} - \hat{\mathbf{k}}$. Calcolare l'angolo tra i vettori $\vec{\mathbf{a}}$ e $\vec{\mathbf{b}}$ e la componente del vettore $\vec{\mathbf{c}}$ rispetto a un versore ortogonale al piano formato dai vettori $\vec{\mathbf{a}}$ e $\vec{\mathbf{b}}$.

Esercizio 3-25

Dato un vettore $\vec{\mathbf{w}}(s)$ che cambia al variare di un parametro scalare s, mantenendo tuttavia inalterato il proprio modulo, si dimostri che la derivata di $\vec{\mathbf{w}}(s)$ rispetto a s è sempre un vettore perpendicolare a $\vec{\mathbf{w}}(s)$ per ogni valore di s, a meno che esso non sia nullo.